

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

**Кусаева Жанслу Маратовна**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
ТЕРМОУПРУГИХ ПОЛЕЙ В ОДНОСЛОЙНЫХ И  
МНОГОСЛОЙНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНАХ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
доцент Шляхин Дмитрий Аверкиевич

Самара 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
1 Обзор литературы.....	11
1.1 Общие сведения о теориях термоупругости .....	11
1.2 Метод конечных элементов при решении задач теории..... термоупругости .....	15
1.3 Аналитический метод решения несвязанных задач термоупругости .....	18
1.4 Аналитический метод решения связанных задач термоупругости .....	22
2 Несвязанная динамическая осесимметричная задача термоупругости для..... круглой жестко закрепленной пластины .....	27
2.1 Постановка задачи .....	29
2.2 Решение задачи теплопроводности.....	31
2.3 Решение задача термоупругости .....	34
2.4 Численный анализ результатов .....	43
3 Связанная нестационарная осесимметричная задача термоупругости для .....	
однослойной круглой жестко закрепленной пластины .....	51
3.1 Постановка задачи .....	51
3.2 Построение общего решения .....	53
3.2 Численный анализ результатов .....	62
4 Связанная нестационарная осесимметричная задача термоупругости для..... круглой жестко закрепленной многослойной пластины .....	73
4.1. Постановка задачи .....	73
4.2. Построение общего решения .....	76
4.3 Численный анализ результатов .....	86

5 Экспериментальная проверка расчета двухслойной круглой жестко закрепленной пластины .....	97
Заключение .....	104
Список литературы .....	105
Приложение 1 Акты о внедрении результатов диссертационной работы .....	122
Приложение 2 Свидетельство о поверке и сертификат оборудования .....	124
Приложение 3 Типовая программа в среде MathCad–15 по определению частот собственных колебаний круглой жестко закрепленной пластины.....	126

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** При проектировании современных приборов и конструкций различного назначения, возникает необходимость исследования их работы в условиях неравномерного нестационарного нагрева. Так данное воздействие сопровождается возникновением температурных деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать в случае всестороннего анализа прочностных характеристик упругих систем конечных размеров. При этом задача существенно усложняется при анализе работы многослойных конструкций, широко используемых в настоящее время.

Для определения напряженно–деформированного состояния и характера распределения температурного поля в конструкции с учетом взаимного влияния термоупругих полей используются разнообразные теории, позволяющие решить данную проблему с различной степенью точности. При этом математическая формулировка рассматриваемых задач, даже в линейной постановке, включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности. Проблема их интегрирования и построение общего решения приводит, как правило, к исследованию только уравнения теплопроводности без учета изменения формы упругой системы или к анализу задач термоупругости в несвязанной постановке. Однако для более качественной оценки нестационарных термомеханических процессов в конструкциях возникает необходимость построения связанных аналитических решений в трехмерной постановке. Данный подход позволяет получить точные, в рамках используемых моделей, расчетные соотношения в наиболее общем виде, а также дает возможность алгоритмизировать и автоматизировать проводимые исследования.

Таким образом, разработка эффективных аналитических методов и алгоритмов расчета упругих систем, испытывающих произвольное нестационарное температурное воздействие, выявление новых связей между характером внешнего воздействия и процессом деформирования элементов конструкций, представляет в настоящее время одну из актуальных проблем

современной науки в области механики деформируемого твердого тела.

**Степень разработанности темы диссертации.** Исследования, посвященные анализу связанности температурных и упругих полей в конструкциях конечных размеров, опираются на фундаментальные труды Дж. Дюгамеля и Ф. Неймана, заложивших основу линейной и нелинейной теории термоупругости. В современном представлении основы классической теории термоупругости, использующей закон теплопроводности Фурье, изложены в работах В. Новацкого, А.Д. Коваленко, В.Г. Карнаухова и др. В развитие данного подхода Г. Лордом, Ю. Шульманом, А. Грином и П. Нахди были разработаны различные теории (GL, GN– теории), учитывающие, в отличие от классической модели, конечную скорость распространения тепла.

Большой вклад в решение прикладных задач внесли Ю.Н. Радаев, В.А. Крысько, Е.Б. Попов, А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский, Е.Ю. Витохин, Ю.Э. Сеницкий, В.С. Зарубин, В.А. Кудинов, И.Г. Величко, Я.С. Подстригач, Э.М. Карташов, С.А. Лычев, Е.Ф. Афанасьев, М.Г. Олененко, С.О. Саркисян, Р.А. Ревинский и др.

**Целью диссертационной работы** является разработка нового теоретического подхода по решению проблемы расчета круглых сплошных жестко закрепленных упругих пластин с учетом связанности термоупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки, а также проведение качественного и количественного анализа термоупругих процессов в исследуемых системах.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и построены новые решения несвязанных и связанных несамосопряженных начально–краевых задач классической теории термоупругости для однослойных и многослойных тел в трехмерной постановке.

**Методы исследования.** Для решения поставленных линейных краевых задач используются конечные интегральные преобразования, являющиеся наиболее общей формой метода неполного разделения переменных и

позволяющие построить замкнутые решения несамосопряженных и самосопряженных начально–краевых задач. Построенные расчетные соотношения реализованы в среде Mathcad – 15 в виде программного комплекса.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в развитии теоретических основ расчета круглых однослойных и многослойных пластин конечных размеров с учетом связанности термоупругих полей. Полученные расчетные соотношения, описывающие их напряженно–деформированное состояние и температурное поле, позволяют научно обосновать и уточнить конструктивное решение проектируемых элементов конструкций различного назначения.

В работе получены следующие **новые научные результаты**:

1. Разработан алгоритм расчета, позволяющий построить новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для изотропной однородной жестко закрепленной круглой пластины;

2. Получено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для однослойных круглых пластин без учета сил инерции и при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;

3. Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для многослойных круглых пластин без учета сил инерции и при выполнении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

4. Численные результаты расчета термоупругих процессов в изотропных круглых однослойных и двухслойных жестко закрепленных пластинах, которые позволяют провести анализ связанности температурных и упругих полей.

**Теоретическая значимость работы.** Разработанная методика расчета позволяет описать и проанализировать взаимосвязь полей различной физической природы в круглых пластинах при внешнем осесимметричном нестационарном температурном воздействии. Полученные замкнутые решения дают возможность

выявить новые закономерности при анализе результатов, что существенно повышает теоретический уровень инженерных расчетов.

**Практическая значимость работы** определяется возможностью создания программного комплекса по проектированию круглых однослойных и многослойных пластин в случае действия внешней температурной нагрузки при использовании разработанных алгоритмов расчета. Полученные результаты позволяют также обосновать рациональную программу экспериментов, что значительно сократит объем дорогостоящих натурных исследований.

Разработанные алгоритмы расчета и их программная реализация нашли применение в инженерных расчетах, выполняемых проектным отделом ООО «НИПИ НГ «Петон». Результаты работы используются также в учебном процессе при подготовке магистров СамГТУ по направлению 08.04.01 «Строительство». Результаты внедрения исследования подтверждены соответствующими актами.

#### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Данное исследование соответствует основным направлениям специальности 1.1.8 «Механика деформируемого твёрдого тела»:

1. Механика композиционных и интеллектуальных материалов и конструкций.

2. Теория упругости, пластичности и ползучести.

3. Постановка и решение краевых задач для тел различной конфигурации и структуры при механических, электромагнитных, радиационных, тепловых и прочих воздействиях, в том числе применительно к объектам новой техники.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для изотропной однородной жестко закрепленной круглой пластины;

2. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для однослойных круглых жестко закрепленных пластин без учета сил инерции (граничные условия теплопроводности 1–го рода);

3. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для многослойных круглых жестко закрепленных пластин без учета сил инерции (граничные условия теплопроводности 1–го и 3–го рода);

4. Анализ численных результатов расчета термоупругих процессов в изотропных круглых жестко закрепленных пластинах.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений, математической постановки и методами решения рассматриваемых нестационарных задач термоупругости, совпадением в частных случаях представленных решений с известными результатами, соответствием экспериментальных данных, полученными автором работы, с теоретическими расчетами, а также с физической картиной исследуемых процессов.

**Связь работы с государственными программами научных исследований.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта №20–31–90042 (договор № 20–31–90042/20 от 1.09.2020).

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 76,77,78-х Международных научно–технических конференциях «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительные технологии» (Самара, 2019–2021); Международной научной конференции "Civil, Architectural and Environmental Sciences and Technologies" (Международный форум архитектурно–строительных инноваций «Города будущего») (Самара, 2019); XXIX, XXX Международных научных Российско–польско–словацких семинарах, (Самара 2020, 2021); Международной научно–практической конференции «Научные исследования XXI века: теория и практика» (Прага, 2020); IX Международной научно-практической конференции «Наука, технологии, инновации в мире глобальных трансформаций» (Ростов–на–Дону, 2021); XXVII Всероссийской научно–практической конференции «Цифровизация образования: теоретические и прикладные исследования

современной науки» (Ростов–на–Дону, 2021); Международной научно–исследовательской конференции «Наука. Технологии. Общество» (Саратов, 2021); II Международной научной конференции "SAMSTech–II–2021: Современные достижения в области материаловедения и технологий» (Красноярск, 2021).

Полностью диссертация была представлена на расширенном семинаре кафедры «СМИГОФ» СамГТУ (зав. кафедрой Шляхин Д.А., д.т.н., доцент), на семинарах кафедр «ПМиИ» (зав. кафедрой Радченко В.П., д.физ.–мат.н., профессор) и «Механика» (зав. кафедрой Клебанов Я.М., д.т.н., профессор) СамГТУ.

**Публикации.** По результатам данного исследования опубликовано 16 научных работ, из них 7 работ в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, Scopus и Web of Science.

**Личный вклад автора.** Постановка задач, построение замкнутых решений, разработка программного комплекса и анализ полученных результатов в работах [156,157,164-171] диссертантом проводилась совместно с соавторами. Работы [158-163] выполнены автором самостоятельно. Экспериментальные исследования выполнены автором диссертационной работы самостоятельно.

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы и приложений, общим объемом 128 страниц машинописи, 60 рисунков, 2 таблицы и 3 приложения. Список литературы включает 171 работу на 17 страницах.

В первой главе выполнен литературный обзор, связанный с решением краевых задач термоупругости, на основании которого сделаны выводы об актуальности диссертационной работы.

Во второй главе рассматривается несвязанная динамическая осесимметричная задача термоупругости для круглой жестко закрепленной упругой пластины постоянной толщины. На основании выполненных исследований и анализе численных результатов сформулированы практические рекомендации, позволяющие для пластин произвольной толщины определить

скорость изменения внешней температурной нагрузки, при которой в расчетах необходимо учитывать инерционные характеристики упругой системы.

В третьей главе исследуется связанная нестационарная осесимметричная задача термоупругости для однослойной круглой жестко закрепленной упругой пластины постоянной толщины без учета сил инерции. Результаты расчета позволяют определить напряженно–деформированное состояние и температурное поле в упругой конструкции с учетом связанности термоупругих полей.

В четвертой главе построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости для круглой многослойной жестко закрепленной упругой пластины постоянной толщины без учета сил инерции. Проанализировано влияние скорости изменения объема тела на температурное поле и напряженно–деформированное состояние упругой системы.

В пятой главе проведена экспериментальная проверка расчета двухслойной круглой жестко закрепленной пластины. Проведен анализ численных результатов расчета, полученных на основании разработанного алгоритма решения, с данными натуральных экспериментов.

В заключение сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Приложения 1–3 содержат акты внедрения результатов диссертационной работы, сведения о поверке, сертификат оборудования и распечатку типовой программы в системе MathCAD–15, полученной на основании построенных алгоритмов.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю, заведующему кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета, доктору технических наук Шляхину Дмитрию Аверкиевичу за всестороннее содействие и помощь при проведении исследований в рамках настоящей работы.

## 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

### 1.1 Общие сведения о теориях термоупругости

В середине XIX века были опубликованы результаты двух фундаментальных исследований, в которых были изложены основные положения и методы исследования термодинамических процессов в упругих телах. Первая работа Жан–Батиста Фурье содержала математическую формулировку теории теплопроводности [1], а вторая – Сади Карно была посвящена созданию методики решения термодинамических задач [2]. В настоящее время данное направление научных исследований получило существенное развитие в связи с разработкой новых элементов конструкций в строительстве, ракето–, самолето– и машиностроении. При их проектировании возникает проблема учета температурных деформаций и напряжений в случае нестационарного неравномерного нагрева, которые оказывают значительное влияние на прочностные характеристики упругих систем. Разработанная в последние годы термодинамика необратимых процессов позволила дать общую трактовку механических и тепловых процессов и сформулировать основные положения теории термоупругости, обобщающей теорию теплопроводности и классическую теорию упругости.

В настоящее время разработано несколько теорий термоупругости, позволяющих исследовать краевые задачи с различной степенью точности. Первые исследования температурных перемещений и напряжений в деформируемых твердых телах в линейной постановке выполнены в работах К. Дюамеля [3,4] и Ф. Неймана [5], в которых при использовании закона теплопроводности Ж.Б. Фурье [1] были заложены основы классической теории термоупругости (СТЕ–теория). Связанные соотношения этой теории включают векторное уравнение движения и уравнение теплопроводности.

В дальнейшем на основании классической теории Г. Лордом и Ю. Шульманом была сформулирована вторая теория термоупругости (LS–теория), в которой используется гиперболическое уравнение теплопроводности. В отличие

от классического закона Ж.Б. Фурье, здесь учитывается конечная скорость распространения тепла [6].

Другим известным обобщением связанной теории термоупругости является GL–теория, предложенная учеными А. Грином и А. Линдсей. В сформулированной теории вектор теплового потока в теле зависит от скорости изменения температуры и ее градиента [7].

К концу 90–х годов XX в. П. Нахди и А. Грин представили обобщенную GN–теорию термоупругости. Так предложенная теория содержит в себе свойства классической теории термоупругости (СТЕ) на основании закона теплопроводности Фурье и распределении теплового поля, имеющего волновой характер. Разработанная GN–теория представлена в трех вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении GNI–теория образует параболическое уравнение, используя закон теплопроводности Фурье. Вторая GNII–теория изучает распределение тепла как волнообразный не диссипативный процесс, который ссылается к гиперболическому уравнению теплопроводности. Последняя теория (GNIII–теория) включает в себя первую и вторую теорию в качестве предельных случаев. Таким образом, GN–теория формирует широкий спектр процессов и явлений, связанных с теплопроводностью [8,9].

В современном представлении основы механики связанных полей в рамках классической теории термоупругости изложены в работах В. Новацкого [10,11], А.Д. Коваленко [12-16], В.Г. Карнаухова [17], В.А. Крысько [18-20], а также в [21-26].

Так, в монографии В. Новацкого исследовались температурные напряжения в однородных упругих и вязкоупругих телах. Для решения задач были использованы интегральные преобразования Фурье, Ханкеля и Лапласа [10]. Развитием данного направления стала его другая работа, которая является первой работой по связанной теории термоупругости [11]. В этой книге приводятся вывод основных уравнений термоупругости, описаны методы решения этих задач, представлены ключевые энергетические и вариационные теоремы, которые были использованы в дальнейших исследованиях [27-30].

В работах А.Д. Коваленко представлены основные положения классической теории в квазистатической и динамической постановке, которые использовались при решении ряда задач о температурных напряжениях в пластинах и оболочках. Проанализированы термомеханические явления в упругих элементах, вызванные процессом их деформирования [12-16].

В монографии В.Г. Карнаухова рассмотрены теория и методы решения связанных задач динамики вязкоупругих тонкостенных конструкций с учетом взаимодействия механических и температурных полей. Изложены основные положения термомеханической теории однослойных и многослойных пластин, а также оболочек, построенных на основе классических и неклассических механических гипотезах [17].

Совместные монографии В.А. Крысько, J. Awrejcewicz и др. посвящены нелинейной динамике тонких пластин и оболочек с термочувствительным возбуждением. В их работах применяется численный подход к решению дифференциальных уравнений гиперболического и параболического типов относительно пространственных координат. Рассматриваются задачи с учетом физической и геометрической нелинейности, в которых учитывается действие стационарной и нестационарной тепловых нагрузок. Построенные решения используются исследователями, занимающимися температурными проблемами устойчивости и прочности оболочечных конструкций [18-20].

Обзоры по теоретическим основам неклассической термоупругости и теплопроводности представлены в работах [31-39].

Так в монографии ученых Д. Жоу, Х. Касас–Баскес и Дж. Лебон рассмотрена современная термодинамическая теория, выходящая за рамки неравновесных процессов классической теории. Авторы данной работы разделили современную неравновесную термодинамику на такие области, как расширенная термодинамика, гамильтонова неравновесная термодинамика, термодинамика с конечным временем и с внутренними переменными, а также на рациональную и мезоскопическую. К тому же своей работе они прояснили основные понятия, такие как энтропию, температуру, давление и химический потенциал [32].

Е.Б. Попов в своей работе первым получил в линейной аппроксимации гиперболическое уравнение связанной термоупругости, учитывающее конечную скорость распространения тепла [33].

В монографии А.Г. Шашкова, В.А. Бубнова и С.Ю. Яновского рассмотрены физические аспекты параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. В данной работе обсуждены противоречия классической теории теплопроводности и приведены подтверждения молекулярно–кинетической гипотезы о релаксации теплового потока. Анализ математических аспектов дифференциальных операторов теплопроводности позволил систематизировать и исследовать связь линейного гиперболического уравнения с параболическими нелинейными операторами теплопроводности [34].

D.S. Chandrasekharaiah в своих работах представил анализ свободных колебаний термоэлектрической (или изотермической), изотропной термоупругой полый сферы без напряжений (или жестко фиксированных) в контексте обобщенной (неклассической) теории термоупругости. Основные определяющие уравнения линейной обобщенной термоупругой изотропной полый сферы были упрощены с помощью потенциальных функций. В результате связанная система уравнений сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям по радиальной координате [35]. Для изучения проблемы изотропной обобщенной термоупругой среды с внутренним источником тепла в статье используется модель теплообмена с двухфазным запаздыванием. Сила действует вдоль границы раздела изотропной обобщенной термоупругой среды и упругого слоя. Анализ в нормальном режиме используется для получения точных выражений для компонентов перемещения, напряжения силы и распределения температуры [36].

В работе J. Ignaczak основное внимание уделяется динамическим и гиперболическим уравнениям термоупругости, полученных при использовании двух ведущих теорий: LS–теории Лорда и Шульмана [6] (с одним временем релаксации) и GL–теории Грина и Линдсей [7] (с двумя временами релаксации). Сложность теорий обусловлена тем, что полученные расчетные соотношения, учитывающие взаимодействие механических и температурных полей, являются

дифференциальными линейными уравнениями в частных производных. В монографии рассматриваются математические аспекты теорий – теоремы существования и единственности, теоремы об области влияния, вариационные принципы, а также методы решения краевых задач [37].

Статьи Н.Н. Sherief посвящены исследованию задач термоупругости для бесконечно длинного цилиндра. Им была рассмотрена проблема теплопроводности термоэластичной цилиндрической среды, состоящей из двух различных материалов. Для решения использовалось преобразование Лапласа [38,39].

## **1.2 Метод конечных элементов при решении задач теории термоупругости**

При исследовании краевых задач термоупругости используются различные математические методы расчета: аналитические, вариационные и численные [40-48]. В результате растущих возможностей современной вычислительной техники в последние годы широко используются численные методы: метод конечных элементов (МКЭ), методы конечных разностей (МКР) и метод коллокаций.

МКЭ является наиболее универсальным численным методом решения краевых задач термоупругости, позволяющим моделировать нестационарный процесс теплообмена в упругих системах. К основным работам, посвященным применению метода конечных элементов в задачах теплопроводности, можно отнести работы Р. Галлагера [49], О. Зенкевича [50,51], А.В. Румянцева [52].

В работе Р. Галлагера освещаются практически все основные аспекты метода конечных элементов. При этом основное внимание уделяется использованию МКЭ при решении задач теории термоупругости и теплопроводности [49].

В монографиях О. Зенкевича рассматриваются основные понятия метода конечных элементов и их применимость к решению задач по теории упругости и теплопроводности, теории пластин и оболочек и теории потенциала [50,51].

В работах А. В. Румянцева рассмотрены основные положения метода

конечных элементов в постановке метода взвешенных невязок, так называемого метода Галеркина. Данный метод применим к стационарным и динамическим задачам теплопроводности при условии сложного теплообмена, а также при наличии внешних и внутренних теплоисточников с учетом зависимости теплофизических параметров от температуры [52].

Следует также заметить, что в настоящее время имеется большое количество работ, посвященных методу конечных элементов в задачах теплопроводности. Отметим некоторые из них [53-58].

В работе Н.А. Брыкова, для исследования распределения температурного поля в многослойных пластинах с внутренними источниками тепла, предложено численное решение задач нелинейной теплопроводности. Конечная модель учитывает температурную зависимость теплопроводности и моделирует излучение на границе пластины [53].

В статье М.В. Галанина и др. изучено трехмерное нестационарное уравнение теплопроводности с наличием конвективных членов и фазовых переходов. Представлен метод конечных элементов для решения задач теплопроводности и исследованы две схемы с дискретным временем. Для рассмотрения фазового перехода используется модель со сглаженными теплофизическими свойствами [54] .

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова и Г.В. Заслужной в общей статье рассматривают некоторые варианты численной реализации интерлинационного метода конечных элементов для решения задачи нестационарной теплопроводности прямоугольных пластин. Ими были также проанализированы результаты, полученные данным методом и классическим МКЭ. Так в данной работе показано, что в отличие от классического метода конечных элементов, интерлинационный метод дает возможность свести нестационарную задачу теплопроводности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений меньшего порядка [55].

В работе ученого P.N. Verga представлена процедура функционального решения конечных элементов с использованием вариационного исчисления. Для их моделирования были приняты граничные условия температурного поля.

Регрессионный метод был использован для установления ошибки, связанной с результатами МКЭ, и для создания простой модели прогнозирования температуры окружающей среды [56].

W. Visser сформулировал принцип для линейных задач термоупругости, аналогичный принципу минимальной потенциальной энергии. На основе этого вариационного принципа распределение температуры получено с помощью метода конечных элементов, а определение тепловых деформаций следует как естественное продолжение этих вычислений [57].

В статье O.C. Zienkiewicz и Y.K. Cheung континуальная задача решается путем минимизации функционала, сформулированного с помощью процедуры конечных элементов с использованием треугольных элементов и допущения полинома линейной аппроксимации. Разработанный метод конечных элементов рекомендуется применять в задачах механики твердого тела и при оценке распределения температуры в задачах теплопроводности. Для облегчения анализа и легкого прогнозирования была успешно разработана и оптимизирована унифицированная вычислительная модель, смоделированная с помощью градиентного поиска [58].

Обзоры по применению МКЭ в задачах термоупругости и теплопроводности представлены также в работах [59-67].

Основное преимущество данного метода состоит в его универсальности, то есть в возможности решать практически любые краевые задачи, к тому же с помощью данного метода возможен расчёт различных областей сложной геометрической формы. Однако сложение "элементных" решений по конкретному правилу не решает эту задачу для всего объекта, т.е. невозможно учесть все характеристики температурного распределения и дать анализ о влиянии разных факторов на температурное поле рассматриваемого объекта. Это и является одним из основных недостатков применения данного метода для решения задач теплопроводности. Еще одним недостатком является то, что данный метод предназначен для решения, главным образом, стационарных задач, а решение нестационарных задач термоупругости с помощью МКЭ представляет собой

отдельную математическую сложность.

Также учитывая то, что МКЭ представляет собой деление всей системы на отдельные элементы, можно сказать, что это лишь приближенный метод расчета, так как доказано, что при чрезмерном измельчении конечно–элементной сети, точность расчета увеличивается, однако это приводит к значительным ошибкам в самом вычислении. Степень дискретизации во многом зависит от типа конечного элемента, а точнее от распределения температуры в конечном элементе. Применение этого закона распределения обозначает то, что в случае, когда температурное поле сильно отличается от линейного поля, ошибка в расчетах будет очень большой. Поэтому решение нестационарных задач с помощью МКЭ представляет собой отдельную математическую проблему. Кроме того, данный численный подход не в состоянии точно описать связанность термомеханических полей (данный эффект достаточно слабый).

### **1.3 Аналитический метод решения несвязанных задач термоупругости**

Для решения связанных задач термоупругости необходимо использовать методы, которые в рамках используемой теории позволяют получить замкнутые решения. При этом сложность построения аналитических решений заключается в исследовании несамосопряженной дифференциальной системы связанных уравнений теплопроводности и движения. Для преодоления данных трудностей используются различные упрощения: рассматривается только задача теплопроводности, когда деформация упругой системы в расчете не учитывается, либо рассматриваются несвязанные краевые задачи при анализе работ конструкций с вырожденной геометрией. В рамках данных допущений выполнено достаточно большое количество работ [68-95].

Е.Ф. Афанасьев рассмотрел решение краевых задач для уравнения теплопроводности в полуплоскости с одной или двумя точками разрыва в граничных условиях. Решения данной задачи представляются в виде потенциала для слоя. Полученные результаты используются при рассмотрении вопросов теплопроводности, диффузии и нестационарной фильтрации [68].

В совместной статье С.А. Варданян и С.О. Саркисян рассматривали краевую задачу температурных напряжений в постановке несимметричной, моментной и микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в трехмерной тонкой области пластинки. Для ее решения ими используется асимптотический метод, позволяющий учесть сингулярное возмущение с малым параметром, который характеризует тонкостенность пластинки. В работе показывается, что асимптотика краевой задачи существенным образом связана со значениями безразмерных упругих констант материала пластинки [69].

М.Г. Олененко и И.Г. Величко рассматривают в своей работе двумерную проблему стационарного распределения тепла в анизотропной пластине, которая состоит из любого конечного числа спаянных параллельных стержней. Температура или тепловой поток устанавливается на одной плоскости, а нулевая температура поддерживается на другой. Решение представлено в форме интегралов Фурье. Для двухслойной пластины изучалось влияние коэффициента анизотропии на температурное поле [70,71].

Е.Ю. Витохин рассматривал распространение термоупругих волн, вызванных действием импульсного лазера. Сравнивались решения задачи термоупругости Лорда–Шульмана и классической термоупругости. Было обнаружено, что самая существенная количественная разница наблюдается в задаче с постоянной температурой на закрепленных границах, однако в задаче со свободными границами и отсутствием тепла она наименьшая. В случае задачи Лорда–Шульмана проводится асимптотический анализ дисперсных соотношений, который позволяет получить приближительную формулу дисперсионных соотношений [72].

А.С. Гольцев в работах рассмотрел задачу термоупругости для ортотропных сферических оболочек, нагреваемых внешним источником тепла в виде линии. Им было исследовано влияние условий теплообмена на поведение внутренних силовых факторов для локально нагретых элементов тонкостенных оболочечных конструкций, находящихся в условиях произвольного теплообмена [73-75].

В своей работе А.И. Жорник, В.А. Жорник и П.А. Савочка рассматривали динамическую задачу термоупругости относительно длинного цилиндра, нагретого до постоянной температуры и резко охлажденного в среде постоянной температуры. Утверждается, что если между цилиндрической поверхностью и средой происходит очень интенсивный теплообмен, когда температура на цилиндрической поверхности мгновенно достигает температуры охлаждающей среды, то в данном случае динамический эффект можно будет проигнорировать, а сама задача будет рассматриваться квазистатической [76].

В.С. Зарубин изложил методы расчета температурных полей в конструкциях энергетических установок и теплонапряженных узлов различных машин и агрегатов. Основное внимание он уделил приближенным методам, которые опираются на вариационную формулировку нелинейных задач теплопроводности и позволяют оценить точность полученного решения [77].

Э.М. Карташов в своей работе [78] исследует термомеханическую реакцию твердых тел на нагрев от внешних и внутренних источников тепла, а в монографии [79] им были рассмотрены новые задачи термоупругости, относящиеся к области с движущимися во времени границами.

В.А. Кудинов изучал построение аналитических приближенных решений линейных и нелинейных задач термоупругости для однослойных и многослойных конструкций. Решения краевых задач нестационарной теплопроводности рассматривается аналитическим методом в областях с подвижными границами, где предлагаются новые интегральные соотношения для решения гиперболических моделей переноса, и изучается проблема теплового удара и динамическая термоупругость [80-82].

В своей работе Ю.А. Кузнецова рассмотрела квазистатическую математическую модель термоупругости для неоднородных конечных тел. В результате анализа полученных результатов выяснилось, что неоднородность материала цилиндра иногда значительно влияет на изменение температуры в цилиндре [83].

В.Я. Лотарев исследовал несвязанную задачу термоупругости, в которой

рассматривается температурное поле конечного сплошного цилиндра, имеющего начальное распределение температуры. В зависимости от характера распределения тепла, условия для теплового взаимодействия цилиндра с окружающей средой устанавливаются в разных формах. Итоговое решение этой проблемы достигается путем суммирования напряжений, соответствующих термоупругому потенциалу перемещений и напряжений, найденных с помощью функций Лява [84].

Также аналитический способ решения термоупругих задач рассмотрела И.С. Макарова. В своей работе она исследовала напряжённо–деформированное состояние произвольного равномерного изотропного тела, которое имеет ограничение в виде кусочно–гладкой поверхности [85].

Я.С. Подстригач в своих работах обобщил динамическую теорию термомеханики для анизотропных и изотропных тел [86,88-90].

Работа Ю.М. Коляно и Я.С. Подстригача посвящена развитию аналитических методов расчета температурных полей и напряжений в пластинках и оболочках [87].

В работах С.О. Саркисяна построены классические математические модели термоупругости изотропных и трансверсально–изотропных тонких оболочек без учёта и с учётом поперечных сдвиговых деформаций, доказаны общие энергетические теоремы и построены соответствующие общие вариационные функционалы [91,92].

А.А. Трещев и др. разработали математическую модель для расчета изгиба тонкой прямоугольной многослойной пластины, а также проанализировали влияние температуры на механические свойства материала и его напряженное состояние в зависимости от толщины конструкции [93,94].

В работе А. Vattre рассматривается многослойная прямоугольная пластина в случае действия на нее равномерно распределенной гармонической температурной нагрузки. Решение в данной работе получено при использовании разложений функций в ряд Фурье [95].

Работы, посвященные аналитическому расчету термоупругих несвязанных

полей, представлены также и в других статьях и монографиях. Так исследования [96-106] связаны с расчетом тонких строительных конструкций в виде пластин и оболочек, а работы [107-112] представляют собой решение обобщенных задач термоупругости.

#### **1.4 Аналитический метод решения связанных задач термоупругости**

Начально–краевые задачи становятся существенно более сложными при исследовании связанных термоупругих полей в элементах конструкций, что объясняется формированием системы несамосопряженных дифференциальных уравнений. Первые исследования с учетом данных особенностей были выполнены в 50–60-х годах предыдущего столетия учеными Р. Chadwick [113], В.А. Voley, J.H. Weiner [114].

В работе Р. Chadwick рассмотрено распространение и устойчивость гармонически зависящих от времени плоских термоупругих волн заданной частоты в обобщенной теории термоупругости Грина и Линдсея. Полученные результаты соответствуют теории Лорда и Шульмана при введении допущений о конститутивных коэффициентах [113].

В.А. Voley, J.H. Weiner изучали температурные напряжения, создаваемые большими градиентами температуры, которые во многом определяют свойства большинства современных конструкций. Исходя из законов термодинамики, первая часть книги представляет собой разнообразные постановки и методы решения задач термоупругости, а во второй части дана формулировка граничных условий и теории теплообмена. Последняя третья часть включает в себя практические аспекты классической теории термоупругости [114].

В развитие данного направления также можно отметить следующие работы, посвященные расчету пластин, цилиндров и оболочек [115-146].

С использованием известных законов распределения компонент вектора перемещений и температурной нагрузки по толщине, а также с учетом сдвиговых поперечных деформаций и нелинейного распределения теплового потока, получены решения связанных задач термоупругого деформирования слоистых

композитных пластин и оболочек в работах [115,117,118].

С.Б. Бойко разработал метод расчета стационарных тепловых, периодических в пространственных координатах, полей в многослойных пластинах. Закон распределения температуры на верхней плоскости пластины описывается чётной периодической функцией, а на другой ее границе температура равна нулю. Для случая известной температуры на верхней и нижней плоскости пластины, заданной периодической функцией с тем же периодом, решение обобщается [116].

А.В. Ефремов в своей работе предложил новый подход по решению задач теплопроводности для плит и цилиндров. Рассматриваемые им тела являются пористыми и нагреваются от внутренних источников тепла. В данной работе, учитывая неидеальный тепловой контакт между слоями и значение давления в порах, представлена постановка и сформулировано решение задач теплопроводности и термоупругости [119].

А.Г. Жигалин получил замкнутое решение связанной линейной термоупругой задачи для конечного цилиндра и сферы. Здесь решение строится в расширенном виде в системе собственных функций дифференциального оператора, где выделяются классы граничных условий и симметрии. Этот подход позволяет также при определенных размерах исследуемого объекта проанализировать влияние связанности и распределение во времени температурных и механических полей [120].

П.В. Жуков в своей статье описывает тепловое и термонапряженное состояния тела, используя уравнение теплопроводности и учитывая импульсную подачу энергии. В результате этого исследования было дано решение уравнения теплопроводности, из которого можно найти термоупругие перемещения и напряжения. Данное решение также дает возможность определять сначала температурное поле и термические напряжения при импульсном нагреве [121].

Н.Н. Каркусты рассмотрел бесконечную термическую изотропную однородную полосу конечной ширины и, при решении связанной задачи, получил выражения для компонент вектора смещений и для тензора напряжений [122].

В.Н. Кобзарь и В.А. Фильштинский предложили новый подход к решению двумерной граничной связанной задачи термоупругости с учетом конечной скорости распространения теплового импульса. В рамках данной задачи была проведена оценка связности термомеханических полей и дано сравнение гиперболической и параболической моделей теплопроводности. Результаты показывают, что даже при небольшой продолжительности рассматриваемого процесса, учет влияния конечной скорости распространения тепла незначителен [123].

В исследованиях В.А. Ковалева, Ю.Н. Радаева и др. для анализа частотного уравнения и гармонических волн в бесконечном цилиндре использовалась гиперболическая теория термоупругости (ГНП–теория). Постановка и решение связанной задачи термоупругости проводится в рамках обобщенной теории с учетом конвективного теплообмена между свободной боковой стенкой волновода и окружающей средой [124-126]. В работе [126] ими были определены выражения для перемещений и температуры для волновода с тепло проникающей стенкой.

В работах С.А. Лычева при исследовании конечного изотропного цилиндра было сформулировано замкнутое решение связанной динамической задачи термоупругости. Построение общего решения дается по биортогональной системе, представленной с помощью спектральных разложений собственных функций несамосопряженного пучка дифференциальных операторов. В другой его работе решение было получено в виде разложения, которое представляет собой систему собственных дифференциальных функций операторов. Выделяется класс граничных условий, при которых решение термоупругой задачи объекта канонической формы может быть найдено без использования численных методов. Полученные результаты применяются при решении задач, в которых наблюдается влияние на распределение во времени связанности температурных и механических полей в соответствии с размерами рассматриваемого объекта [127-129].

Работа О.В. Мкртычева, Д.С. Сидорова и М.А. Рубцова рассматривает связанную задачу термоупругости для прямоугольной пластины, которая решена

аналитическим и численным методом. В результате решения данной задачи, при взаимном действии силовой и температурной нагрузки на пластину, были сформулированы выражения для определения деформаций, прогибов и внутренних усилий [131].

В статье Ю.Н. Радаева в контексте недиссипативной теории линейной термоупругости Грина–Нахди (гиперболическая термоупругость), где деформация рассматривается как нерассеивающий волновой процесс, с использованием гиперболических уравнений движения и теплопроводности, анализируются гармонические волны вдоль оси свободного цилиндрического волновода. Зависимость волнового числа от частоты определяется численно [132].

Р.А Ревинский в своей работе провел исследование по распространению гармонических волн в неограниченной среде для случаев GNI, II, III–термоупругих сред. Было дано подробное исследование связанных плоских гармонических термоупругих волн, описываемых линейными уравнениями GNI–теории. Применение связанных гиперболических уравнений движений в сочетании с теплопроводностью дает возможность анализировать распространение гармонических волн [133].

Используя метод разложения в ряд по ортогональным функциям, Л.И. Фридман построил решение нестационарной термоупругой задачи для конечного изотропного цилиндра [134].

Ю.Э. Сеницкий, применив метод обобщенного конечного интегрального преобразования и классическую теорию термоупругости (СТЕ), с учетом известной плотности теплового потока на поверхности элемента, построил замкнутое решение для бесконечного цилиндра и сферы (граничные условия 2–го рода) [135-140]. Аналогичное решение для бесконечного цилиндра при удовлетворении граничных условий 1–го рода получено в работе [141].

J.W. Fu исследует связанную задачу термоупругости для многослойного полого цилиндра при тепловых и механических нагрузках. Используя метод преобразования Лапласа, данная задача теоретически решается введением новой функции потенциала смещения [142].

V.P. Merzlyakov решает задачу теплопроводности для цилиндра конечной длины при удовлетворении смешанных граничных условий. Конвективная теплопередача происходит на внутренней поверхности цилиндра, а наружная поверхность термоизолирована [143].

Y.L. Zong рассматривает проблему связанной термоупругости для многослойных сфер. Общие решения уравнений получены при использовании преобразования Лапласа и матричного преобразования подобия [146].

Работы [147-154] были также посвящены исследованию связанных термоупругих полей для многослойных строительных конструкций.

Таким образом, на основании анализа литературы можно сделать вывод, что решению задач термодинамики было посвящено очень большое количество работ. За все время было разработано очень много методов и путей решения задач по термодинамике. Проблемы влияния температуры на конструкцию, определение физических и механических свойств тел рассматривали и изучали многие известные ученые. Благодаря выполненным работам стали известны различные способы получения точных и приближенных аналитических решений.

Следует отметить, что расчету задач теплопроводности и термоупругости для тел конечной жесткости посвящено довольно малое количество работ [120,127,128,134,144,145,155]. Это связано с тем, что в настоящее время не разработана общая теория расчета тел конечных размеров в пространственной постановке на нестационарное температурное воздействие. Исходя из этого, представленная работа в какой-то степени восполняет данный пробел.

В выполненном исследовании предложен новый теоретический подход по решению проблемы расчета круглых сплошных жестко закрепленных упругих однослойных и многослойных пластин с учетом связанности термоупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки. Основные результаты фундаментальных исследований опубликованы автором в работах [156-171].

## 2 НЕСВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

В общем случае осесимметричные дифференциальные уравнения движения и теплового баланса на основании классического закона теплопроводности Фурье в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  имеют вид [14,120]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ T_0 \frac{\partial s}{\partial t_*} &= \Lambda \left( \nabla \frac{\partial \Theta^*}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial z_*^2} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения осесимметричного состояния изотропной среды записываются следующим образом [12-16]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) - \gamma \Theta^*, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{U^*}{r_*} + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) - \gamma \Theta^*, \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) - \gamma \Theta^*, \quad \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

а объемная плотность энтропии  $s(r_*, z_*, t_*)$  при разложении слагаемого, учитывающего температурное поле, в ряд, с учетом условия  $\frac{\Theta^*}{T} = 1$  ( $\Theta^* = T - T_0$ ,  $\Theta^*$ ,  $T$ ,  $T_0$  — соответственно приращение и текущая температура, а также первоначальная температура недеформированного упругого тела), определяется

равенством:

$$s = \gamma \left( \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) + c_\varepsilon \frac{\Theta^*}{T_0}. \quad (2.3)$$

В соотношениях (2.1) – (2.3)  $\sigma_{jk}(r_*, z_*, t_*)$ ,  $U^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $W^*(r_*, z_*, t_*)$  – компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в размерной форме ( $j, k = r, \theta, z$ );  $t_*$  – время;  $E, \nu, \rho$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность изотропного материала;  $\alpha_t, c_\varepsilon, \Lambda$  – коэффициенты линейного теплового расширения, объемной теплоемкости и теплопроводности материала;

$$\gamma = \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha_t.$$

Соотношения (2.1) с учетом (2.2), (2.3), позволяют сформировать следующую систему связанных дифференциальных уравнений динамической задачи теории термоупругости относительно компонент вектора перемещений и приращения температуры в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_*^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_*^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z_*^2} - a_3 \frac{\partial \Theta}{\partial t} - a_4 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{где } \{U, W, r, z, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*\} / b, \quad \Theta = a_6 \Theta^*, \quad t = \frac{a_5}{b} t_*, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$$a_1 = a_2(1-2\nu), a_2 = 0.5(1-\nu)^{-1}, a_3 = \frac{c_\varepsilon b}{\Lambda} a_5, a_4 = \frac{b T_0}{\Lambda} \frac{\gamma^2}{\rho a_5}, a_5 = \left[ \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \right]^{0.5},$$

$$a_6 = \frac{\gamma}{a_5^2 \rho}.$$

Следует отметить, что построение замкнутого решения задач термоупругости связано со сложной проблемой интегрирования дифференциальных уравнений (2.4). При этом здесь не могут быть использованы обычные процедуры конечных интегральных преобразований из-за несамосопряженности получаемого при этом дифференциального оператора.

## 2.1 Постановка задачи

Пусть жестко закрепленная сплошная круглая пластина занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ . На ее лицевых поверхностях задана функция изменения температуры, зависящая от радиальной координаты  $r_*$  и времени  $t_*$ : при  $z = 0 - \omega_1^*(r_*, t_*)$ , при  $z = h^* - \omega_2^*(r_*, t_*)$  (рисунок 2.1).

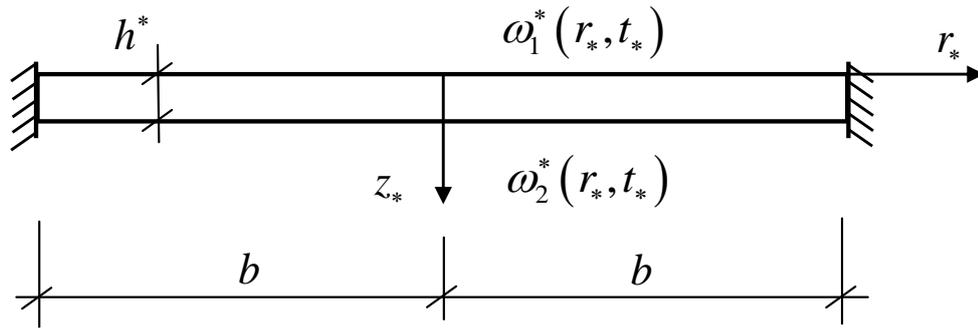


Рисунок 2.1 – Расчетная схема пластины

Начально–краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$r = 1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r}|_{r=1} = 0, \quad (2.5)$$

$$r = 0 \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad \Theta(0, z, t) < \infty; \quad (2.6)$$

$$z = 0, h \quad a_7 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \{\omega_1, \omega_2\} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$\Theta(r, 0, t) = \omega_1, \quad \Theta(r, h, t) = \omega_2;$$

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad \Theta(r, z, 0) = \Theta_0(r, z), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z),$$

где  $\{\omega_1, \omega_2\} = a_6 \{\omega_1^* - T_0, \omega_2^* - T_0\}$ ,  $a_7 = \nu(1-\nu)^{-1}$ ,  $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$  – известные в начальный момент перемещения и их скорости,  $\Theta_0$  – известное в начальный момент времени температурное поле (при  $z = 0$   $\Theta_0 = \omega_1(r, 0)$ , при  $z = h$   $\Theta_0 = \omega_2(r, 0)$ ).

Закрепления пластины и теплоизоляция ее цилиндрической поверхности определяется условиями (2.5). Неравенства (2.6) учитывают регулярность решения в центре пластины, а первые два условия (2.7) – отсутствие напряжений на ее лицевых поверхностях.

Проблема интегрирования несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (2.4) и удовлетворение начально–краевых условий (2.5) – (2.8) приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

В случае действия температурной нагрузки  $\omega_1(r, t)$ ,  $\omega_2(r, t)$  на первом этапе решается уравнение теплопроводности с соответствующими краевыми условиями:

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0; \quad (2.9)$$

$$r = 0, 1 \quad \Theta(0, z, t) < \infty, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0; \quad (2.10)$$

$$z = 0, h \quad \Theta(r, 0, t) = \omega_1, \quad \Theta(r, h, t) = \omega_2; \quad (2.11)$$

$$t = 0 \quad \Theta(r, z, 0) = \Theta_0(r, z). \quad (2.12)$$

На следующем этапе рассматривается задача теории термоупругости относительно компонент вектора перемещений  $U, W$  с учетом заданной функцией температуры  $\Theta$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (2.13)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_*^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

$$r=0,1 \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad (2.14)$$

$$U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0;$$

$$z=0, h \quad a_7 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad (2.15)$$

$$t=0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z).$$

## 2.2 Решение задачи теплопроводности

Для решения краевой задачи (2.9) – (2.12) первоначально применяется конечное интегральное преобразование Ханкеля [23,25]:

$$R_H(n, z, t) = \int_0^1 \Theta(r, z, t) r J_0(j_n r) dr, \quad (2.17)$$

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R_H(n, z, t) J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2}, \quad (2.18)$$

где  $j_n$  – положительные нули функции  $J_1(j_n)$  ( $n=0, j_0=0$ ),

$J_0(\dots), J_1(\dots)$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка.

В результате получается новая задача относительно трансформанты  $R_H$ :

$$-j_n^2 R_H + \frac{\partial^2 R_H}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial R_H}{\partial t} = 0; \quad (2.19)$$

$$z=0, h \quad R_H(n, 0, t) = p_{1H}(n, t), \quad R_H(n, h, t) = p_{2H}(n, t); \quad (2.20)$$

$$t = 0 \quad R_H(n, z, 0) = R_{0H}(n, z); \quad (2.21)$$

$$\text{Здесь } \{p_{1H}, p_{2H}, R_{0H}\} = \int_0^1 \{\omega_1, \omega_2, \Theta_0\} r J_0(j_n r) dr.$$

Для приведения граничных условий (2.20) к однородным, используется новая функция  $T_H(n, z, t)$ , связанная с трансформантой  $R_H(n, z, t)$  с помощью следующего разложения:

$$R_H(n, z, t) = f_1(z)p_{1H}(n, t) + f_2(z)p_{2H}(n, t) + T_H(n, z, t), \quad (2.22)$$

где  $f_1(z), f_2(z)$  – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (2.22) в (2.19) – (2.21) при введении дополнительных ограничений на  $f_1(z), f_2(z)$ :

$$f_1(0) = f_2(h) = 1, \quad f_1(h) = f_2(0) = 0, \quad (2.23)$$

приводит к краевой задаче для функции  $T_H$  с однородными граничными условиями:

$$-j_n^2 T_H + \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial T_H}{\partial t} = F_H; \quad (2.24)$$

$$z = 0, h \quad T_H(n, 0, t) = 0, \quad T_H(r, h, t) = 0; \quad (2.25)$$

$$t = 0 \quad T_H(n, z, 0) = T_{0H}(n, z), \quad (2.26)$$

$$\text{где } F_H = \left( j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial t} \right) [f_1(z)p_{1H}(n, t) + f_2(z)p_{2H}(n, t)],$$

$$T_{0H} = R_{0H}(n, z) - f_1(z)p_{1H}(n, 0) - f_2(z)p_{2H}(n, 0).$$

Применяя к (2.24) – (2.26) конечные  $\sin$ -преобразования Фурье по переменной  $z$  [23,25]:

$$L_H(n, m, t) = \int_0^h T_H(n, z, t) \sin(\lambda_m z) dz, \quad (2.27)$$

$$T_H(n, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z), \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{h}, \quad (2.28)$$

получаем следующую задачу относительно трансформанты  $L_H$

$$\frac{dL_H}{dt} + b_1 L_H = -B_H, \quad (2.29)$$

$$t = 0 \quad L_H(n, m, 0) = L_{0H}(n, m), \quad (2.30)$$

решение которой имеет вид:

$$L_H = L_{0H} \exp(-b_1 t) + \int_0^t B_H(\tau) \exp b_1(\tau - t) d\tau, \quad (2.31)$$

где  $b_1 = a_3^{-1}(\lambda_m^2 + j_n^2)$ ,  $L_{0H} = \int_0^h T_{0H} \sin(\lambda_m z) dz$ ,  $B_H = -a_3^{-1} \int_0^h F_H \sin(\lambda_m z) dz$ .

Применяя к трансформанте (2.31) последовательно формулы обращения (2.28), (2.18), с учетом (2.22), получаем общее выражение для функции  $\Theta(r, z, t)$ :

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ f_1(z) p_{1H} + f_2(z) p_{2H} + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z) \right]. \quad (2.32)$$

На заключительном этапе определяются функции  $f_1(z), f_2(z)$  при решении следующих уравнений:

$$\frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} - j_n^2 f_k(z) = 0, \quad (k = 1, 2), \quad (2.33)$$

что позволяет существенно упростить функцию  $F_H$ .

В результате, с учетом граничных условий (2.23), имеем:

$$f_1(z) = \frac{\text{sh}[j_n(h-z)]}{\text{sh}(j_n h)}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sh}(j_n z)}{\text{sh}(j_n h)}.$$

Полученная зависимость распределения температурного поля в пластине в виде замкнутого решения (2.32) позволяет перейти к решению задачи термоупругости.

### 2.3 Решение задача термоупругости

Краевая задача (2.13) – (2.16) решается с помощью метода конечных интегральных преобразований Ханкеля [23,25] и обобщенного интегрального преобразования (КИП) [135–140].

Алгоритм преобразований позволяет удовлетворить только смешанные однородные граничные условия. Для этого последнее равенство (2.14) заменяется условием наличия касательных напряжений  $P_1(z, t)$  на цилиндрической поверхности пластины:

$$\sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = P_1, \quad (2.34)$$

и вводится новая функция  $w(r, z, t)$ , связанная с  $W(r, z, t)$  соотношением:

$$W(r, z, t) = a_8 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + w(r, z, t), \quad (2.35)$$

где  $P_1(z, t), W_1(t)$  – функции, определяемые в процессе решения задачи, позволяющие удовлетворить условие  $W(1, z, t) = 0$ ,  $a_8 = (1 + \nu)E^{-1}$ .

Подстановка (2.35) в (2.13) – (2.16), (2.34) позволяет преобразовать задачу. При этом дифференциальные уравнения (2.13), первое граничное условие (2.15) становятся неоднородными с правыми частями  $F_1, F_2, B_1$ , а начальные условия (2.7)  $W_0, \dot{W}_0$  следует заменить на  $V_1, V_2$ :

$$F_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial r} - 2a_2 a_8 r \frac{\partial P_1}{\partial z}, \quad F_2 = \frac{\partial \Theta}{\partial z} - a_8 \left( 4a_1 + r^2 \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P_1 + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2},$$

$$B_1 = \{\omega_1, \omega_2\} - a_8 r^2 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=0,h}, \quad V_1 = W_0(r, z) - a_8 r^2 P_1(z, 0) + W_1(0),$$

$$V_2 = W_0(r, z) - a_8 r^2 P_1(z, 0) + W_1(t),$$

при этом граничные условия на цилиндрической поверхности принимают вид:

$$r = 1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (2.36)$$

Здесь на основании парности касательных напряжений принимается  $P_1|_{z=0,h} = 0$ .

В результате применения к краевой задаче относительно  $U, w$  преобразования Ханкеля [23]:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad w_H(n, z, t) = \int_0^1 w(r, z, t) r J_0(j_n r) dr, \quad (2.37)$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad (2.38)$$

получаем краевую задачу в области изображений:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = F_{1H}, \quad (2.39)$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = F_{2H};$$

$$z = 0, h \quad a_7 j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0; \quad (2.40)$$

$$t = 0 \quad u_H(n, z, 0) = u_{0H}(n, z), \quad \dot{u}_H(n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(n, z), \quad (2.41)$$

$$w_H(n, z, 0) = w_{0H}(n, z), \quad \dot{w}_H(n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(n, z),$$

где  $j_n$  – положительные нули функции  $J_1(j_n) (n = \overline{0, \infty}; j_0 = 0)$ ,

$$\{F_{1H}, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{F_1, U_0, \dot{U}_0\} r J_1(j_n r) dr,$$

$$\{F_{2H}, B_{1H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{F_2, B_1, V_1, V_2\} r J_0(j_n r) dr.$$

Введение новых функций  $U_H, W_H, u_H, w_H$ , связанных с  $u_H, w_H$  соотношениями:

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (2.42)$$

позволяет привести граничные условия (2.40) к однородным.

Здесь  $H_1(n, z, t) = f_3(z)B_{1H}(n, 0, t) + f_4(z)B_{1H}(n, h, t)$ ,  $H_2(n, z, t) = f_5(z)B_{1H}(n, 0, t) + f_6(z)B_{1H}(n, h, t)$ ,  $f_3(z) \dots f_6(z)$  – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (2.42) в (2.39) – (2.41) при введении дополнительных ограничений на функции  $H_1(n, z, t), H_2(n, z, t)$ :

$$\left[ B_{1H} - a_7 j_n H_1 - \frac{\partial H_2}{\partial z} \right]_{z=0, h} = 0, \quad \left[ \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 \right]_{z=0, h} = 0, \quad (2.43)$$

приводит к краевой задаче для функций  $U_H, W_H$ :

$$-j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 U_H}{\partial t^2} = F_{1H}^*, \quad (2.44)$$

$$-a_1 j_n^2 W_H + \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 W_H}{\partial t^2} = F_{2H}^*;$$

$$z = 0, h \quad a_7 j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0; \quad (2.45)$$

$$t = 0 \quad U_H(n, z, 0) = U_{0H}(n, z), \dot{U}_H(n, z, 0) = \dot{U}_{0H}(n, z), \quad (2.46)$$

$$W_H(n, z, 0) = W_{0H}(n, z), \dot{W}_H(n, z, 0) = \dot{W}_{0H}(n, z),$$

$$\text{где} \quad F_{1H}^* = F_{1H} + \left( j_n^2 - a_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_1 + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z},$$

$$F_{2H}^* = F_{2H} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + \left( a_1 j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_2,$$

$$U_{0H}(n, z) = u_{0H}(n, z) - H_1(n, z, 0), \quad \dot{U}_{0H}(n, z) = \dot{u}_{0H}(n, z) - H_1(n, z, 0),$$

$$W_{0H}(n, z) = w_{0H}(n, z) - H_2(n, z, 0), \quad \dot{W}_{0H}(n, z) = \dot{w}_{0H}(n, z) - H_2(n, z, 0).$$

Начально–краевая задача (2.44) – (2.46) решается обобщенным методом КИП [135–140] с неизвестными компонентами вектор–функции ядра преобразований  $K_1(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_2(\lambda_{in}, z)$ :

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h [U_H(n, z, t)K_1(\lambda_{in}, z) + W_H(n, z, t)K_2(\lambda_{in}, z)] dz, \quad (2.47)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z)\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (2.48)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h [K_1^2(\lambda_{in}, z) + K_2^2(\lambda_{in}, z)] dz,$$

где  $\lambda_{in}$  – положительные параметры, образующие счетное множество ( $i = \overline{1, \infty}$ ).

Согласно алгоритму метода КИП [135–140] первое уравнение (2.44) и начальные условия (2.46) для  $U_H(n, z, t)$  умножаются на  $K_1(\lambda_{in}, z)$ , второе уравнение (2.44) и оставшиеся начальные условия (2.46) на  $K_2(\lambda_{in}, z)$ . Далее выполняется интегрирование по высоте пластины в интервале  $[0, h]$  и складываются полученные уравнения, а также начальные условия:

$$\Phi(U_H, W_H, K_{1in}, K_{2in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2) dz - \frac{d^2 G(\lambda_{in}, n, t)}{dt^2} = F(\lambda_{in}, n, t) \quad (2.49)$$

$$t = 0 \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_0(\lambda_{in}, n), \quad \dot{G}(\lambda_{in}, n, t) \Big|_{t=0} = \dot{G}_0(\lambda_{in}, n). \quad (2.50)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi(U_H, W_H, K_{1in}, K_{2in}) \Big|_0^h &= a_1 \frac{\partial U_H}{\partial z} K_{1in} - U_H \left( a_1 \frac{dK_{1in}}{dz} - a_2 j_n K_{2in} \right) + \\ &+ \frac{\partial W_H}{\partial z} K_{2in} - W_H \left( a_2 j_n K_{1in} + \frac{dK_{2in}}{dz} \right), \quad L_1 = -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz}, \\ L_2 &= a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_1 j_n^2 K_{2in} + \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2}, \quad F(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (F_{1H}^* K_{1in} + F_{2H}^* K_{2in}) dz, \\ \{G_0(\lambda_{in}, n), \dot{G}_0(\lambda_{in}, n)\} &= \int_0^h [\{U_{0H}, \dot{U}_{0H}\} K_{1in} + \{W_{0H}, \dot{W}_{0H}\} K_{2in}] dz. \end{aligned}$$

Использование двух условий

$$\int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2) dz = -\lambda_{in}^2 \int_0^h (U_H K_{1in} + W_H K_{2in}) dz, \quad (2.51)$$

$$\Phi(U_H, W_H, K_{1in}, K_{2in}) \Big|_0^h = 0,$$

позволяет прийти к системе задач для трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$ :

$$\frac{d^2 G(\lambda_{in}, n, t)}{dt^2} + \lambda_{in}^2 G(\lambda_{in}, n, t) = -F(\lambda_{in}, n, t), \quad (n = \overline{0, \infty}, i = \overline{1, \infty}) \quad (2.52)$$

$$t = 0 \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_0(\lambda_{in}, n), \quad \dot{G}(\lambda_{in}, n, t) \Big|_{t=0} = \dot{G}_0(\lambda_{in}, n), \quad (2.53)$$

и, с учетом граничных условий (2.45), к однородной задаче относительно

$$K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z):$$

$$(\lambda_{in}^2 - j_n^2)K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} = 0, \quad (2.54)$$

$$(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2)K_{2in} + \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_7 j_n K_{1in} + \frac{dK_{2in}}{dz} = 0, \quad \frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} = 0. \quad (2.55)$$

В условиях (2.51) первое представляет операционное свойство, а второе – отсутствие внеинтегральных членов в уравнении (2.49).

Решение уравнения (2.52), с учетом условий (2.53), записывается в виде:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_0 \cos(\lambda_{in} t) + \dot{G}_0 \lambda_{in}^{-1} \sin(\lambda_{in} t) - \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in} (t - \tau) d\tau. \quad (2.56)$$

При исследовании задачи (2.54), (2.55) в случае, когда  $n = 0$ , компоненты ядра преобразований определяются следующими выражениями:

$$K_{1i0} = \cos\left(\frac{\lambda_{i0}}{\sqrt{a_1}} z\right), \quad \lambda_{i0} = \frac{\pi \sqrt{a_1}}{h}, \quad (2.57)$$

$$K_{2i0} = \cos(\lambda_{i0} z), \quad \lambda_{i0} = \frac{\pi}{h}.$$

В общем случае ( $n \neq 0$ ) система уравнений (2.54) приводится к следующему уравнению 4–го порядка относительно  $K_1(\lambda_{in}, z)$

$$\left\{ \frac{d^4}{dz^4} + \left[ \frac{\lambda_{in}^2 (a_1 + 1)}{a_1} - 2j_n^2 \right] \frac{d^2}{dz^2} + \frac{(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2)(\lambda_{in}^2 - j_n^2)}{a_1} \right\} K_{1in} = 0, \quad (2.58)$$

которое раскладывается на коммутативные дифференциальные сомножители 2–го порядка

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - A_{in}^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - B_{in}^2 \right) K_{1in} = 0, \quad (2.59)$$

где  $A_{in}^2 = j_n^2 - \frac{\lambda_{in}^2}{a_1}$ ,  $B_{in}^2 = j_n^2 - \lambda_{in}^2$ .

Общий интеграл уравнения (2.59), при исключении случаев, когда  $A_{in}^2 = B_{in}^2 = 0$ , имеет вид:

$$1) \quad j_n > \frac{\lambda_{in}}{\sqrt{a_1}}$$

$$K_{1in} = D_{1in} \exp(A_{in}z) + D_{2in} \exp(-A_{in}z) + D_{3in} \exp(B_{in}z) + D_{4in} \exp(-B_{in}z); \quad (2.60)$$

$$2) \quad \lambda_{in} < j_n < \frac{\lambda_{in}}{\sqrt{a_1}}$$

$$K_{1in} = D_{1in} \sin(A_{in}z) + D_{2in} \cos(A_{in}z) + D_{3in} \exp(B_{in}z) + D_{4in} \exp(-B_{in}z); \quad (2.61)$$

$$3) \quad j_n < \lambda_{in}$$

$$K_{1in} = D_{1in} \sin(A_{in}z) + D_{2in} \cos(A_{in}z) + D_{3in} \sin(B_{in}z) + D_{4in} \cos(B_{in}z). \quad (2.62)$$

Вторая компонента ядра преобразований  $K_{2in}$  получается в процессе приведения (2.54) к (2.58) и определяется равенством:

$$K_{2in} = \left[ a_2 j_n (a_1 j_n^2 - \lambda_{in}^2) \right]^{-1} \left[ a_1 \frac{d^3 K_{1in}}{dz^3} + \left[ \lambda_{in}^2 + (a_2^2 - 1) j_n^2 \right] \frac{dK_{1in}}{dz} \right]. \quad (2.63)$$

Подстановка (2.57), (2.60) – (2.63) в граничные условия (2.55) формирует систему уравнений, решение которой позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{1in} \dots D_{4in}$  и собственные значения  $\lambda_{in}$ .

Применяя к трансформанте (2.56) формулы обращения (2.48), (2.38), с учетом (2.35), (2.42), получаем выражения для функций  $U(r, z, t)$ ,  $W(r, z, t)$ :

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (2.64)$$

$$W(r, z, t) = a_8 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Для определения  $H_1(n, z, t), H_2(n, z, t), W_1(t), P_1(z, t)$  первоначально рассматривается случай действия только температурной нагрузки  $\Theta, \omega_1, \omega_2$ . Тогда  $H_1, H_2$  вычисляются из условия упрощений правых частей уравнений (2.44):

$$\begin{aligned} \left( j_n^2 - a_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_1 + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} &= 0, \\ -a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + \left( a_1 j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

В результате, с учетом граничных условий (2.43), формируются две краевые задачи относительно функций  $f_3(z), f_5(z)$  и  $f_4(z), f_6(z)$ :

$$\left( j_n^2 - a_1 \frac{d^2}{dz^2} \right) f_k(z) + a_2 j_n \frac{df_{k+2}(z)}{dz} = 0, \quad (2.66)$$

$$\left( a_1 j_n^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) f_{k+2}(z) - a_2 j_n \frac{df_k(z)}{dz} = 0; \quad (k = 3, 4)$$

$$z = 0, h \quad a_2 j_n f_k(z) + \frac{df_{k+2}(z)}{dz} = 1, \quad \frac{df_k(z)}{dz} - j_n f_{k+2}(z) = 0. \quad (2.67)$$

Равенства (2.66) приводятся к следующему уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - j_n^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - j_n^2 \right) f_k(z) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$f_k(z) = C_1 \exp(j_n z) + C_2 \exp(-j_n z) + C_3 z \exp(j_n z) + C_4 z \exp(-j_n z). \quad (2.68)$$

Тогда выражение  $f_{k+2}(z)$  из второго уравнения (2.66) определяется следующим образом:

$$f_{k+2}(z) = -C_1 \exp(j_n z) + C_2 \exp(-j_n z) + \left( \frac{2 - a_2}{a_2 j_n} - z \right) C_3 \exp(j_n z) + \quad (2.69)$$

$$f_{k+2}(z) = -C_1 \exp(j_n z) + C_2 \exp(-j_n z) + \left( \frac{2-a_2}{a_2 j_n} - z \right) C_3 \exp(j_n z) + \left( \frac{2-a_2}{a_2 j_n} + z \right) C_4 \exp(-j_n z). \quad (2.69)$$

Функция  $W_1(t)$  определяется из условия закрепления нижней цилиндрической поверхности пластины ( $W(1, h, t) = 0$ ) без учета инерционной составляющей ( $\frac{d^2 W_1}{dt^2} = 0$ ):

$$W_1(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0(j_n)} \left[ H_2(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, h) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \quad (2.70)$$

На следующем этапе решения рассматривается случай действия касательных напряжений  $P_1(z, t)$  ( $\Theta = \omega_1 = \omega_2 = 0$ ). Принимая во внимание условия уравновешенности пластины, парности и неразрывности касательных напряжений:

$$\int_0^h P_1(z, t) dz = 0, \quad P_1|_{z=0, h} = 0, \quad (2.71)$$

функция  $P_1(z, t)$  представляется в следующем виде:

$$P_1(z, t) = S_0 W_1(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right). \quad (2.72)$$

Соотношения  $H_1, H_2$  также вычисляются из условия упрощений правых частей уравнений (2.44).

Сумма двух результатов расчета позволяет определить постоянную  $S_0$  из условия интегрального равенства нулю вертикальных перемещений

цилиндрической поверхности пластины:  $\int_0^h W(1, z, t_{\max}) dz = 0$ .

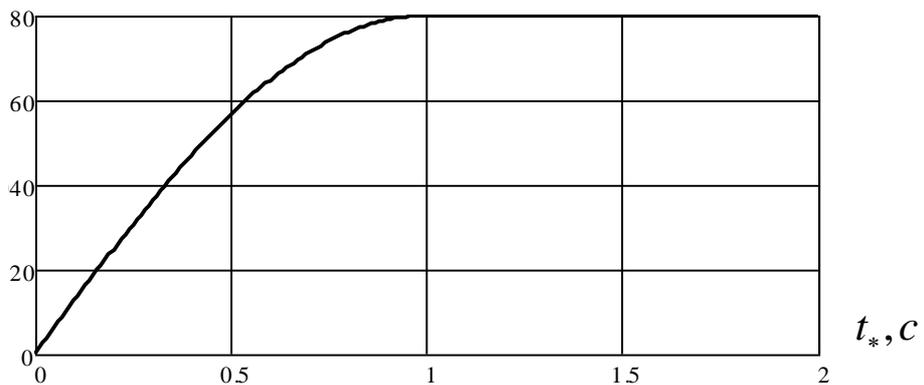
## 2.4 Численный анализ результатов

В качестве примера исследуется круглая пластина ( $b = 1$  м), выполненная из полимерного композита (теплорассеивающего пластика), имеющего следующие физико–механические характеристики:  $c_\varepsilon = 2.1 \times 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> К),  $E = 1.2 \times 10^{10}$  Па,  $\Lambda = 3$  Вт/(м К),  $\alpha_t = 2.5 \times 10^{-5}$  1/К,  $\nu = 0.2$ ,  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>.

Рассматривается случай действия на ее верхней лицевой поверхности ( $z_* = 0$ ) температурной нагрузки (рисунок 2.2):

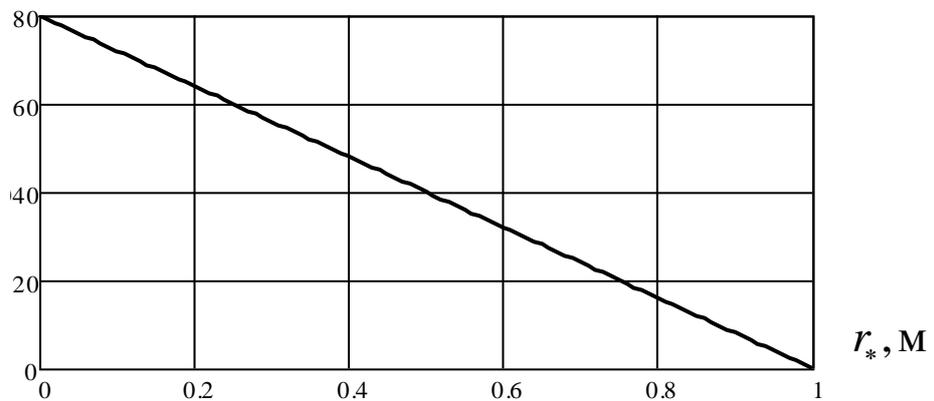
$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \omega_2^*(r_*, t_*) = 0, \quad (2.67)$$

$$\omega_1^*(0, t_*) - T_0, K$$



а)

$$\omega_1^*(0, t_*) - T_0, K$$



б)

а) График изменения " $\omega_1^*(0, t_*) - T_0$ " во времени  $t_*$

б) График изменения " $\omega_1^*(0, t_*) - T_0$ " по радиальной координате  $r_*$

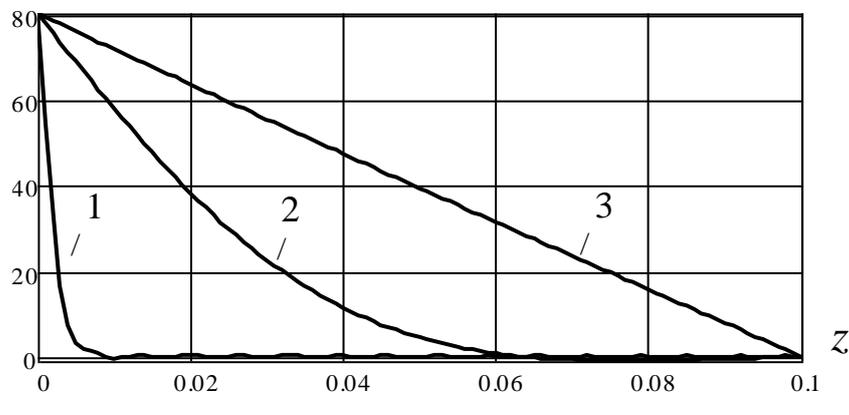
Рисунок 2.2 – График изменения " $\omega_1^*(0, t_*) - T_0$ "

где  $H(\tilde{t})$  – единичная функция Хевисайда,  $T_{\max}^*, t_{\max}^*$  – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ( $T_{\max}^* = 373 \text{ } ^\circ\text{K}$  ( $100 \text{ } ^\circ\text{C}$ ),  $T_0 = 293 \text{ } ^\circ\text{K}$ , ( $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ ),  $t_{\max}^* = 1 \text{ с}$ ).

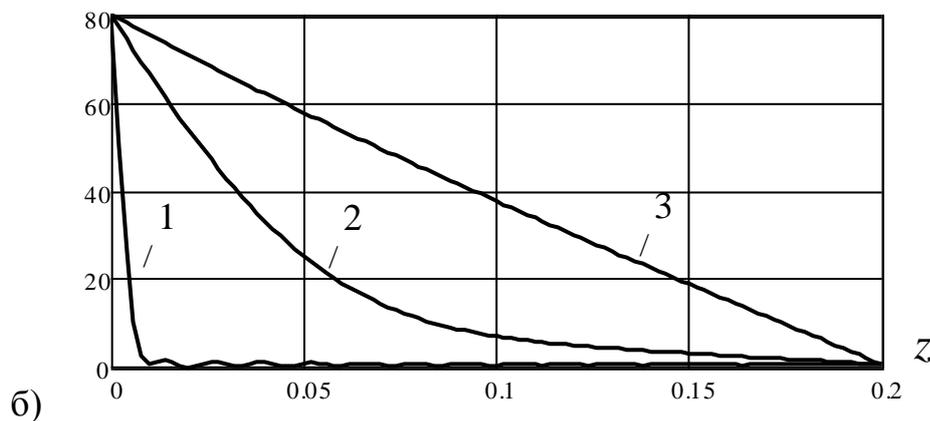
Здесь и ниже в графиках используется безразмерное время  $t_{\max}$ , соответствующее времени достижения нагрузки максимального значения, т.е.

$$t_{\max} = \frac{a_5}{b} t_{\max}^* .$$

$$\Theta^*(0, z, t), \text{ } ^\circ\text{C}$$



$$\Theta^*(0, z, t), \text{ } ^\circ\text{C}$$



а)  $h = 0.1$  ( $1-t = t_{\max}$ ,  $2-t = 100t_{\max}$ ,  $3-t = 350t_{\max}$  )

б)  $h = 0.2$  ( $1-t = t_{\max}$ ,  $2-t = 200t_{\max}$ ,  $3-t = 450t_{\max}$  )

Рисунок.2.3 – Графики « $\Theta^*(0, z, t) - z$ » в различное время  $t$

На рисунках 2.3 представлены графики изменения температуры  $\Theta^*(0, z, t_*)$  по высоте пластины в различные моменты времени ( $h = 0.1, 0.2$ ). Результаты расчета показывают, что при высокоскоростном температурном нагружении ( $t_{\max}^* = 1$  с) первоначально прогревается верхняя лицевая поверхность на небольшую глубину (рисунок 2.3, графики 1). В дальнейшем, при постоянной температуре, на поверхности при  $z = 0$  прогревается вся пластина (рисунок 2.3, графики 2, 3). При этом очевидно, что время установившегося температурного режима зависит от толщины упругой системы (рисунок 2.3, графики 3).

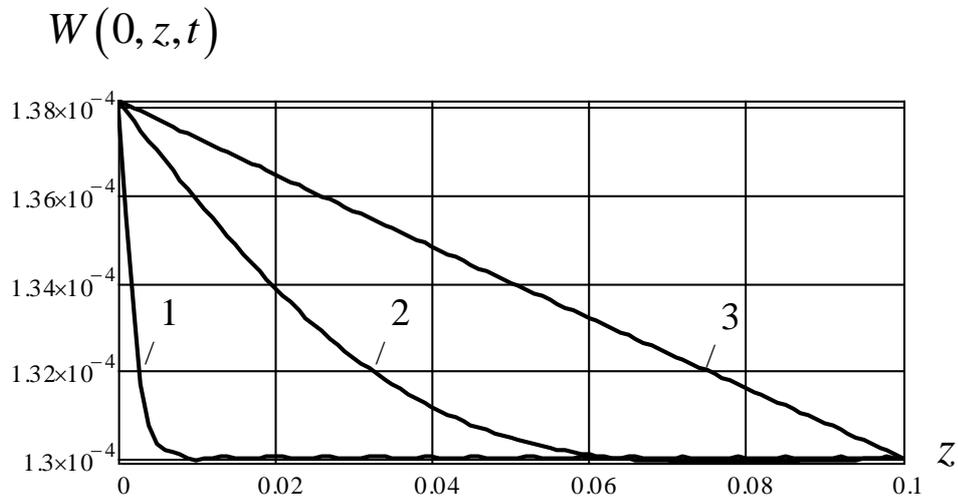


Рисунок 2.4 – Изменение  $W(0, z, t)$  по толщине пластины в различные моменты времени ( $h = 0.1, 1-t = t_{\max}, 2-t = 100t_{\max}, 3-t = 350t_{\max}$ )

Графики изменения  $W(0, z, t)$  по высоте пластины ( $h = 0.1$ ) в различные моменты времени представлены на рисунке 2.4.

Результаты расчета позволяют сделать следующие выводы:

– при высокоскоростном температурном воздействии при достижении нагрузки максимальных значений ( $t = t_{\max}$ ) деформации в вертикальной плоскости испытывает только небольшой поверхностный участок пластины (рисунок 2.4, график 1). В следующий период времени ( $t > t_{\max}$ ) деформации распространяются по толщине пластины (рисунок 2.4, график 2) и при полном прогреве конструкции

перемещения изменяются по высоте по линейной зависимости (рисунок 2.4, график 3);

– перемещения на лицевых поверхностях пластины при  $t = t_{\max}$  принимают максимальные значения и в дальнейшем в течение времени не меняются;

– зависимости  $\Theta^*(0, z, t) - z$  (рисунок 2.3, а) и  $W(0, z, t) - z$  (рисунок 2.4) практически полностью повторяются.

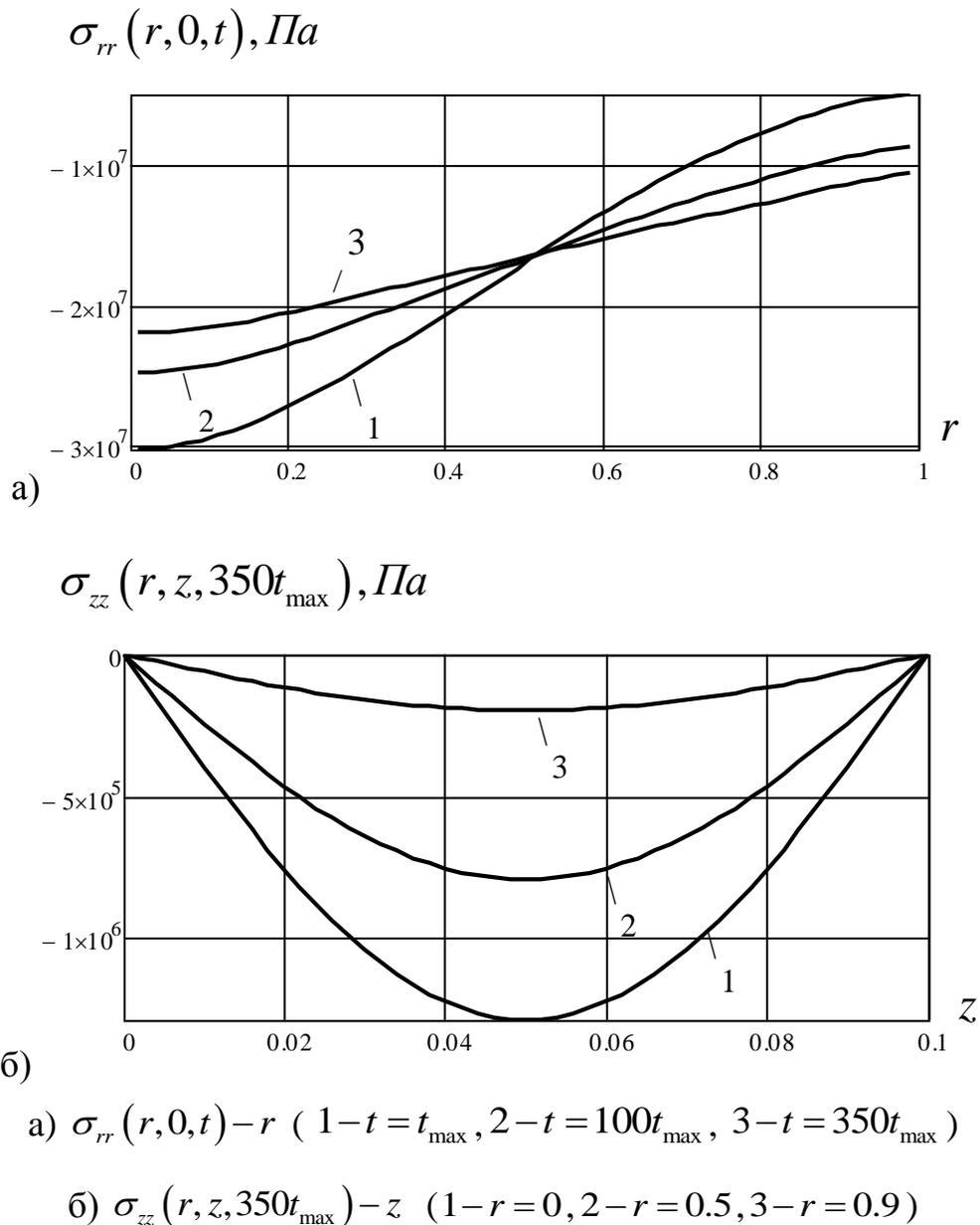


Рисунок 2.5 – Графики изменения компонент тензора напряжений

$$\sigma_{jk}(r, z, t) \quad (j, k = r, z) \quad \text{в пластине } (h = 0.1)$$

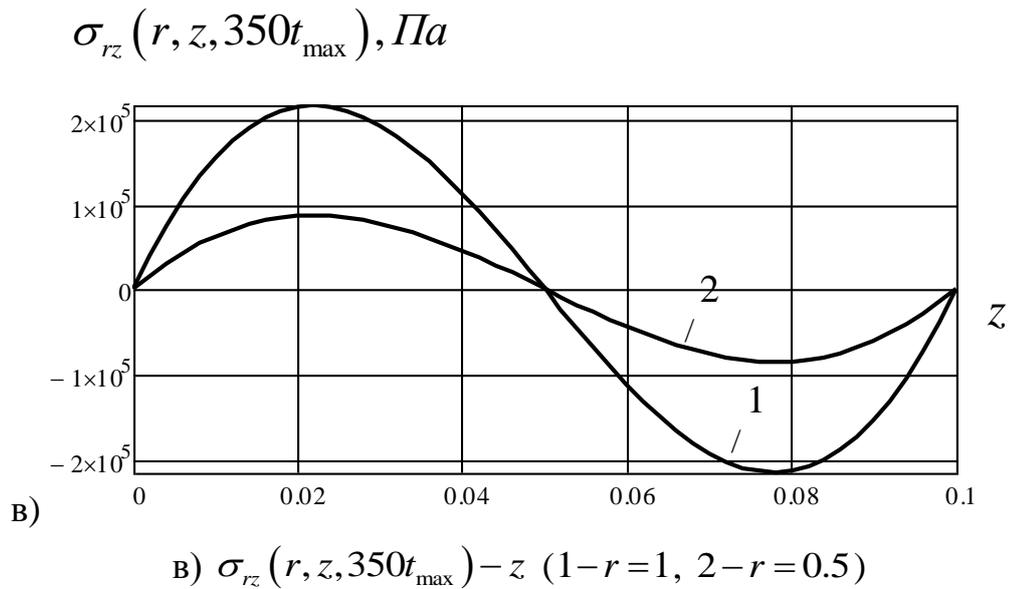


Рисунок 2.5 – Графики изменения компонент тензора напряжений

$$\sigma_{jk}(r, z, t) \quad (j, k = r, z) \text{ в пластине } (h=0.1)$$

На рисунке 2.5 представлены графики изменения компонент тензора напряжений пластины ( $h=0.1$ ) по пространственным координатам в различные моменты времени.

Результаты показывают:

– наибольшие нормальные радиальные напряжения  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$  наблюдаются при достижении нагрузки максимальных значений ( $t=t_{\max}$ ) на верхней лицевой ( $z=0$ ) поверхности (рисунок 2.5, а, график 1). В дальнейшем, при прогреве конструкции, напряжения  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$  уменьшаются (рисунок 2.5, а, графики 2,3);

– нормальные аксиальные напряжения  $\sigma_{zz}(r, z, t)$  принимают наибольшие значения при полном прогреве пластины  $t=350t_{\max}$ . При этом максимальные напряжения  $\sigma_{zz}(r, z, t)$  образуются в центре пластины (рисунок 2.5, б, график 1);

– касательные напряжения  $\sigma_{rz}(r, z, t)$  по высоте упругой системы имеют разные знаки (рисунок 2.5, в). При этом максимальные напряжения возникают в жестком закреплении (рисунок 2.5, в, график 1);

– в рассматриваемом примере учет касательных напряжений на цилиндрической поверхности  $P_1(z,t)$  (2.34) приводит к незначительному увеличению перемещений (менее 1%), что дает возможность существенно упростить расчет, принимая  $P_1(z,t) = 0$ ;

– сравнение численных значений компонент тензора напряжений дает возможность сделать вывод, что при расчете конструкций на прочность определяющими являются нормальные напряжения  $\sigma_{rr}(r,z,t)$ .

На рисунке 2.6 показаны графики изменения перемещений  $W^*(0,0,t_*)$  по времени  $t_*$  для пластин различной толщины. Сплошной линией обозначены результаты для  $h^* = 0.01$  (м), пунктирной  $h^* = 0.1$  (м). Время достижения нагрузки максимальных значений  $t_{\max}^* = 0.03$  с.

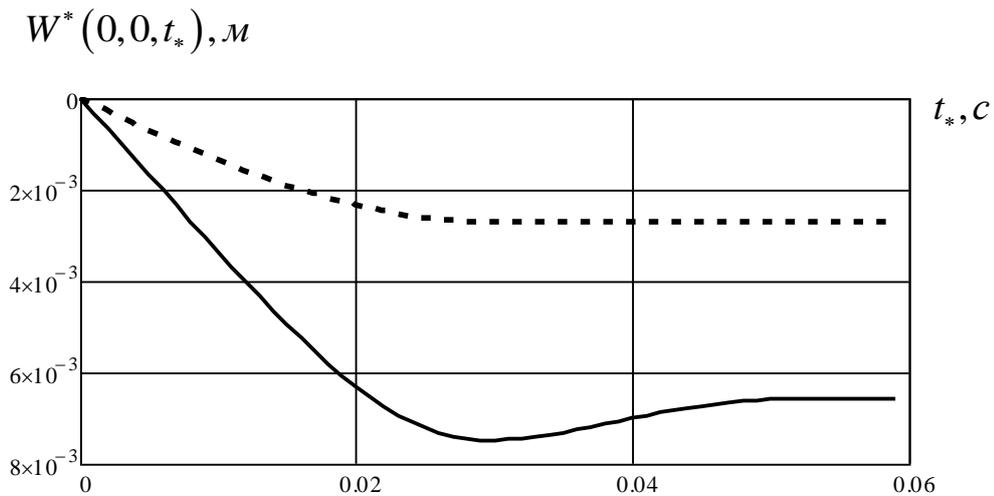


Рисунок 2.6 – Графики « $W(0,0,t_*) - t_*$ »

( $t_{\max}^* = 0.03$  с,  $h^* = 0.01$  (м) – сплошная линия,

$h^* = 0.1$  (м) – пунктирная линия (результаты увеличены в 20 раз))

В пластине толщиной  $h^* = 0.1$  (м) (рисунок 2.6, пунктирная линия) характер изменения во времени перемещения  $W(0,0,t_*)$  и температурной нагрузки  $\omega_1^*(0,t_*)$  совпадают, т.е. в расчетах рассматриваемой конструкции инерционными

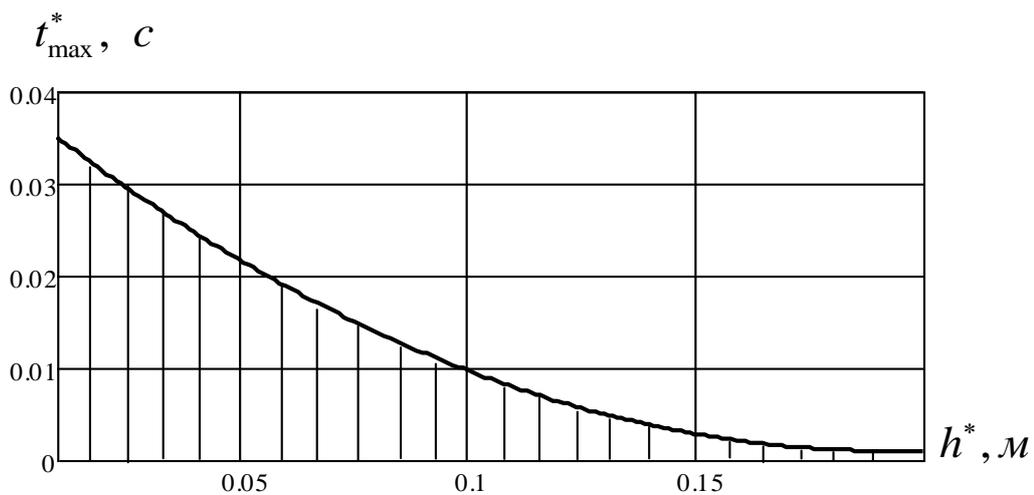
характеристиками упругой системы можно пренебречь. Однако для пластины толщиной  $h^* = 0.01$  (м) силы инерции оказывают существенное влияние на график изменения перемещений  $W(0,0,t_*)$  (рисунок 2.6, сплошная линия).

Для обобщения полученных результатов используется известный вывод, что в случае действия гармонической нагрузки силы инерции упругой системы необходимо учитывать, когда частота вынужденных колебаний  $\theta$  составляет не менее 50 % от наименьшей частоты собственных колебаний пластины  $\omega_{11}$  [141, 144-145, 150, 164–171].

В таблице 2.1 представлены численные значения круговых частот собственных осесимметричных колебаний  $\omega_{11}$   $\left( \omega_m = \frac{a_5}{b} \lambda_{in}, i = \overline{1, \infty}, n = \overline{1, \infty} \right)$  для пластин различной толщины ( $b = 1$  м).

Таблица 2.1

$h^*, \text{ м}$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.03	0.01
$\omega_{11} \times \frac{b}{a_5}$	0.755	0.572	0.405	0.203	0.121	0.041

Рисунок 2.7 – График " $t_{\max}^* - h^*$ "

Принимая во внимание, что частота вынужденных колебаний на первом этапе загрузки пластины определяется равенством  $\theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}$ , а предельное значение частоты, когда можно не учитывать силы инерции, выражается как  $\theta = \frac{\omega_{11}}{2}$ , получаем следующую зависимость " $t_{\max}^* - h^*$ " (рисунок 2.7).

При заданном максимальном значении температуры на верхней лицевой поверхности (в рассматриваемом примере  $T_{\max}^* = 100 \text{ K}$ ), можно для произвольной толщины пластины  $h^*$  ( $b = 1 \text{ м}$ ) определить время достижения нагрузки максимального значения  $t_{\max}^*$ , когда в расчетах необходимо учитывать инерционные характеристики упругой системы (заштрихованная часть графика).

Например, для толщины пластины  $h^* = 0.1 \text{ (м)}$  инерционную составляющую упругой системы необходимо учитывать при  $t_{\max}^* < 0.01 \text{ с}$  (рисунок 2.7).

Полученные в настоящей главе результаты динамического расчета позволяют определить напряженно–деформированное состояние и температурное поле пластины произвольной толщины без ограничений по скорости изменения температурной нагрузки.

### **3 СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ**

Построено новое замкнутое решение связанной осесимметричной нестационарной задачи теории термоупругости (СТЕ) для жестко закрепленной круглой изотропной пластины в случае изменения температуры на ее лицевых поверхностях (граничные условия 1–го рода).

Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает линейные уравнения равновесия и теплопроводности в пространственной постановке, что накладывает некоторые ограничения на толщину пластины и скорость изменения нагрузки.

При построении общего решения связанных несамосопряженных уравнений используется математический аппарат разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований Ханкеля и биортогонального обобщенного преобразования. Особенностью данного решения является применение КИП, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор – функций двух однородных краевых задач. Важным моментом в процедуре структурного алгоритма является выделение сопряженного оператора, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики. Данное преобразование является наиболее эффективным методом исследования подобных краевых задач.

#### **3.1 Постановка задачи**

Пусть круглая жестко закрепленная пластина занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ . На ее торцевых поверхностях задана температура:  $\omega_1^*(r_*, t_*)$  при  $z = 0$ ,  $\omega_2^*(r_*, t_*) - z = h^*$  (рисунок 2.1).

Математическая формулировка рассматриваемой осесимметричной связанной задачи в безразмерной форме включает дифференциальные уравнения равновесия и теплопроводности, а также краевые условия:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad (3.1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} - a_3 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0;$$

$$r=1 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$r=0 \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad \Theta(0, z, t) < \infty; \quad (3.3)$$

$$z=0, h \quad a_4 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \{\omega_1, \omega_2\} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

$$\Theta(r, 0, t) = \omega_1, \quad \Theta(r, h, t) = \omega_2;$$

$$t=0 \quad \{U(r, z, 0), W(r, z, 0), \Theta(r, z, 0)\} = 0, \quad (3.5)$$

где  $\{U, W, r, z, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*\} / b$ ,  $\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = a_5 \{\Theta^*, \omega_1^* - T_0, \omega_2^* - T_0\}$ ,  $t = t_* \frac{\Lambda}{b^2 c_\varepsilon}$ ,

$$a_1 = a_2(1-2\nu), \quad a_2 = 0.5(1-\nu)^{-1}, \quad a_3 = a_5 \frac{\gamma T_0}{c_\varepsilon}, \quad a_4 = \nu(1-\nu)^{-1}, \quad a_5 = \frac{\gamma(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)},$$

$$\gamma = \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha_t, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Здесь принимается, что в первоначальный момент времени конструкция находится в недеформированном состоянии, а ее температура определяется величиной  $T_0$ . При этом  $\omega_1(r, 0) = \omega_2(r, 0) = 0$ .

### 3.2 Построение общего решения

Расчетные соотношения (3.1) – (3.5) приводятся к стандартной форме путем замены последнего равенства (3.2) на условие:

$$\sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = P_1, \quad (3.6)$$

и использования новой функции  $w(r, z, t)$ , связанной с  $W(r, z, t)$ :

$$W(r, z, t) = a_6 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + w(r, z, t), \quad (3.7)$$

где  $P_1(z, t), W_1(t)$  – функции, определяемые в процессе решения задачи из условия  $W(1, z, t) = 0$ ,  $a_6 = (1+\nu)E^{-1}$ .

Подстановка (3.7) в (3.1) – (3.6) позволяет преобразовать краевую задачу к стандартной форме, в которой дифференциальные уравнения (3.1), первое граничное условие (3.4) и начальное условие для  $w(r, z, t)$  становятся неоднородными с правыми частями:

$$R_1 = -a_2 \frac{2(1+\nu)}{E} r \frac{\partial P_1}{\partial z}, \quad R_2 = -\frac{(1+\nu)}{E} \left( 4a_1 + r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_1,$$

$$R_3 = a_3 \frac{(1+\nu)}{E} r^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z \partial t}, \quad B_1 = -\frac{(1+\nu)}{E} r^2 \frac{\partial P_1}{\partial z},$$

$$w_0(r, z) = -a_6 r^2 P_1(z, 0) - W_1(0),$$

а граничные условия при  $r = 1$  принимают вид:

$$r = 1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r}|_{r=1} = 0. \quad (3.8)$$

Применяя к краевой задаче относительно функций  $U, w, \Theta$  преобразования Ханкеля:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (3.9)$$

$$\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (3.10)$$

$$\{w(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t)\}}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

в пространстве изображений получаем новую задачу:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + j_n \phi_H = R_{1H}, \quad (3.11)$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = R_{2H},$$

$$-j_n^2 \phi_H + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( a_3 j_n u_H + a_3 \frac{\partial w_H}{\partial z} + \phi_H \right) = R_{3H};$$

$$z=0, h \quad a_4 j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H} + \{\omega_{1H}, \omega_{2H}\}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad (3.12)$$

$$\phi_H(n, 0, t) = \omega_{1H}, \quad \phi_H(n, h, t) = \omega_{2H};$$

$$t=0 \quad \{u_H(n, z, 0), \phi_H(n, z, 0)\} = 0, \quad w_H(n, z, 0) = w_{0H}(n, z), \quad (3.13)$$

где  $j_n$  – положительные нули функции  $J_1(j_n)$  ( $n = \overline{0, \infty}$ ;  $j_0 = 0$ ),

$$\{R_{1H}, B_{1H}, \omega_{1H}, \omega_{2H}\} = \int_0^1 \{R_1, B_1, \omega_1, \omega_2\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$\{R_{2H}, R_{3H}, w_{0H}\} = \int_0^1 \{R_2, R_3, w_0\} r J_1(j_n r) dr.$$

На следующем этапе решения использование новых функций  $U_H, W_H, Q_H$  позволяет привести граничных условий (3.12) к однородным:

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad (3.14)$$

$$w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad \varphi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + Q_H(n, z, t);$$

где  $\{H_1, H_2\} = \{f_1(z), f_2(z)\} \omega_{1H}(t) + \{f_4(z), f_5(z)\} \omega_{2H}(t) +$   
 $+ \{f_7(z), f_8(z)\} B_{1H}(n, 0, t) + \{f_9(z), f_{10}(z)\} B_{1H}(n, h, t), H_3 = f_3(z) \omega_{1H}(t) + f_6(z) \omega_{2H}(t).$

Подстановка (3.14) в (3.11) – (3.13) при выполнении условий:

$$z=0, h \quad a_4 j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} = B_{1H} + \{\omega_{1H}, \omega_{2H}\}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 = 0, \quad (3.15)$$

$$H_3 = \{\omega_{1H}, \omega_{2H}\},$$

приводит к краевой задаче для функций  $U_H, W_H, Q_H$  с однородными граничными условиями. При этом правые части дифференциальных уравнений (3.11) и начальные условия (3.13) относительно  $U_{0H}, W_{0H}, Q_{0H}$  принимают вид:

$$F_{1H} = R_{1H} + j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - j_n H_3, \quad (3.16)$$

$$F_{2H} = R_{2H} + a_1 j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial z},$$

$$F_{3H} = R_{3H} + j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ a_3 j_n H_1 + a_3 \frac{\partial H_2}{\partial z} + H_3 \right],$$

$$U_{0H} = -H_{1|t=0}, \quad W_{0H} = w_{0H} - H_{2|t=0}, \quad Q_{0H} = -H_{3|t=0}.$$

Краевая задача (3.11) – (3.13) относительно  $U_H, W_H, Q_H$  решается при использовании вырожденного биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [135–140] путем введения неизвестных компонент собственных вектор–функций ядер преобразований  $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z),$   
 $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z):$

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \left[ Q_H(n, z, t) + a_3 j_n U_H(n, z, t) + a_3 \frac{dW_H(n, z, t)}{dz} \right] K_3(\lambda_{in}, z) dz, \quad (3.17)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), Q_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_{in}, n, t) \{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2}$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_3(\lambda_{in}, z) N_3(\mu_{in}, z) dz,$$

где  $\lambda_{in}, \mu_{in}$  – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных  $K_k(\lambda_{in}, z)$  и инвариантных  $N_k(\mu_{in}, z)$  компонент вектор – функций ядер КИП ( $k = 1, 2, 3$ ).

Особенность данного преобразования заключается в том, что трансформанта и формулы обращения (3.17) содержат различные ядровые вектор – функции  $K_k(\lambda_{in}, z), N_k(\mu_{in}, z)$ .

Согласно процедуре преобразования умножаем первое, второе и третье уравнения (3.11) соответственно  $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$ , а преобразованные начальные условия (3.13) на  $K_3(\lambda_{in}, z)$ . При этом начальное условие относительно  $W_{0H}$  предварительно дифференцируется по переменной  $z$ .

Выполняя затем интегрирование в интервале  $[0, h]$  и складывая полученные уравнения имеем:

$$\Phi(U_H, W_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + Q_H L_3) dz - \frac{d^2 G(\lambda_{in}, n, t)}{dt^2} = F_H(\lambda_{in}, n, t), \quad (3.18)$$

$$t=0 \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_0(\lambda_{in}, n). \quad (3.19)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi(U_H, W_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h &= a_1 \frac{\partial U_H}{\partial z} K_{1in} + U_H \left( a_2 j_n K_{2in} - a_1 \frac{dK_{1in}}{dz} \right) + \\ &+ \frac{\partial W_H}{\partial z} K_{2in} - W_H \left( a_2 j_n K_{1in} + \frac{dK_{2in}}{dz} \right) + \frac{\partial Q_H}{\partial z} K_{3in} - Q_H \left( K_{2in} + \frac{dK_{3in}}{dz} \right), \end{aligned}$$

$$L_1 = -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz}, \quad L_2 = a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_1 j_n^2 K_{2in} + \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2},$$

$$L_3 = j_n K_{1in} + \frac{dK_{2in}}{dz} - j_n^2 K_{3in} + \frac{d_2 K_{3in}}{dz^2}, \quad G_{0H} = \int_0^h \left( Q_{0H} + a_3 j_n U_{0H} + a_3 \frac{dW_{0H}}{dz} \right) K_{3in} dz,$$

$$F_H(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (F_{1H} K_{1in} + F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in}) dz.$$

Использование первого условия преобразования в виде операционного свойства:

$$\Phi(U_H, W_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + Q_H L_3) dz = \quad (3.20)$$

$$= -\lambda_{in} \int_0^h \left[ Q_H + a_3 j_n U_H + a_3 \frac{dW_H}{dz} \right] K_{3in} dz,$$

позволяет получить задачу для трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$ :

$$\frac{dG(\lambda_{in}, n, t)}{dt} + \lambda_{in} G(\lambda_{in}, n, t) = -F_H(\lambda_{in}, n, t); \quad (i = \overline{1, \infty} \quad n = \overline{0, \infty}) \quad (3.21)$$

$$t = 0 \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_{0H},$$

решение которой имеет вид:

$$G_{in}(\lambda_{in}, n, t) = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\lambda_{in}, n, \tau) \exp \lambda_{in}(\tau - t) d\tau. \quad (3.22)$$

Преобразование (3.20) к следующему виду:

$$\left[ \Phi(U_H, W_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) - \lambda_{in} a_3 W_H K_{3in} \right] \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + Q_H L_3) dz =$$

$$= -\lambda_{in} \int_0^h \left[ Q_H K_{3in} + a_3 j_n U_H K_{3in} - a_3 W_H \frac{dK_{3in}}{dz} \right] dz,$$

при учете следующего условия алгоритма решения об отсутствии внеинтегральных членов:

$$\left[ \Phi(U_H, W_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) - \lambda_{in} a_3 W_H K_{3in} \right]_0^h = 0,$$

и получить новую однородную краевую задачу относительно неизвестных компонент ядра преобразований  $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z)$ :

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} + \lambda_{in} a_3 j_n K_{3in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 K_{2in} + \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - \lambda_{in} a_3 \frac{dK_{3in}}{dz} &= 0, \\ (\lambda_{in} - j_n^2) K_{3in} + \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + \frac{dK_{2in}}{dz} &= 0; \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$z = 0, h \quad (a_2 - a_4) j_n K_{2in} - a_1 \frac{dK_{1in}}{dz} = 0, \quad (a_1 - a_2) j_n K_{1in} - \frac{dK_{2in}}{dz} = 0, \quad K_{3in} = 0; \quad (3.24)$$

По описанной выше процедуре применим к системе уравнений (3.23) КИП [135–140] с неизвестными компонентами ядра  $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$ . Здесь также используется операционное свойство:

$$\begin{aligned} \Phi(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}) \Big|_0^h + \int_0^h (K_{1in} L_4 + K_{2in} L_5 + K_{3in} L_6) dz &= \\ &= -\mu_{in} \int_0^h \left[ a_3 j_n N_{1in} + N_{3in} + a_3 \frac{dN_{2in}}{dz} \right] K_{3in} dz, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \Phi(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}) \Big|_0^h &= a_1 \frac{dK_{1in}}{dz} N_{1in} + K_{1in} \left( a_2 j_n N_{2in} - a_1 \frac{dN_{1in}}{dz} \right) + \\ &+ \frac{dK_{2in}}{dz} N_{2in} + K_{2in} \left( N_{3in} - \frac{dN_{2in}}{dz} - a_2 j_n N_{1in} \right) + \frac{dK_{3in}}{dz} N_{3in} - K_{3in} \frac{dN_{3in}}{dz}, \end{aligned}$$

$$L_4 = -j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + j_n N_{3in}, \quad L_6 = \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - j_n^2 N_{3in},$$

$$L_5 = a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_1 j_n^2 N_{2in} + \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} - \frac{dN_{3in}}{dz}.$$

Преобразование (3.25) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & \left[ \Phi(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}) - \mu_{in} a_3 N_{2in} K_{3in} \right]_0^h + \int_0^h (K_{1in} L_4 + K_{2in} L_5 + K_{3in} L_6) dz = \\ & = -\mu_{in} \int_0^h \left[ a_3 j_n N_{1in} K_{3in} + N_{3in} K_{3in} - a_3 N_{2in} \frac{dK_{3in}}{dz} \right] dz, \end{aligned}$$

а использование условия равенства нулю внеинтегральных членов:

$$\left[ \Phi(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}) - \mu_{in} a_3 N_{2in} K_{3in} \right]_0^h = 0,$$

позволяет получить однородную краевую задачу относительно компонент ядра  $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$ :

$$-j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + j_n N_{3in} = 0, \quad (3.26)$$

$$-a_1 j_n^2 N_{2in} + \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - \frac{dN_{3in}}{dz} = 0,$$

$$-j_n^2 N_{3in} + \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + \mu_{in} \left( a_3 j_n N_{1in} + a_3 \frac{dN_{2in}}{dz} + N_{3in} \right) = 0;$$

$$z=0, h \quad a_4 j_n N_{1in} + \frac{dN_{2in}}{dz} = 0, \quad \frac{dN_{1in}}{dz} - j_n N_{2in} = 0, \quad N_{3in} = 0. \quad (3.27)$$

Полученная однородная система (3.26) и граничные условия (3.27) будут инвариантны (3.11), (3.12) относительно функций  $U_H, W_H, Q_H$ .

Системы (3.23), (3.26) приводятся к дифференциальным уравнениям 6–го порядка относительно функций  $K_1(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z)$ :

$$\left( \frac{d^6}{dr^6} + b_{1in} \frac{d^4}{dr^4} + b_{2in} \frac{d^2}{dr^2} + b_{3in} \right) \{ K_{1in}, N_{1in} \} = 0, \quad (3.28)$$

которые можно разложить на коммутативные сомножители 2–го порядка:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + A_{in}^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - j_n^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - j_n^2 \right) \{ K_{1in}, N_{1in} \} = 0, \quad (3.29)$$

где  $b_{1in} = \xi_{in} a_3 - 3j_n^2$ ,  $b_{2in} = (3j_n^2 - 2\xi_{in} a_3) j_n^2$ ,  $b_{3in} = (\xi_{in} a_3 - j_n^2) j_n^4$ , соответственно при решении задач (3.23) и (3.26)  $\xi_{in} = \lambda_{in}$  и  $\xi_{in} = \mu_{in}$ ,  $A_{in}$  – действительный корень следующего бикубического уравнения

$$(A_{in}^2)^3 - b_{1in} (A_{in}^2)^2 + b_{2in} A_{in}^2 - b_{3in} = 0. \quad (3.30)$$

Общий интеграл дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \{K_{1in}, N_{1in}\} = & \{D_{1in}, E_{1in}\} \sin(A_{in}z) + \{D_{2in}, E_{2in}\} \cos(A_{in}z) + \{D_{3in}, E_{3in}\} \exp(j_n z) + \\ & + \{D_{4in}, E_{4in}\} \exp(-j_n z) + \{D_{5in}, E_{5in}\} z \exp(j_n z) + \{D_{6in}, E_{6in}\} z \exp(-j_n z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Используя связи между компонентами преобразований, полученные в результате приведения (3.23), (3.26) к (3.28), получаем выражения для  $K_2(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_3(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_2(\mu_{in}, z)$ ,  $N_3(\mu_{in}, z)$ :

$$K_{2in} = \frac{A_{in}}{j_n} \left[ -D_{1in} \cos(A_{in}z) + D_{2in} \sin(A_{in}z) \right] - D_{3in} \exp(j_n z) + D_{4in} \exp(-j_n z) + \quad (3.32)$$

$$+ D_{5in} j_n^{-1} (b_4 - j_n z) \exp(j_n z) + D_{6in} j_n^{-1} (b_4 + j_n z) \exp(-j_n z),$$

$$K_{3in} = \frac{j_n^2 + A_{in}^2}{\lambda_{in} a_3^{(j)} j_n} \left[ D_{1in} \sin(A_{in}z) + D_{2in} \cos(A_{in}z) \right] - b_{5in} \left[ D_{5in} \exp(j_n z) - D_{6in} \exp(-j_n z) \right],$$

$$N_{2in} = \frac{A_{in}}{j_n} \left[ -E_{1in} \cos(A_{in}z) + E_{2in} \sin(A_{in}z) \right] - E_{3in} \exp(j_n z) + E_{4in} \exp(-j_n z) +$$

$$+ E_{5in} j_n^{-1} (b_4 - j_n z) \exp(j_n z) + E_{6in} j_n^{-1} (b_4 + j_n z) \exp(-j_n z),$$

$$N_{3in} = \frac{j_n^2 + A_{in}^2}{j_n} \left[ E_{1in} \sin(A_{in}z) + E_{2in} \cos(A_{in}z) \right] - a_3 b_{5in} \left[ E_{5in} \exp(j_n z) + E_{6in} \exp(-j_n z) \right],$$

где  $b_4 = 1 + \frac{2a_1}{a_2 + a_3}$ ,  $b_{5in} = \frac{2a_1}{\xi_{in} (a_3 + a_2)}$ .

Подстановка (3.31), (3.32) в граничные условия (3.24), (3.27) позволяет сформировать две системы уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{1in} \dots D_{6in}, E_{1in} \dots E_{6in}$  и собственные значения  $\lambda_{in}, \mu_{in}$ .

Применяя к трансформанте (3.22) последовательно формулы обращения (3.17), (3.10), с учетом (3.7), (3.14), получаем общие выражения для функций  $U(r, z, t), W(r, z, t), \Theta(r, z, t)$ :

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (3.33)$$

$$W(r, z, t) = a_6 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Для определения функций  $W_1(t), P_1(z, t), H_1(n, z, t) \dots H_3(n, z, t)$  первоначально рассматривается случай действия температурной нагрузки  $\omega_1, \omega_2$  ( $P_1 = 0$ ). В этом случае  $H_1 \dots H_3$  вычисляются из условия упрощений правых частей уравнений (3.11) относительно функций  $U_H, W_H, Q_H$ :

$$j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - j_n H_3 = 0,$$

$$a_1 j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0, \quad j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} = 0.$$

В результате формируются две системы дифференциальных уравнений относительно функций  $f_1(z) \dots f_3(z)$  и  $f_4(z) \dots f_6(z)$ , решения которых, с учетом граничных условий (3.15), записывается следующим образом:

$$f_1(z) = \frac{sh[j_n(h-z)]}{2a_2 j_n sh(j_n h)}, \quad f_2(z) = \frac{-ch[j_n(h-z)]}{2a_2 j_n sh(j_n h)}, \quad f_3(z) = \frac{sh[j_n(h-z)]}{sh(j_n h)},$$

$$f_4(z) = \frac{sh(j_n z)}{2a_2 j_n sh(j_n h)}, \quad f_5(z) = \frac{ch(j_n z)}{2a_2 j_n sh(j_n h)}, \quad f_6(z) = \frac{sh(j_n z)}{sh(j_n h)}.$$

Условие закрепления цилиндрической поверхности  $W(1, h, t) = 0$  позволяет определить  $W_1(t)$ :

$$W_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1} \left[ H_2(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, h) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

На следующем этапе рассматривается случай действия касательных напряжений  $P_1(z, t)$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ), которые аппроксимируются следующей зависимостью:

$$P_1(z, t) = S_0 W_1(t) \sin \frac{2\pi}{h} z.$$

Постоянная  $S_0$  определяется при суммировании двух результатов расчета из условия интегрального равенства нулю перемещений на цилиндрической поверхности пластины.

Здесь для определения  $H_1, H_2$  используются следующие расчетные соотношения:

$$j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} = 0, \quad a_1 j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0,$$

которые образуют две системы дифференциальных уравнений относительно  $f_7(z), f_8(z)$  и  $f_9(z), f_{10}(z)$ , которые решаются при учете условий (3.15).

### 3.2 Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается круглая ( $b = 1$  м) металлическая пластина ( $E = 2 \times 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.28$ ,  $\alpha_t = 1.2 \times 10^{-5}$  1/К,  $c_\varepsilon = 3.8 \times 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>К),  $\Lambda = 50$  Вт/(м К)) при действии на ее лицевой поверхности ( $z_* = 0$ ) температурной нагрузки:

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \omega_2^*(r_*, t_*) = 0, \quad (3.34)$$

где  $T_{\max}^*$ ,  $t_{\max}^*$  – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ( $T_{\max}^* = 373 \text{ }^0\text{K}$  ( $100 \text{ }^0\text{C}$ ),  $T_0 = 293 \text{ }^0\text{K}$ , ( $20 \text{ }^0\text{C}$ )).

На рисунках 3.1, 3.2 представлены графики изменения температуры и компонент вектора перемещений по высоте пластины ( $h=0.1, 0.2$ ) в различные моменты времени. Здесь и ниже в графиках используется безразмерное время  $t_{\max}$ , соответствующее времени достижения нагрузки максимального значения,

т.е.  $t_{\max} = \frac{\Lambda}{b^2 c_\varepsilon} t_{\max}^*$ .

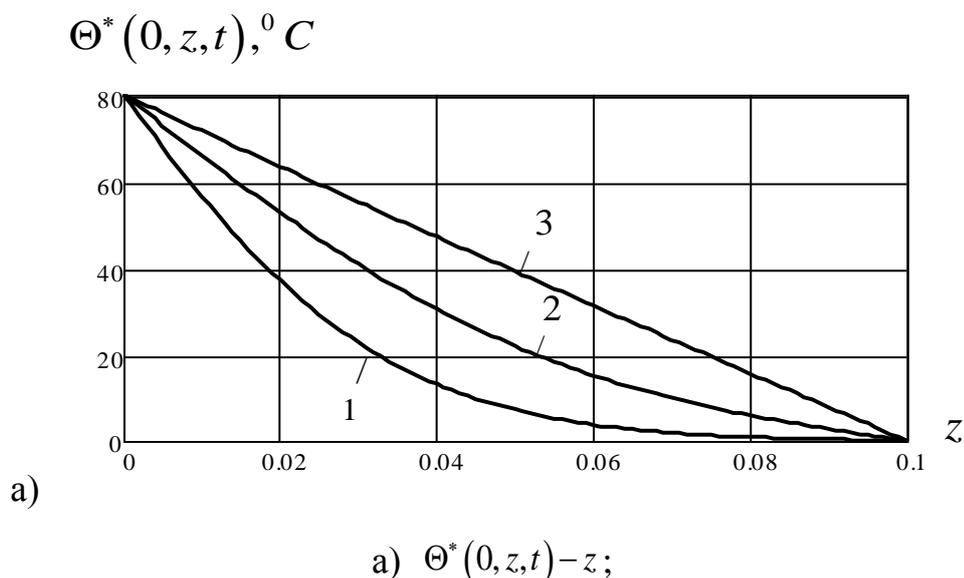


Рисунок 3.1 – Графики изменения температуры

по высоте пластины:  $h=0.1$ ,  $1-t=t_{\max}$ ,  $2-t=2t_{\max}$ ,  $3-t=10t_{\max}$  ( $t_{\max}^* = 50 \text{ с}$ )

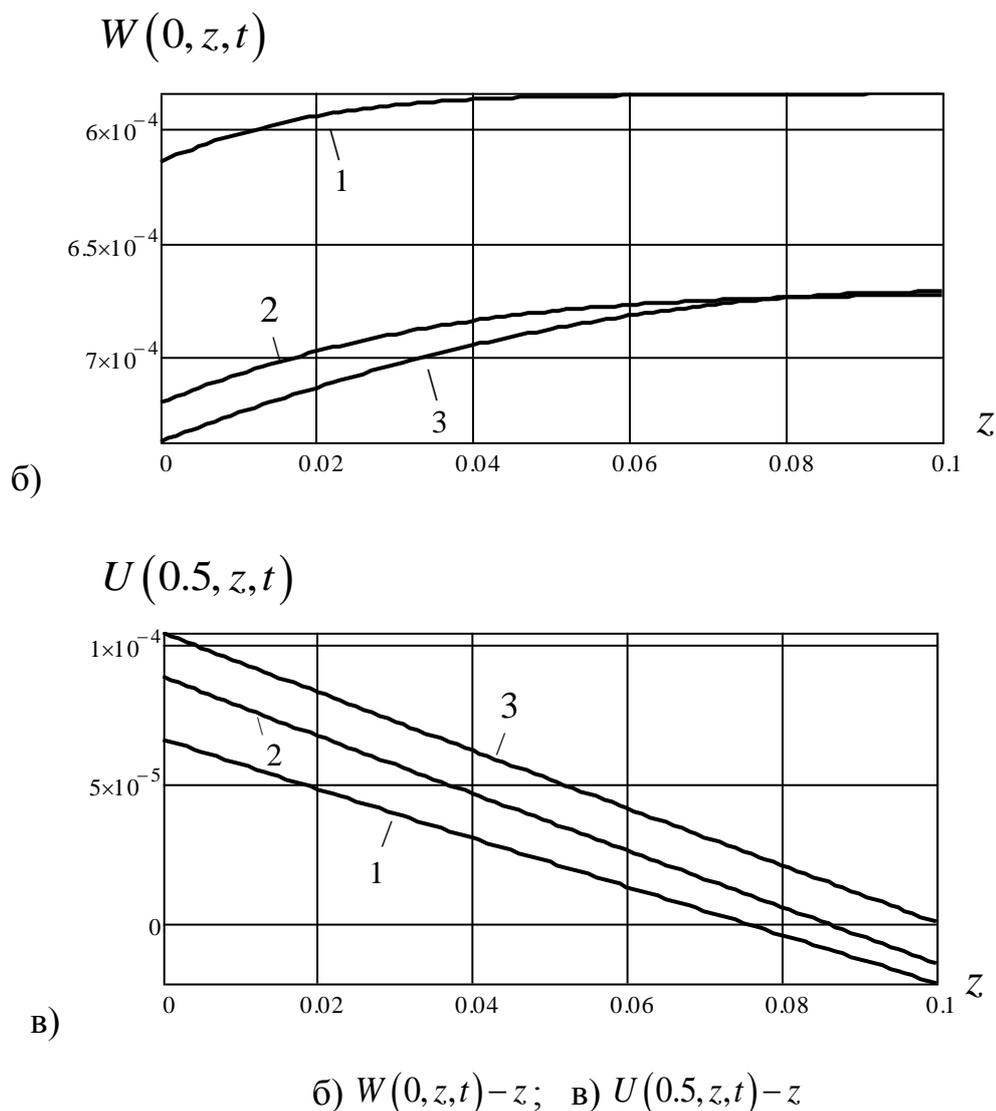


Рисунок 3.1 – Графики изменения компонент вектора перемещений по высоте пластины:  $h=0.1$ ,  $1-t=t_{\max}$ ,  $2-t=2t_{\max}$ ,  $3-t=10t_{\max}$  ( $t_{\max}^* = 50$  с)

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- 1) При достижении температурной нагрузки максимального значения  $T_{\max}^*$  ( $t_{\max}^* = 50$  с) ее срединная поверхность при  $r=0$  в более тонкой пластине ( $h=0.1$ ) прогревается на  $9^{\circ}\text{C}$  (рисунок 3.1, а, график 1), однако в случае  $h=0.2$  – в данной плоскости температура остается первоначальной (рисунок 3.2, а, график 1). В последующем при  $\omega_1^*(0, t) = T_{\max}^* H(t - t_{\max})$  прогрев всей пластины (установившийся температурный режим) наблюдается для  $h=0.1$ , когда  $t = 10t_{\max}$  (рисунок 3.1, а, график 3), и при  $h=0.2$  –  $t = 20t_{\max}$  (рисунок 3.2, а, график 3);

2) В результате действия температурной нагрузки (3.34) компоненты вектора перемещений  $W(0, z, t)$ ,  $U(0.5, z, t)$  увеличивается в течение времени и принимают максимальные значения при установившемся температурном режиме в теле конструкции (рисунок 3.1, 3.2, б, в). При этом в период времени  $t = t_{\max}$  деформации в вертикальной плоскости наблюдаются только в верхней области лицевой поверхности (рисунок 3.1, 3.2, б, график 1);

3) В произвольный момент времени перемещения  $U(0.5, z, t)$  по высоте сечения изменяются по линейной зависимости (рисунок 3.1, 3.2, в), т.е. при решении задач термоупругости с помощью прикладных теорий для расчета тонких пластин можно использовать гипотезу плоских сечений. В начальный период действия температурной нагрузки верхняя часть пластины в результате ее деформации испытывает сжатие, а нижняя – растяжение (рисунок 3.1, 3.2, в, графики 1, 2). При установившемся температурном режиме вся пластина сжата, при этом радиальные перемещения на нижней лицевой поверхности отсутствуют (рисунок 3.1, 3.2, в, графики 3).

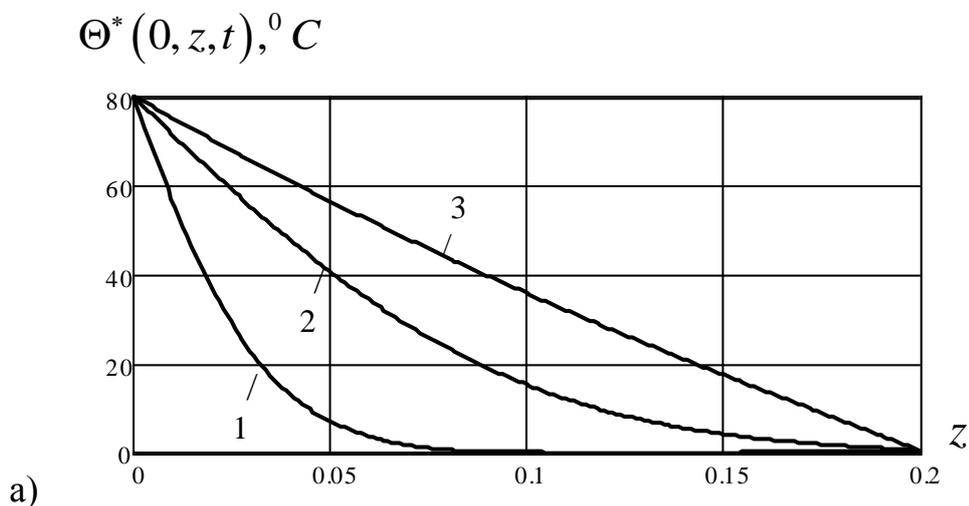


Рисунок 3.2 – Графики изменения температуры по высоте пластины:  $h = 0.2$ ,

$$1 - t = t_{\max}, 2 - t = 5t_{\max}, 3 - t = 20t_{\max} \quad (t_{\max}^* = 50 \text{ с})$$

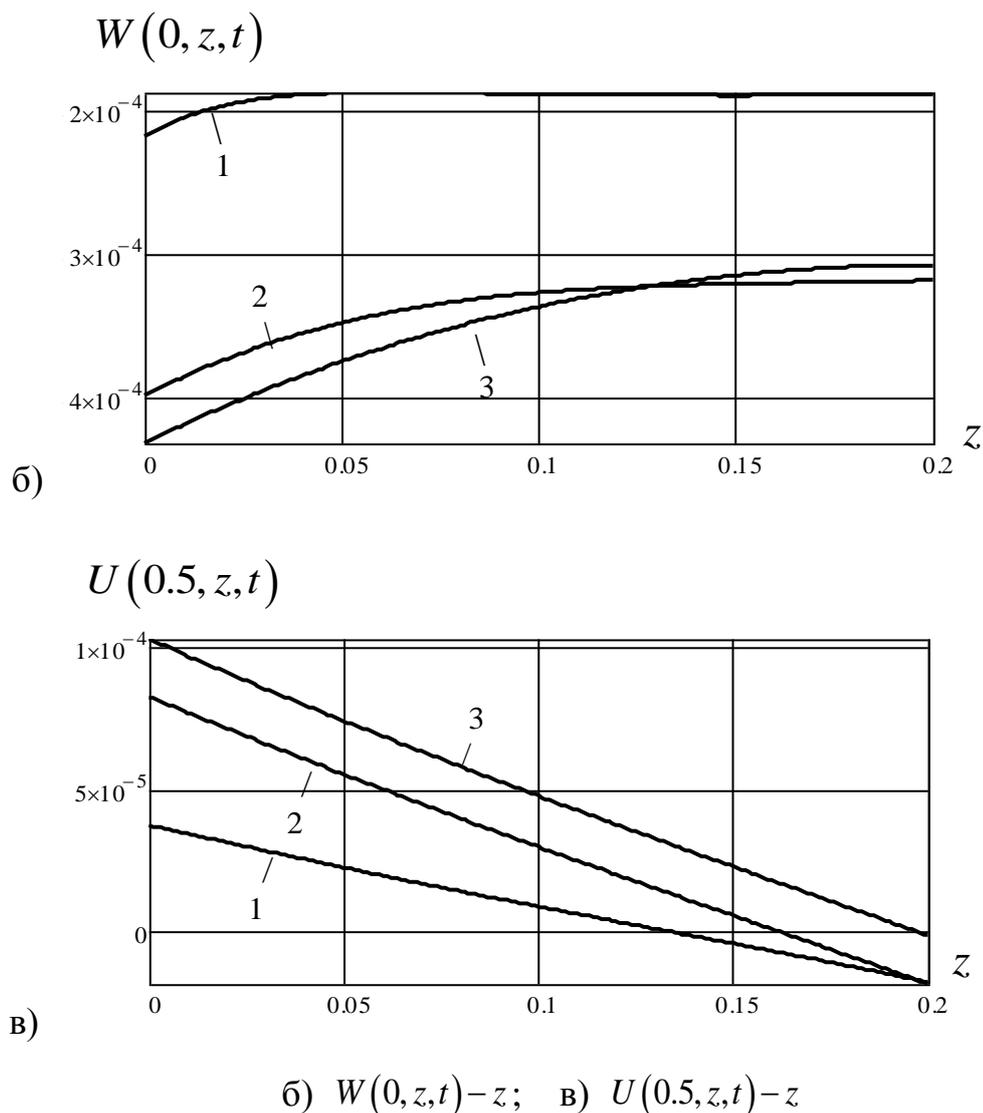


Рисунок 3.2 – Графики изменения компонент вектора перемещений по высоте пластины:  $h=0.2$ ,  $1-t=t_{\max}$ ,  $2-t=5t_{\max}$ ,  $3-t=20t_{\max}$  ( $t_{\max}^* = 50$  с)

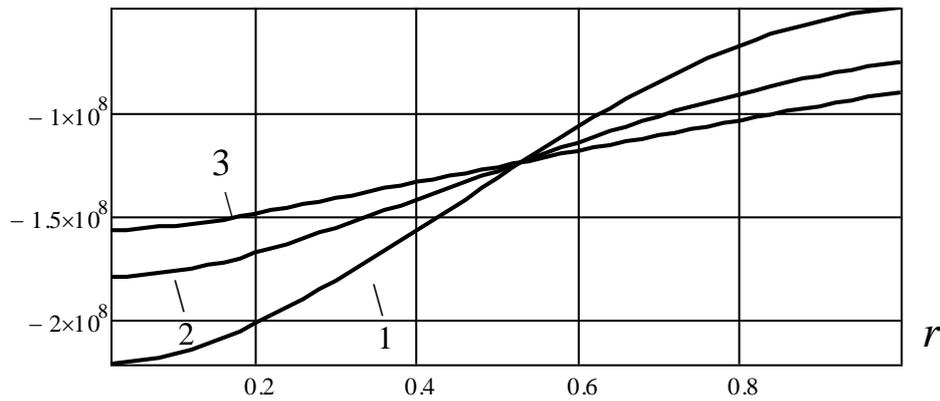
На рисунках 3.3, 3.4 показаны графики изменения напряжений  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r, 0, t)$  по радиальной координате для пластин толщиной  $h=0.1, 0.2$  в различные моменты времени ( $t_{\max}^* = 10$  с). Здесь можно сделать следующие выводы:

1) Численные значения радиальных  $\sigma_{rr}$  и окружных  $\sigma_{\theta\theta}$  нормальных напряжений на верхней лицевой поверхности не зависят от толщины пластины и имеют максимальные значения при достижении нагрузки наибольшего значения  $t = t_{\max}$ ;

2) Значения радиальных и окружных напряжений в пластине практически одинаковые.

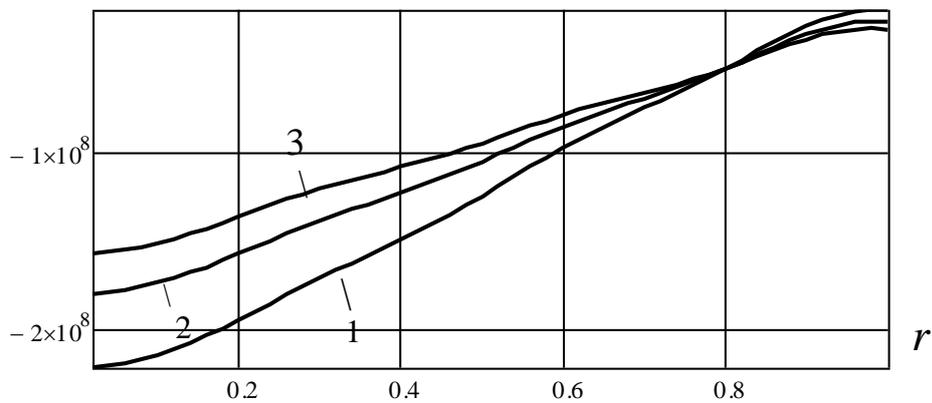
3) Максимальные напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  наблюдаются на верхней лицевой поверхности в центре пластины.

$$\sigma_{rr}(r, 0, t), \text{ Па}$$



а)

$$\sigma_{\theta\theta}(r, 0, t), \text{ Па}$$



б)

$$\text{а) } \sigma_{rr}(r, 0, t) - r; \quad \text{б) } \sigma_{\theta\theta}(r, 0, t) - r$$

Рисунок 3.3 – Графики изменения напряжений по радиальной координате:

$$h = 0.1, \quad 1 - t = t_{\max}, \quad 2 - t = 5t_{\max}, \quad 3 - t = 50t_{\max} \quad (t_{\max}^* = 10 \text{ с})$$

Кроме того, на нижней плоскости ( $z = h$ ) напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  равны нулю при установившемся температурном режиме, т.е. при данном температурном воздействии (3.34) в данный момент времени нейтральная поверхность находится на нижней лицевой поверхности пластины.

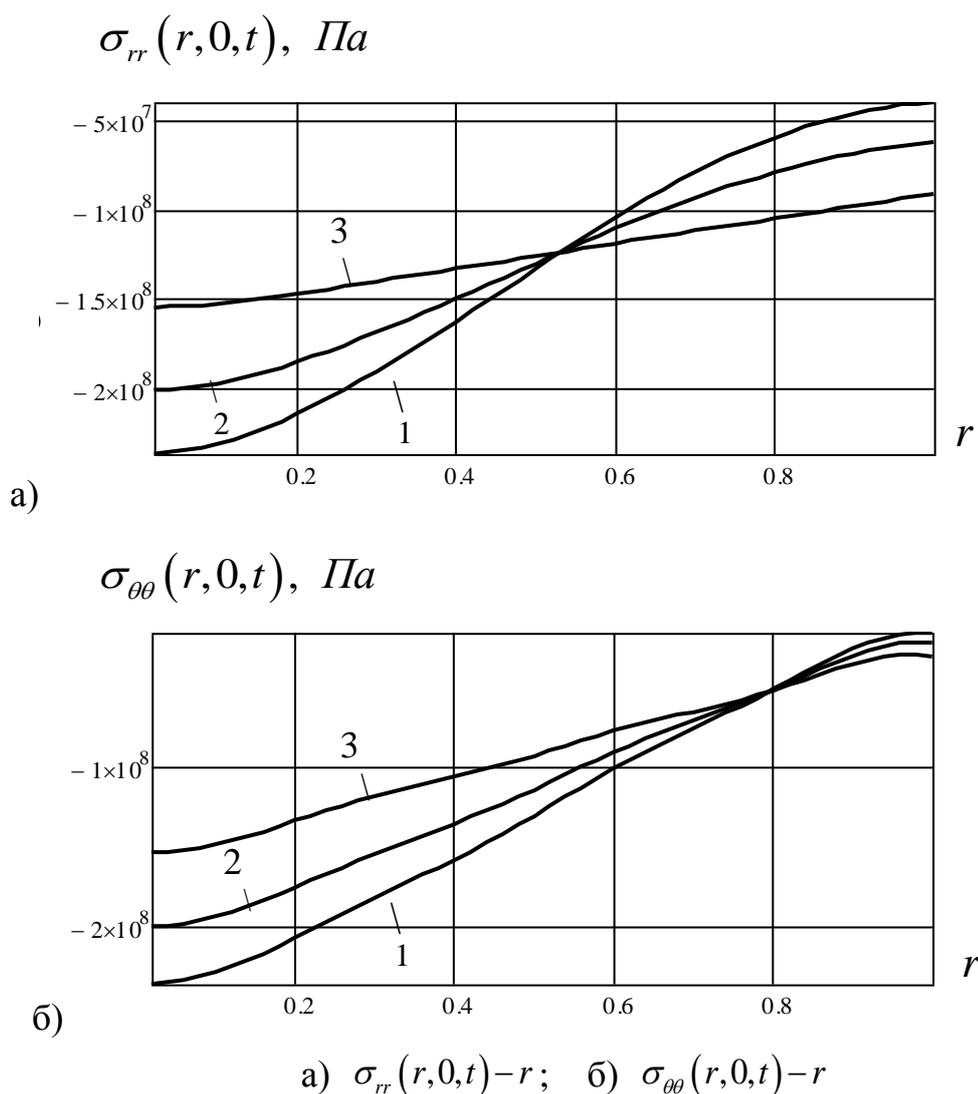


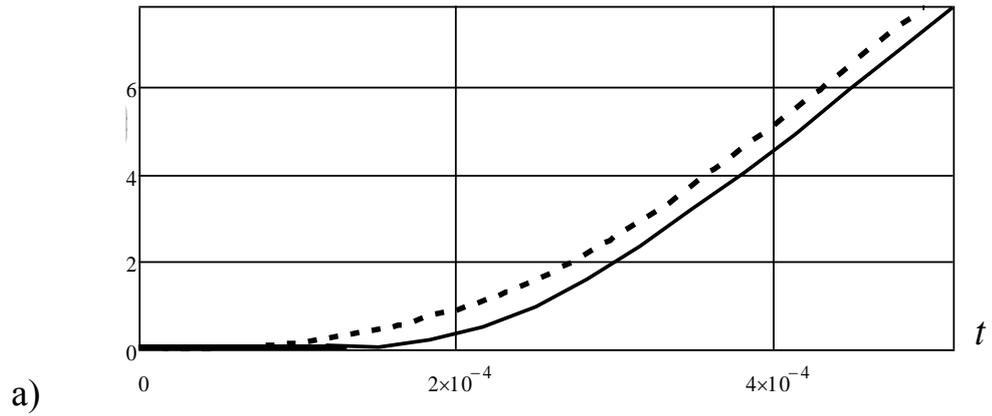
Рисунок 3.4 – Графики изменения напряжений по радиальной координате:

$$h=0.2, 1-t=t_{\max}, 2-t=7t_{\max}, 3-t=100t_{\max} (t_{\max}^*=10 \text{ с})$$

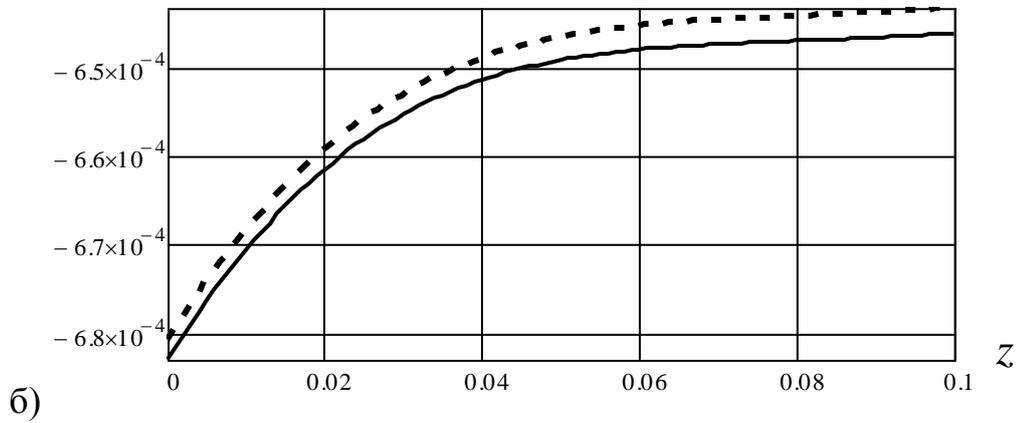
На рисунках 3.5, 3.6 показаны графики изменения температуры и компонент вектора перемещений ( $h=0.1$ ,  $h=0.2$ ) с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей.

При этом для пластины толщиной  $h=0.1$  наблюдается уменьшение вертикальных перемещений (рисунок 3.5, б) и рост радиальных перемещений (рисунок 3.5, в), то в случае  $h=0.2$  наблюдается противоположная картина (рисунок 3.6, б, в).

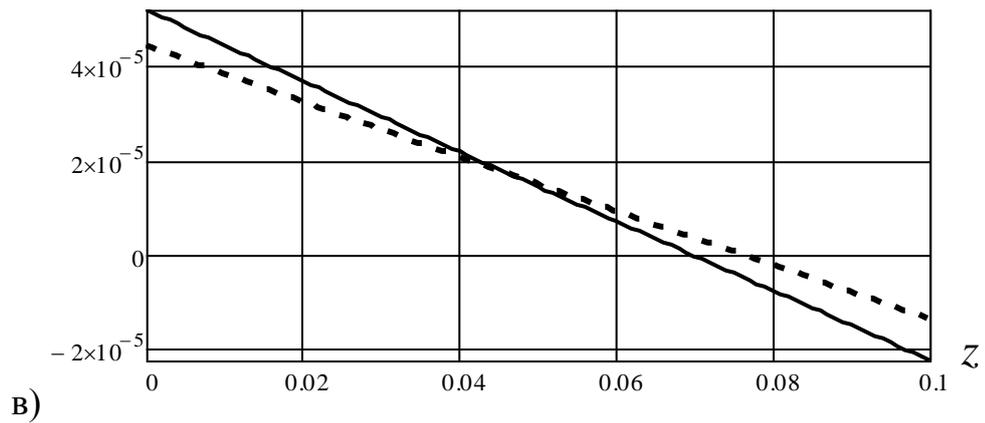
$$\Theta^* \left( 0, \frac{h}{2}, t \right), ^\circ C$$



$$W(0, z, 5t_{\max})$$



$$U(0.5, z, 2t_{\max})$$

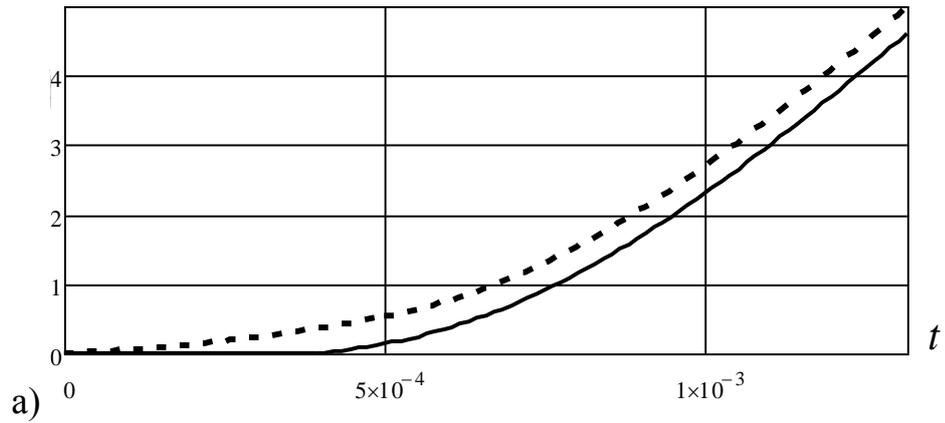


а)  $\Theta^*(0, z, t) - t$ ; б)  $W(0, z, t) - z$ ; в)  $U(0.5, z, t) - z$

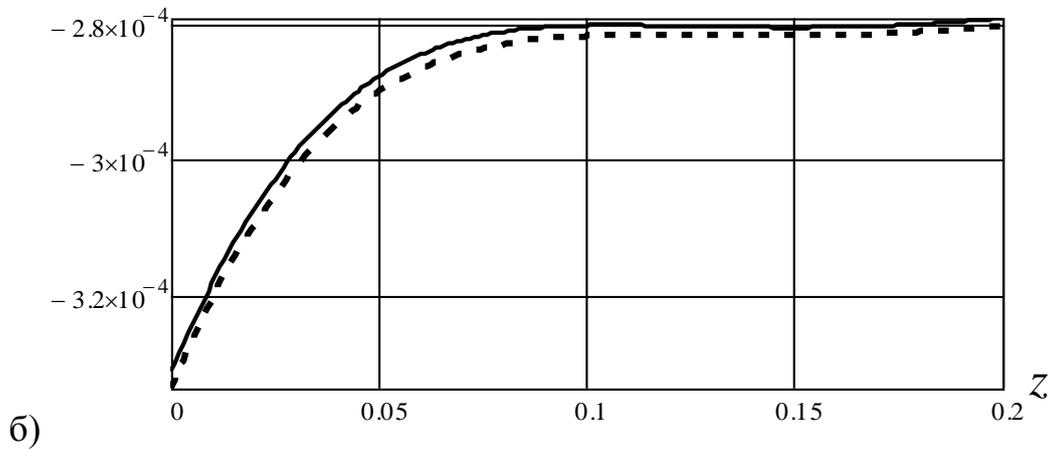
Рисунок 3.5 – Графики изменения температуры и перемещений с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих

полей :  $h = 0.1$ ,  $t_{\max}^* = 10$  с

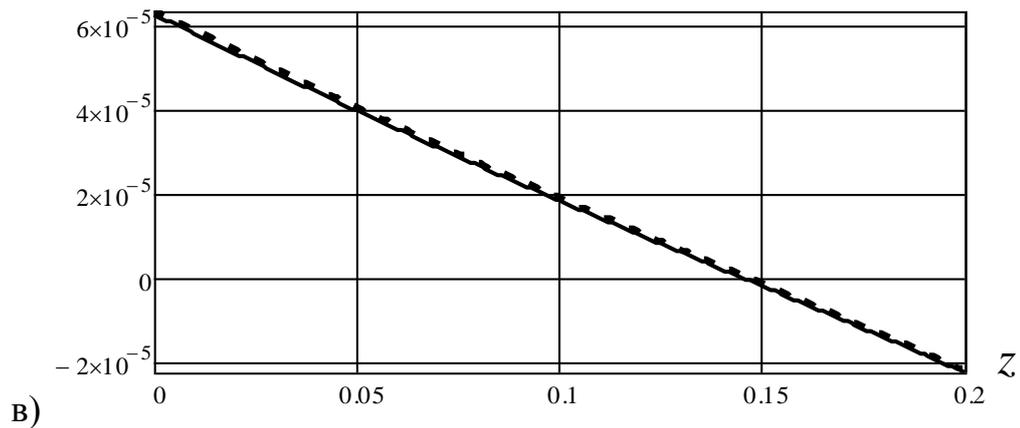
$$\Theta^* \left( 0, \frac{h}{2}, t \right), ^\circ C$$



$$W(0, z, 10t_{\max})$$



$$U(0.5, z, 10t_{\max})$$



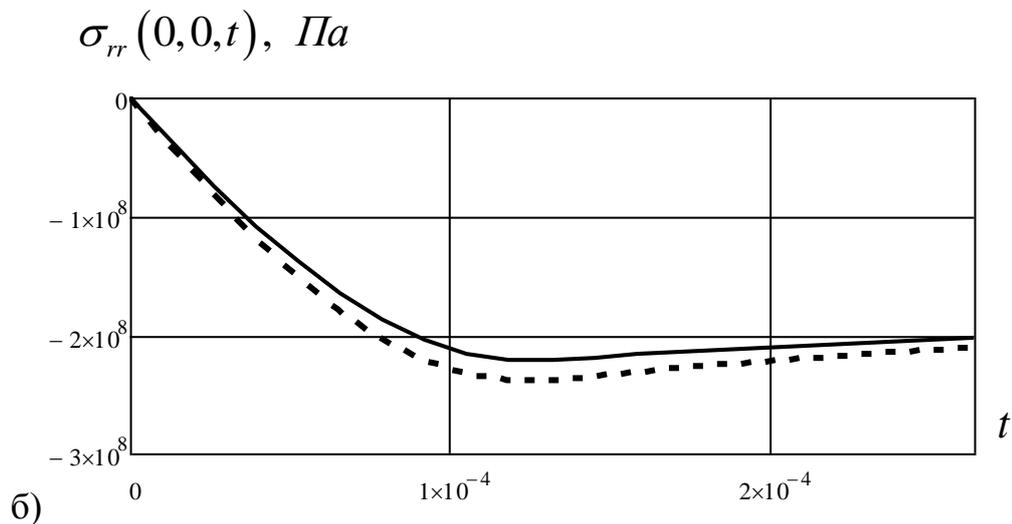
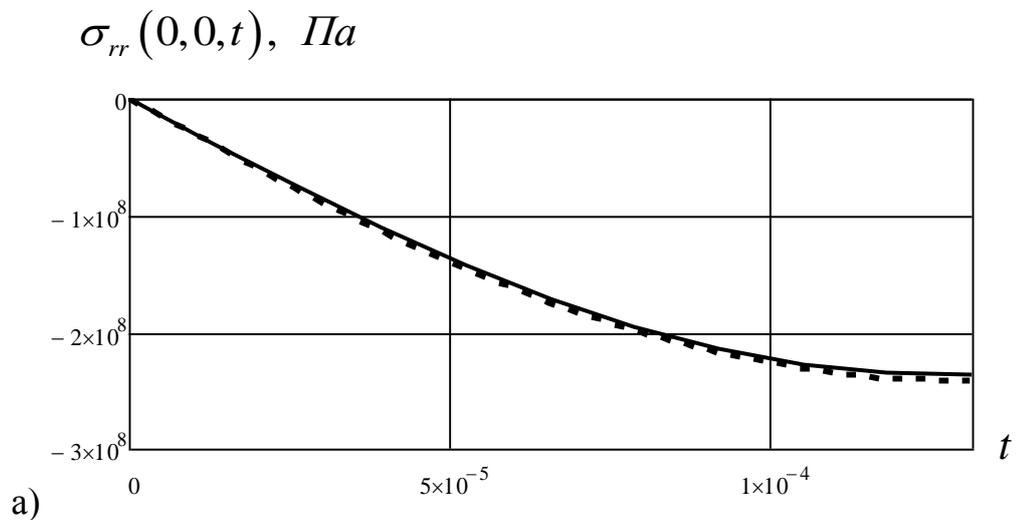
а)  $\Theta^*(0, z, t) - t$ ; б)  $W(0, z, t) - z$ ; в)  $U(0.5, z, t) - z$

Рисунок 3.6 – Графики изменения температуры и перемещений с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих

полей:  $h = 0.2$ ,  $t_{\max}^* = 10$  с

В рассматриваемом диапазоне изменения толщины пластины, учет связанности термоупругих полей приводит к более медленному ее прогреву в течение времени (рисунок 3.5, 3.6, а), что влияет на численные значения перемещений.

На рисунках 3.7 представлены зависимости изменения по времени радиальной компоненты нормальных напряжений  $\sigma_{rr}(0,0,t)$  по времени с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей для пластин различной толщины ( $h=0.2, 0.1, 0.05$ ).



а)  $h=0.2$ ; б)  $h=0.1$ ;

Рисунок 3.7 – Графики изменения напряжений с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей:  $t_{\max}^* = 10 \text{ с}$

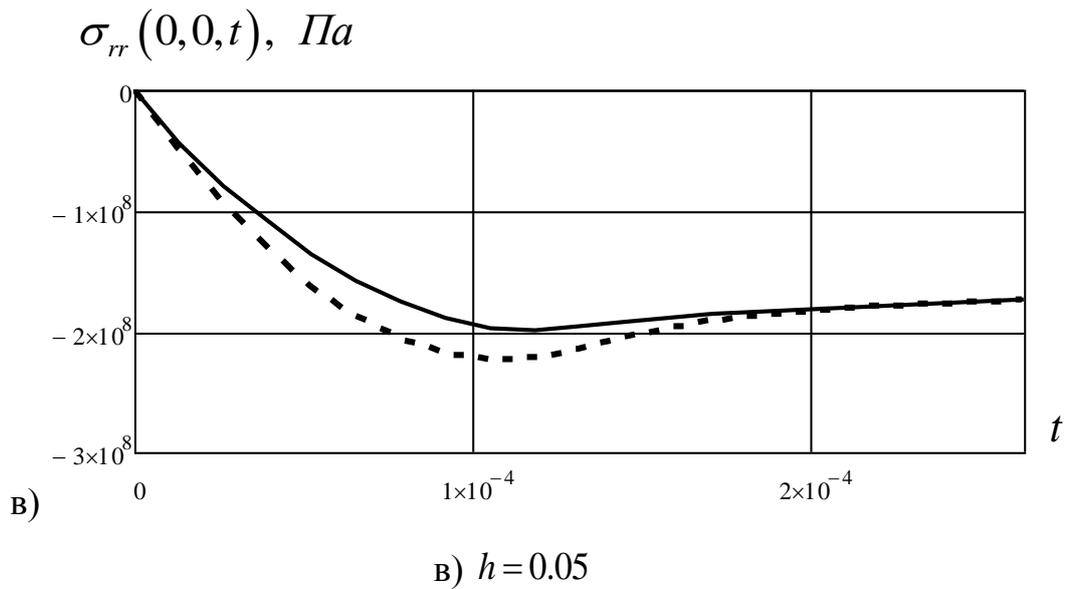


Рисунок 3.7 – Графики изменения напряжений с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей:  $t_{\max}^* = 10 \text{ с}$

Результаты расчета показывают, что учет связанности полей приводит к уменьшению напряжений. Причем разница в напряжениях увеличивается с уменьшением толщины упругой системы, т. е с увеличением скорости изменения ее объема, и достигает 15% при  $h = 0.05$  и  $t = t_{\max}$ .

## 4 СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

В настоящей главе построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи для жестко закрепленной круглой многослойной пластины в случае изменения температуры на ее верхней лицевой поверхности (граничные условия 1–го рода) и учете конвекционного теплообмена нижней лицевой поверхности с окружающей средой (граничные условия 3–рода).

Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает линейные уравнения равновесия и теплопроводности (классическая теория) в пространственной постановке, в предположении, что при анализе работы исследуемой конструкции можно пренебречь их инерционными упругими характеристиками.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно–деформированное состояние и характер распределения температурного поля в жестко закрепленной круглой многослойной пластине при произвольном по времени осесимметричном внешнем температурном воздействии на верхней лицевой поверхности.

### 4.1. Постановка задачи

Пусть круглая многослойная, состоящая из « $m$ » слоев, жестко закрепленная пластина занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ . Рассматривается случай изменения температуры  $\omega_1^*(r_*, t_*)$  на ее верхней ( $z_* = 0$ ) лицевой поверхности при заданной температуре внешней среды  $\mathcal{G}^*$  на нижней ( $z_* = h^*$ ) плоскости (рисунок 4.1).

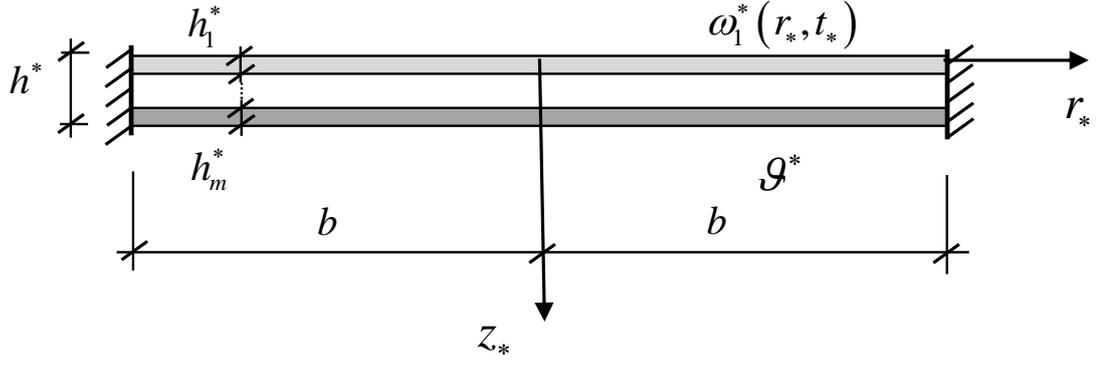


Рисунок 4.1 – Расчетная схема

Разрешающая система дифференциальных осесимметричных уравнений для  $j$ -слоя изотропной среды, а также краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1^{(j)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2^{(j)} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - a_3^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad (4.1)$$

$$a_1^{(j)} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - a_3^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - a_4^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - a_5^{(j)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0;$$

$$r=1 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r}|_{r=1} = 0, \quad U = W = 0; \quad (4.2)$$

$$r=0 \quad \{U, W, \Theta\} < \infty; \quad (4.3)$$

$$z=0 \quad a_6^{(1)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \Theta = \omega_1; \quad (4.4)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \dots h - h_m \quad \{U, W, \Theta\}|_{-z} = \{U, W, \Theta\}|_{+z}, \quad (4.5)$$

$$\left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)|_{-z} = a_8^{(j)} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)|_{+z},$$

$$\left[ \left( a_6^{(j)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_3^{(j)} \Theta \right]|_{-z} = a_7^{(j)} \frac{a_3^{(j)}}{a_3^{(j+1)}} \left[ \left( a_6^{(j+1)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_3^{(j+1)} \Theta \right]|_{+z}, \quad (j=1, 2 \dots m)$$

$$-\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial z}|_{-z} = -\Lambda^{(j+1)} \frac{\partial \Theta}{\partial z}|_{+z};$$

$$z = h \quad a_6^{(m)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - a_3^{(m)} \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (4.6)$$

$$-\Lambda^{(m)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \alpha (\Theta - \mathcal{G});$$

$$t = 0 \quad U = W = \Theta = 0, \quad (4.7)$$

где  $\{U, W, r, h_m, h\} = \{U^*, W^*, r_*, h_m^*, h^*\} / b$ ,  $\{\Theta, \omega_1, \mathcal{G}\} = a_9^{(1)} \{[\Theta^*, \omega_1^*, \mathcal{G}^*] - T_0\}$ ,

$$t = t_* \frac{k^{(1)}}{b^2}, \quad \gamma^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{(1-2\nu^{(j)})} \alpha_t^{(j)}, \quad k^{(j)} = \frac{\Lambda^{(j)}}{c_\varepsilon^{(j)}}, \quad a_1^{(j)} = \frac{(1-2\nu^{(j)})}{2(1-\nu^{(j)})}, \quad a_2^{(j)} = \frac{1}{2(1-\nu^{(j)})}, \quad a_3^{(j)} = \frac{a_9^{(j)}}{a_9^{(1)}}$$

$$a_4^{(j)} = \frac{k^{(1)}}{k^{(j)}}, \quad a_5^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)} T_0}{\Lambda^{(j)}} a_9^{(1)} k^{(1)}, \quad a_6^{(j)} = \frac{\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)}}, \quad a_7^{(j)} = \frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j)}}, \quad a_8^{(j)} = \frac{E^{(j+1)} (1+\nu^{(j)})}{E^{(j)} (1+\nu^{(j+1)})},$$

$$a_9^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)} (1+\nu^{(j)}) (1-2\nu^{(j)})}{E^{(j)} (1-\nu^{(j)})}, \quad U^*(r_*, z_*, t_*), \quad W^*(r_*, z_*, t_*), \quad \Theta^*(r_*, z_*, t_*) - \text{компоненты}$$

вектора перемещений и температура в размерной форме;  $E^{(j)}, \nu^{(j)}$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала  $j$ -го слоя;  $\Lambda^{(j)}, \alpha_t^{(j)}, c_\varepsilon^{(j)}$  – коэффициенты теплопроводности, линейного теплового расширения и объемная теплоемкость материала  $j$ -го слоя;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи материала слоя «m».

Первые два условия (4.4), (4.6) учитывают отсутствие напряжений на лицевых поверхностях упругой системы, а последние соответственно действие температурной нагрузки (граничные условия 1-рода) и конвекционный теплообмен лицевой поверхности с окружающей средой (граничные условия 3-рода). Соотношения (4.5) являются условиями совместности перемещений, напряжений и идеального теплового контакта (граничные условия 4-рода) на поверхности жесткого соединения слоев.

Условия (7) предполагают, что при  $t = 0$  конструкция находится в недеформированном состоянии, а ее температурное поле определяется абсолютной температуре  $T_0$ .

## 4.2 Построение общего решения

Разработанный ниже алгоритм расчета справедлив для упругой системы, состоящей из « $m$ » слоев. Однако для определенности решения принимаем двухслойную конструкцию.

Первоначально, аналогично алгоритму решения, приведенного в главе 3 диссертации, выполняется замена последнее равенство (4.2) на условие:

$$\sigma_{rz|r=1} = \frac{E^{(j)}}{2(1+\nu^{(j)})} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = P_1, \quad (4.8)$$

и вводится функция  $w(r, z, t)$ :

$$W(r, z, t) = a_{10}^{(j)} r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + w(r, z, t), \quad (4.9)$$

где  $P_1(z, t), W_1(t)$  – функции, определяемые из условия  $W(1, z, t) = 0$ ,

$$a_{10}^{(j)} = E^{(j)} (1 + \nu^{(j)})^{-1}$$

Подстановка выражения (4.9) в (4.1) – (4.8) позволяет преобразовать задачу к стандартной форме, в которой уравнения (4.1), первые (4.4), (4.6) и последнее (4.5) граничные условия, а также начальное условие относительно  $w(r, z, t)$  становятся неоднородными с правыми частями  $R_1 \dots R_3, B_1 \dots B_4$ :

$$\{R_1, R_2, R_3\} = -[a_{10}^{(j)}]^{-1} \left\{ 2a_2^{(j)} r \frac{\partial}{\partial z}, \left( 4a_1^{(j)} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), a_5^{(j)} r^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \right\} P_1,$$

$$\{B_1, B_2, B_3\} = -r^2 \left\{ \left( a_{10}^{(1)} \right)^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=0}, \left( a_{10}^{(2)} \right)^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=h}, \left[ \left( a_{10}^{(1)} \right)^{-1} \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} \right) \Big|_{-z} - a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)} a_{10}^{(2)}} \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} \right) \Big|_{+z} \right] \right\},$$

$$B_4 = -[a_{10}^{(j)}]^{-1} r^2 P_1(z, 0) - W_1(0).$$

В результате использования (4.8), (4.9) граничные условия при  $r=1$  принимают вид:

$$r=1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (4.10)$$

Применение в дальнейшем к краевой задаче относительно  $U, w, \Theta$  преобразования Ханкеля:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (4.11)$$

$$\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (4.12)$$

$$\{w(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t)\}}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

позволяет получить следующую задачу относительно трансформант  $u_H, w_H, \phi_H$ :

$$-j_n^2 u_H + a_1^{(j)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3^{(j)} j_n \phi_H = R_{1H}, \quad (4.13)$$

$$-a_1^{(j)} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_3^{(j)} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = R_{2H},$$

$$-j_n^2 \phi_H + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( a_4^{(j)} \phi_H + a_5^{(j)} j_n u_H + a_5^{(j)} \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) = R_{3H};$$

$$z=0 \quad a_6^{(1)} j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H} + \omega_{1H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad \phi_H = \omega_{1H}; \quad (4.14)$$

$$z=h_1 \quad \{u_H, w_H, \phi_H\} \Big|_{-z} = \{u_H, w_H, \phi_H\} \Big|_{+z}, \quad -\Lambda^{(1)} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \Big|_{-z} = -\Lambda^{(2)} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \Big|_{+z}, \quad (4.15)$$

$$\left( \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) \Big|_{-z} = a_8^{(1)} \left( \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) \Big|_{+z},$$

$$\left[ \left( a_6^{(1)} \nabla U + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - a_3^{(1)} T \right] \Big|_{-z} - a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[ a_6^{(2)} \nabla U + \frac{\partial w}{\partial z} - a_3^{(2)} T \right] \Big|_{+z} = B_{3H};$$

$$z = h \quad a_6^{(2)} j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} - a_3^{(2)} \phi_H = B_{2H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + \phi_H = \mathcal{G}_H;$$

$$t = 0 \quad u_H = \phi_H = 0, \quad w_H = B_{4H}, \quad (4.17)$$

где  $j_n$  – положительные нули функции  $J_1(j_n)$  ( $n = \overline{0, \infty}$ ;  $j_0 = 0$ ),  $R_{1H} = \int_0^1 R_1 r J_1(j_n r) dr$ ,

$$\{R_{2H}, R_{3H}, B_{1H} \dots B_{4H}, \omega_{1H}, \mathcal{G}_H\} = \int_0^1 \{R_2, R_3, B_1 \dots B_4, \omega_1, \mathcal{G}\} r J_0(j_n r) dr.$$

Граничные условия (4.14) – (4.16) приводятся к однородным при использовании соотношений:

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad (4.18)$$

$$w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad \phi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + L_H(n, z, t),$$

где  $\{H_1, H_2\} = \{f_1(z), f_2(z)\} \omega_{1H}(t) + \{f_3(z), f_4(z)\} \mathcal{G}_H + \{f_5(z), f_6(z)\} B_{1H}(0, t)$

$$+ \{f_7(z), f_8(z)\} B_{2H}(h, t) + \{f_9(z), f_{10}(z)\} B_{3H}(h_1, t), \quad H_3 = f_{11}(z) \omega_{1H}(t) + f_{12}(z) \mathcal{G}_H,$$

$f_1(z) \dots f_{12}(z)$  – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (4.18) в (4.13) – (4.17) при введении дополнительных ограничений на функции  $H_1(n, z, t), H_2(n, z, t), H_3(n, z, t)$ :

$$z = 0 \quad a_6^{(1)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} = B_{1H} + \omega_{1H}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 = 0, \quad H_3 = \omega_{1H}; \quad (4.19)$$

$$z = h_1 \quad \{H_1, H_2, H_3\}_{|_{-z}} = \{H_1, H_2, H_3\}_{|_{+z}}, \quad -\Lambda^{(1)} \frac{\partial H_3}{\partial z}_{|_{-z}} = -\Lambda^{(2)} \frac{\partial H_3}{\partial z}_{|_{+z}},$$

$$\left( \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 \right)_{|_{-z}} = a_8^{(1)} \left( \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 \right)_{|_{+z}},$$

$$\left[ a_6^{(1)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(1)} H_3 \right]_{|_{-z}} - a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[ a_6^{(2)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(2)} H_3 \right]_{|_{+z}} = B_{3H};$$

$$z = h \quad a_6^{(2)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(2)} H_3 = B_{2H}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 = 0,$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial H_3}{\partial z} + H_3 = \mathfrak{G}_H;$$

позволяет преобразовать задачу (4.13) – (4.17) относительно  $U_H, W_H, L_H$ :

$$-j_n^2 U_H + a_1^{(j)} \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3^{(j)} j_n L_H = F_{1H}, \quad (4.20)$$

$$-a_1^{(j)} j_n^2 W_H + \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_3^{(j)} \frac{\partial L_H}{\partial z} = F_{2H},$$

$$-j_n^2 L_H + \frac{\partial^2 L_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( a_4^{(j)} L_H + a_5^{(j)} j_n U_H + a_5^{(j)} \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) = F_{3H};$$

$$z = 0 \quad a_6^{(1)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad L_H = 0; \quad (4.21)$$

$$z = h_1 \quad \{U_H, W_H, L_H\}_{|_{-z}} = \{U_H, W_H, L_H\}_{|_{+z}}, \quad \Lambda^{(1)} \frac{\partial L_H}{\partial z}_{|_{-z}} = \Lambda^{(2)} \frac{\partial L_H}{\partial z}_{|_{+z}}, \quad (4.22)$$

$$\left( \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H \right)_{|_{-z}} = a_8^{(1)} \left( \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H \right)_{|_{+z}},$$

$$\left[ a_6^{(1)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(1)} L_H \right]_{|_{-z}} - a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[ a_6^{(2)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(2)} L_H \right]_{|_{+z}} = 0;$$

$$z = h \quad a_6^{(2)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(2)} L_H = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial L_H}{\partial z} + L_H = 0;$$

$$t = 0 \quad U_H = u_{0H}, \quad W_H = w_{0H}, \quad L_H = l_{0H}, \quad (4.24)$$

где  $F_{1H} = R_{1H} + j_n^2 H_1 - a_1^{(j)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(j)} j_n H_3$ ,

$$F_{2H} = R_{2H} + a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_3^{(j)} \frac{\partial H_3}{\partial z},$$

$$F_{3H} = R_{3H} + j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( a_4^{(j)} H_3 + a_5^{(j)} j_n H_1 + a_5^{(j)} \frac{\partial H_2}{\partial z} \right),$$

$$u_{0H} = -H_1, \quad w_{0H} = B_{4H} - H_2, \quad l_{0H} = -H_3.$$

Краевая задача (4.20) – (4.24) решается при использовании вырожденного биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [135–140] путем введения КИП на сегменте  $[0, h]$  с неизвестными компонентами собственных вектор–функций ядер преобразований  $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$  :

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \left[ a_5^{(j)} j_n U_H(n, z, t) + a_5^{(j)} \frac{dW_H(n, z, t)}{dz} + a_4^{(j)} L_H(n, z, t) \right] K_3(\lambda_{in}, z) dz, \quad (4.25)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), L_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (4.26)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_3(\lambda_{in}, z) N_3(\mu_{in}, z) dz,$$

где  $\lambda_{in}, \mu_{in}$  – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных  $K_k(\lambda_{in}, z)$  и инвариантных  $N_k(\mu_{in}, z)$  компонент вектор–функций ядер КИП ( $k = 1, 2, 3$ ).

Принимая во внимание кусочно–гладкий характер функций  $U_H(n, z, t)$ ,  $W_H(n, z, t), L_H(n, z, t)$  и представляя их в виде:

$$U_H(n, z, t) = U_H^{(1)}(n, z, t) H(h_1 - z) + U_H^{(2)}(n, z, t) H(z - h_1), \quad (4.27)$$

$$W_H(n, z, t) = W_H^{(1)}(n, z, t) H(h_1 - z) + W_H^{(2)}(n, z, t) H(z - h_1),$$

$$L_H(n, z, t) = L_H^{(1)}(n, z, t) H(h_1 - z) + L_H^{(2)}(n, z, t) H(z - h_1),$$

подвергаем систему уравнений (4.20) и краевые условия (4.21) – (4.24) вырожденному КИП [135–140] в соответствии со структурным алгоритмом.

В результате получаем задачу для трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$ :

$$\frac{dG_{in}}{dt} + \lambda_{in} G_{in} = F_H ; \quad (i = \overline{1, \infty} \quad n = \overline{0, \infty}); \quad (4.28)$$

$$t = 0 \quad G_{in} = G_{0H}(n, z);$$

решение которой имеет вид:

$$G_{in} = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_{in}(\tau - t) d\tau, \quad (4.29)$$

а также две однородные задачи относительно  $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z)$ :

$$-j_n^2 K_{1in}^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{d^2 K_{1in}^{(j)}}{dz^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} + \lambda_{in} a_5^{(j)} j_n K_{3in}^{(j)} = 0, \quad (4.30)$$

$$-a_1^{(j)} j_n^2 K_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(j)}}{dz^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{dK_{1in}^{(j)}}{dz} - \lambda_{in} a_5^{(j)} \frac{dK_{3in}^{(j)}}{dz} = 0,$$

$$(\lambda_{in} a_4^{(j)} - j_n^2) K_{3in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{3in}^{(j)}}{dz^2} + a_3^{(j)} j_n K_{1in}^{(j)} + a_3^{(j)} \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} = 0;$$

$$z = 0 \quad a_1^{(1)} \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} + (a_6^{(1)} - a_2^{(1)}) j_n K_{2in}^{(1)} = 0, \quad \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} + (a_2^{(1)} - a_1^{(1)}) j_n K_{1in}^{(1)} = 0, \quad K_{3in}^{(1)} = 0; \quad (4.31)$$

$$z = h_1 \quad \{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\} = \{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\}, \quad \Lambda^{(1)} \frac{dK_{3in}^{(1)}}{dz} = \Lambda^{(2)} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz},$$

$$(a_2^{(1)} - a_1^{(1)}) j_n K_{1in}^{(1)} + \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} = a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[ (a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) j_n K_{1in}^{(2)} + \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} \right],$$

$$\left[ (a_2^{(1)} - a_6^{(1)}) j_n K_{2in}^{(1)} - a_1^{(1)} \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} \right] = a_8^{(1)} \frac{a_1^{(1)}}{a_1^{(2)}} \left[ (a_2^{(2)} - a_6^{(2)}) j_n K_{2in}^{(2)} - a_1^{(2)} \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} \right],$$

$$z = h \quad a_1^{(2)} \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} + (a_6^{(2)} - a_2^{(2)}) j_n K_{2in}^{(2)} = 0, \quad \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} + (a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) j_n K_{1in}^{(2)} = 0,$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz} + K_{3in}^{(2)} = 0;$$

и  $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$ :

$$\begin{aligned} -j_n^2 N_{1in}^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{d^2 N_{1in}^{(j)}}{dz^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + a_3^{(j)} j_n N_{3in}^{(j)} &= 0, \\ -a_1^{(j)} j_n^2 N_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{2in}^{(j)}}{dz^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - a_3^{(j)} \frac{dN_{3in}^{(j)}}{dz} &= 0, \\ -j_n^2 N_{3in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{3in}^{(j)}}{dz^2} + \mu_{in} \left( a_5^{(j)} j_n N_{1in}^{(j)} + a_5^{(j)} \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + a_4^{(j)} N_{3in}^{(j)} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$z=0 \quad a_6^{(j)} j_n N_{1in}^{(j)} + \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} = 0, \quad \frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - j_n N_{2in}^{(j)} = 0, \quad N_{3in}^{(j)} = 0; \quad (4.33)$$

$$z = h_1 \quad \left\{ N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)} \right\} = \left\{ N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)} \right\}, \quad j_n N_{2in}^{(1)} - \frac{dN_{1in}^{(1)}}{dz} = a_8^{(1)} \left[ j_n N_{2in}^{(2)} - \frac{dN_{1in}^{(2)}}{dz} \right],$$

$$a_6^{(1)} j_n N_{1in}^{(1)} + \frac{dN_{2in}^{(1)}}{dz} - a_3^{(1)} N_{3in}^{(1)} = a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[ a_6^{(2)} j_n N_{1in}^{(2)} + \frac{dN_{2in}^{(2)}}{dz} - a_3^{(2)} N_{3in}^{(2)} \right],$$

$$\Lambda^{(1)} \frac{dN_{3in}^{(1)}}{dz} = \Lambda^{(2)} \frac{dN_{3in}^{(2)}}{dz};$$

$$z = h \quad a_6^{(2)} j_n N_{1in} + \frac{\partial N_{2in}}{\partial z} - a_3^{(2)} N_{3in} = 0, \quad \frac{\partial N_{1in}}{\partial z} - j_n N_{2in} = 0, \quad \frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial N_{3in}}{\partial z} + N_{3in} = 0;$$

В равенствах (4.28) – (4.33) используются следующие обозначения:

$$\{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} = \{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1),$$

$$\{N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}\} = \{N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \{N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1),$$

$$F_H = -\int_0^h (F_{1H} K_{1in} + F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in}) dz, \quad G_{0H} = \int_0^h \left( a_5^{(j)} j_n u_{0H} + a_5^{(j)} \frac{dw_{0H}}{dz} + a_4^{(j)} l_{0H} \right) K_{3in} dz,$$

$H(\dots)$  – единичная функция Хевисайда.

Системы (4.30), (4.32) приводятся к дифференциальным уравнениям 6-го порядка относительно функций  $K_1^{(j)}(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_1^{(j)}(\mu_{in}, z)$ :

$$\left( \frac{d^6}{dr^6} + b_{1in}^{(j)} \frac{d^4}{dr^4} + b_{2in}^{(j)} \frac{d^2}{dr^2} + b_{3in}^{(j)} \right) \{ K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)} \} = 0, \quad (4.34)$$

которые допускают разложение на коммутативные сомножители 2-го порядка:

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + (A_{in}^{(j)})^2 \right] \left( \frac{d^2}{dz^2} - j_n^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - j_n^2 \right) \{ K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)} \} = 0, \quad (4.35)$$

где  $b_{1in}^{(j)} = \xi_{in} b_4^{(j)} - 3j_n^2$ ,  $b_{2in}^{(j)} = (3j_n^2 - 2\xi_{in} b_4^{(j)}) j_n^2$ ,  $b_{3in}^{(j)} = (\xi_{in} b_4^{(j)} - j_n^2) j_n^4$ ,  $b_4^{(j)} = a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_4^{(j)}$ ,

$\xi_{in} = \lambda_{in}$  и  $\xi_{in} = \mu_{in}$  при решении соответственно задач (4.30), (4.31) и (4.32), (4.33),

$A_{in}^{(j)}$  – действительный корень следующего бикубического уравнения

$$\left[ (A_{in}^{(j)})^2 \right]^3 - b_{1in}^{(j)} \left[ (A_{in}^{(j)})^2 \right]^2 + b_{2in}^{(j)} (A_{in}^{(j)})^2 - b_{3in}^{(j)} = 0. \quad (4.36)$$

Общий интеграл дифференциальных уравнений (4.35) имеет вид:

$$\begin{aligned} \{ K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)} \} = & \{ D_{1in}^{(j)}, E_{1in}^{(j)} \} \sin(A_{in}^{(j)} z) + \{ D_{2in}^{(j)}, E_{2in}^{(j)} \} \cos(A_{in}^{(j)} z) + \{ D_{3in}^{(j)}, E_{3in}^{(j)} \} \exp(j_n z) + \\ & + \{ D_{4in}^{(j)}, E_{4in}^{(j)} \} \exp(-j_n z) + \{ D_{5in}^{(j)}, E_{5in}^{(j)} \} z \exp(j_n z) + \{ D_{6in}^{(j)}, E_{6in}^{(j)} \} z \exp(-j_n z). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Используя связи между компонентами преобразований, полученные в результате приведения (4.30), (4.32) к (4.34), получаем выражения для

$K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)$ :

$$\begin{aligned} K_{2in}^{(j)} = & -D_{1in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \cos(A_{in}^{(j)} z) + D_{2in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \sin(A_{in}^{(j)} z) - D_{3in}^{(j)} \exp(j_n z) + D_{4in}^{(j)} \exp(-j_n z) + \\ & + D_{5in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} - j_n z) \exp(j_n z) + D_{6in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} + j_n z) \exp(-j_n z), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$K_{3in}^{(j)} = \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{\lambda_{in} a_5^{(j)} j_n} \left[ D_{1in}^{(j)} \sin(A_{in}^{(j)} z) + D_{2in}^{(j)} \cos(A_{in}^{(j)} z) \right] - a_3^{(j)} b_{6in}^{(j)} \left[ D_{5in}^{(j)} \exp(j_n z) - D_{6in}^{(j)} \exp(-j_n z) \right],$$

$$N_{2in}^{(j)} = -E_{1in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \cos(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \sin(A_{in}^{(j)} z) - E_{3in}^{(j)} \exp(j_n z) + E_{4in}^{(j)} \exp(-j_n z) +$$

$$+ E_{5in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} - j_n z) \exp(j_n z) + E_{6in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} + j_n z) \exp(-j_n z),$$

$$N_{3in}^{(j)} = \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{a_3^{(j)} j_n} \left[ E_{1in}^{(j)} \sin(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \cos(A_{in}^{(j)} z) \right] - a_5^{(j)} b_{6in}^{(j)} \left[ E_{5in}^{(j)} \exp(j_n z) + E_{6in}^{(j)} \exp(-j_n z) \right],$$

где  $b_5^{(j)} = 1 + \frac{2a_1^{(j)} a_4^{(j)}}{a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_2^{(j)} a_4^{(j)}}, \quad b_{6in}^{(j)} = \frac{2a_1^{(j)}}{\xi_{in} (a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_2^{(j)} a_4^{(j)})}.$

Подстановка (4.37), (4.38) в граничные условия (4.31), (4.33) формирует две системы алгебраических уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{1in}^{(j)} \dots D_{6in}^{(j)}, E_{1in}^{(j)} \dots E_{6in}^{(j)}$  и собственные значения  $\lambda_{in}, \mu_{in}$ .

Окончательные выражения функций  $U(r, z, t), W(r, z, t), \Theta(r, z, t)$  получаются путем применения к трансформанте (4.29) формул обращения (4.26), (4.12), с учетом (4.9), (4.18):

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (4.39)$$

$$W(r, z, t) = \frac{1 + \nu^{(j)}}{E^{(j)}} r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Для вычисления функций  $W_1(t), P_1(z, t), H_1(n, z, t) \dots H_3(n, z, t)$  первоначально рассматривается случай действия температурной нагрузки  $\omega_1, \mathcal{G}$  ( $P_1 = 0$ ). Тогда  $H_1 \dots H_3$  определяются из условия упрощений правых частей (4.20):

$$j_n^2 H_1 - a_1^{(j)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(j)} j_n H_3 = 0,$$

$$a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_3^{(j)} \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0, \quad j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} = 0.$$

В результате формируются две системы уравнений относительно  $f_1(z), f_2(z), f_{11}(z)$  и  $f_3(z), f_4(z), f_{12}(z)$ , которые решаются с учетом условий (4.19).

Функция  $W_1(t)$  определяется из условия  $W(1, h, t) = 0$ :

$$W_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1} \left[ H_2(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2^{(2)}(\mu_{in}, h) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

На следующем этапе решения рассматривается случай действия напряжений  $P_1(z, t)$  ( $\omega_1 = \mathcal{G} = 0$ ). Выполнение условий уравниваемости пластины, парности и неразрывности касательных напряжений:

$$\int_0^h P_1(z, t) dz = 0, \quad P_{|z=0, h_1, h} = 0,$$

позволяют представить  $P_1(z, t)$  в следующем виде:

$$P_1(z, t) = S_0 W_1(t) \left\{ \frac{h-h_1}{h_1} \sin\left(\frac{\pi}{h_1} z\right) H(h_1 - z) - \sin\left[\frac{\pi}{h-h_1}(z-h_1)\right] H(z-h_1) \right\}.$$

Использование следующих дифференциальных уравнений:

$$j_n^2 H_1 - a_1^{(j)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} = 0, \quad a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0,$$

позволяет образовать системы дифференциальных уравнений относительно функций  $f_5(z), f_6(z); f_7(z), f_8(z)$  и  $f_9(z), f_{10}(z)$ , которые решаются с учетом условий (4.19).

Сумма двух результатов расчета позволяет определить постоянную  $S_0$  из условия интегрального равенства нулю вертикальных перемещений

цилиндрической поверхности пластины: 
$$\int_0^h W(1, z, t_{\max}) dz = 0.$$

### 4.3 Численный анализ результатов

Рассматривается случай действия на верхней лицевой поверхности ( $z_* = 0$ ) упругой системы температурной нагрузки

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right],$$

при известной температуре внешней среды  $\vartheta^* = 293 \text{ }^0\text{K}$  ( $20 \text{ }^0\text{C}$ ) (коэффициент теплоотдачи между поверхностью пластины и воздухом  $\alpha = 8.7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ }^0\text{K})$ ).

Здесь  $T_{\max}^*, t_{\max}^*$  – максимальное значение температурной нагрузки и время, при котором тепловое внешнее воздействие достигает наибольшей величины в размерной форме ( $T_{\max}^* = 373 \text{ }^0\text{K}$  ( $100 \text{ }^0\text{C}$ ),  $T_0 = 293 \text{ }^0\text{K}$ , ( $20 \text{ }^0\text{C}$ ),  $t_{\max}^* = 10 \text{ с}$ ).

Двухслойная пластина ( $b = 1 \text{ м}$ ) изготовлена из стали ( $j = 1$ ) и пластика ( $j = 2$ ), имеющая следующие физико–механические характеристики материалов:

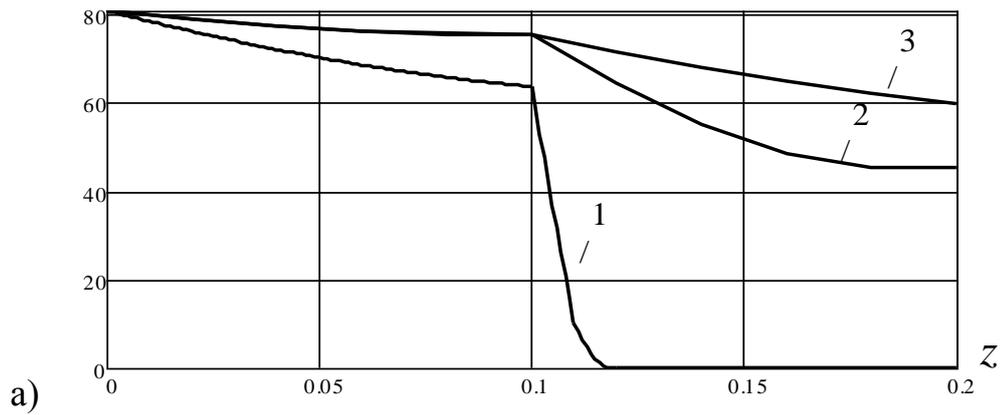
$$\{E^{(1)}, E^{(2)}\} = \{20, 0.33\} \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \{\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}\} = \{50, 0.2\} \text{ Вт}/(\text{м }^0\text{K}),$$

$$\{\nu^{(1)}, \nu^{(2)}\} = \{0.28, 0.33\}, \quad \{c_{\varepsilon}^{(1)}, c_{\varepsilon}^{(2)}\} = \{3.8, 0.23\} \times 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \text{ }^0\text{K}),$$

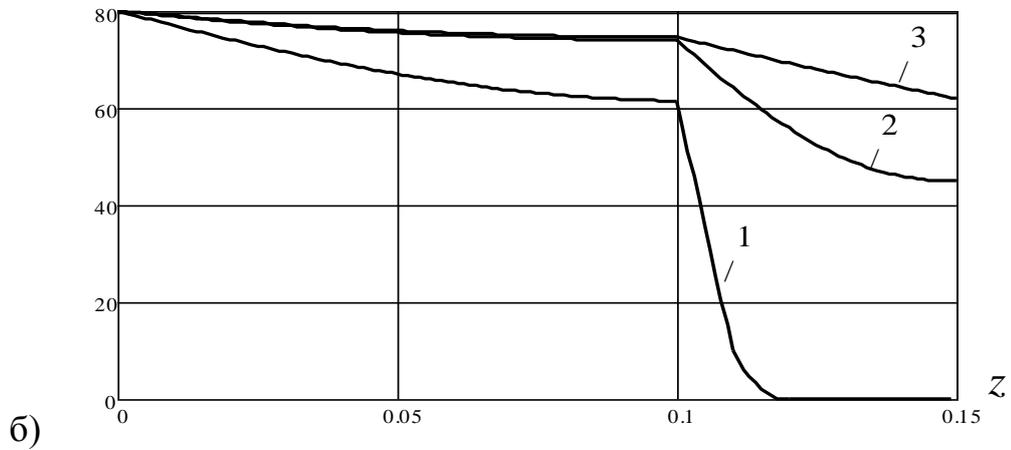
$$\{\alpha_t^{(1)}, \alpha_t^{(2)}\} = \{1.2, 8\} \times 10^{-5} \text{ } 1/^0\text{K}.$$

На рисунках 4.2, 4.3 представлены графики изменения температурного поля  $\Theta^*(0, z, t)$  по пространственным переменным в различные моменты времени  $t$ . Пунктирной линией на рисунке 4.3. обозначено амплитудное значение температурной нагрузки на верхней лицевой поверхности « $\omega_1^*(r, t_{\max}) - T_0$ ».

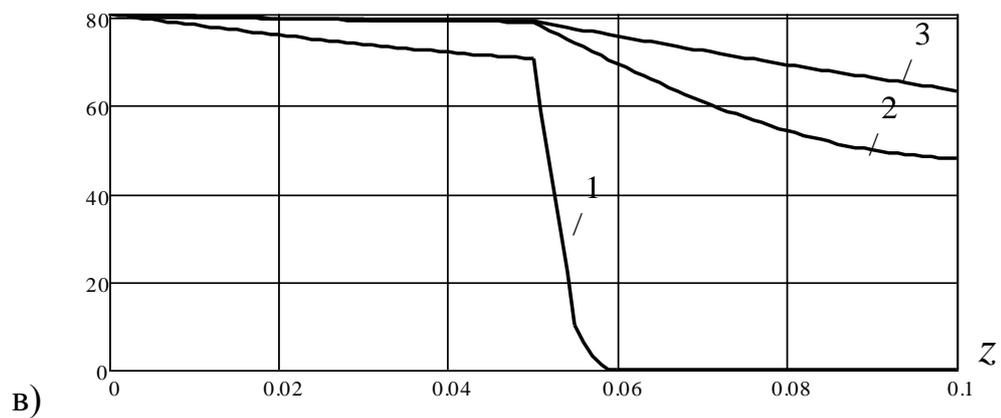
$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



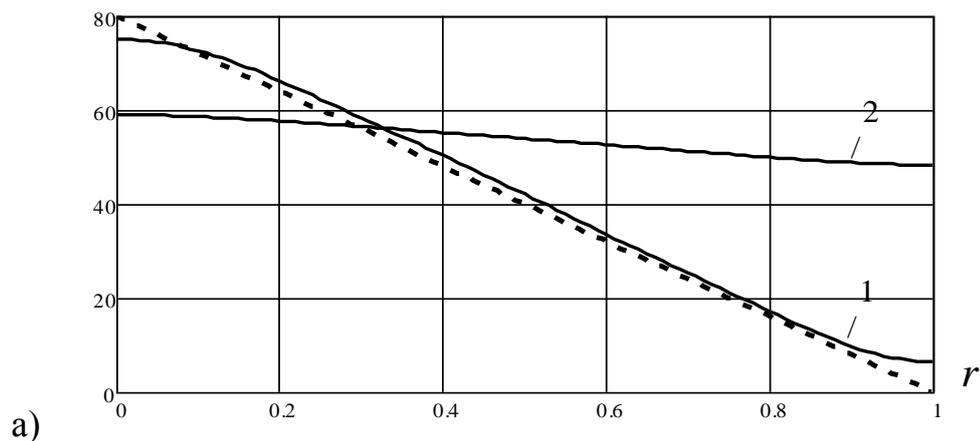
a)  $h_1 = h_2 = 0.1$  ( $1-t = t_{\max}$ ,  $2-t = 550t_{\max}$ ,  $3-t = 1100t_{\max}$ );

б)  $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.05$  ( $1-t = t_{\max}$ ,  $2-t = 300t_{\max}$ ,  $3-t = 750t_{\max}$ );

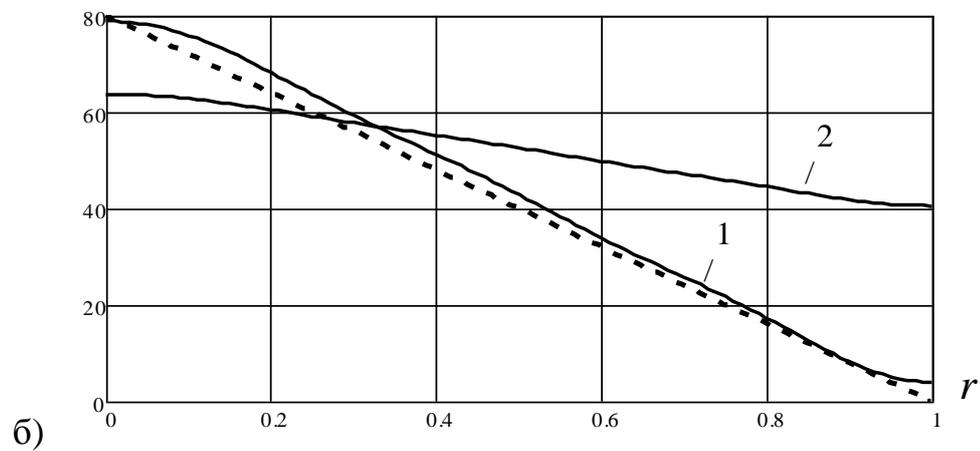
в)  $h_1 = h_2 = 0.05$  ( $1-t = t_{\max}$ ,  $2-t = 150t_{\max}$ ,  $3-t = 300t_{\max}$ )

Рисунок 4.2 – График изменения температуры  $\Theta^*(0, z, t)$  по аксиальной координате  $z$  в различные моменты времени

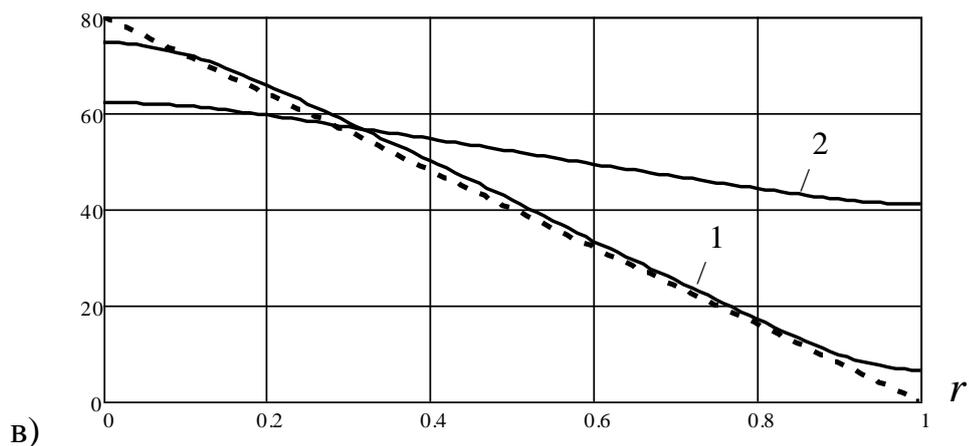
$$\Theta^*(r, z, t), ^\circ C$$



$$\Theta^*(r, z, t), ^\circ C$$



$$\Theta^*(r, z, t), ^\circ C$$



а)  $h_1 = h_2 = 0.1$  ( $t = 1100t_{\max}$ ); б)  $h_1 = 0.1, h_2 = 0.05$  ( $t = 750t_{\max}$ ); в)  $h_1 = h_2 = 0.05$  ( $t = 300t_{\max}$ )

Рисунок 4.3 – График изменения температуры  $\Theta^*(0, z, t)$  по радиальной

координате  $r$  при установившемся температурном режиме

( $1-z = h_1, 2-z = h$ , пунктирная линия – « $\omega_1^*(r, t_{\max}) - T_0$ »)

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы:

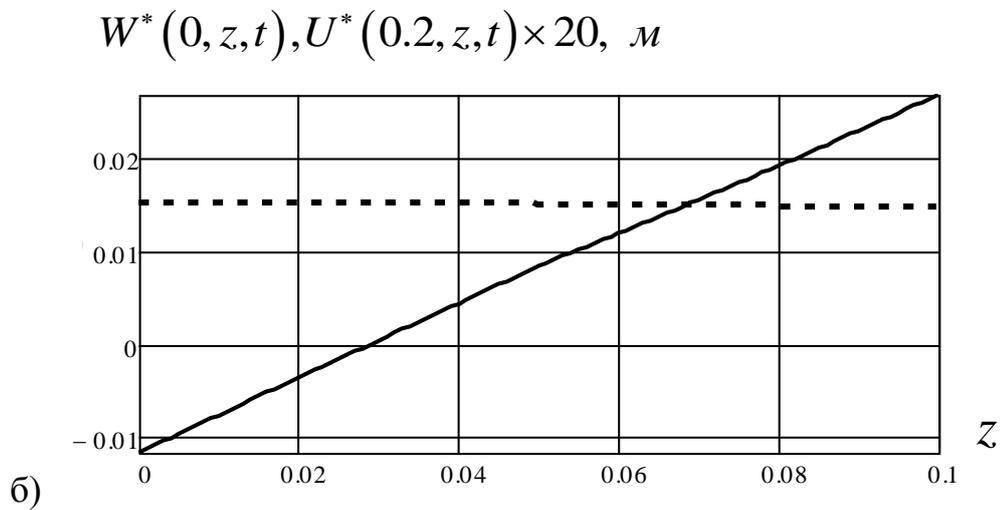
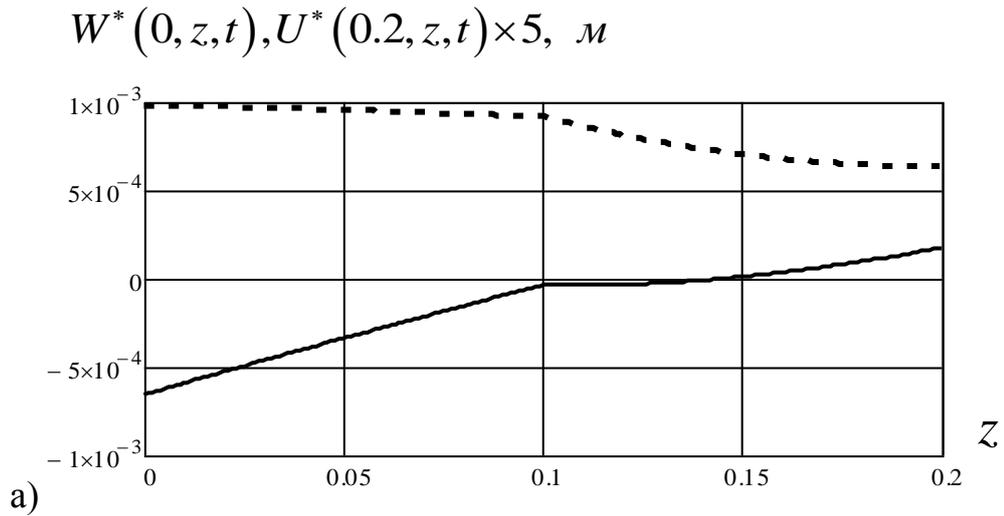
1) При достижении температурной нагрузки максимальных значений  $t = t_{\max}$ , вследствие большой теплопроводности металла, на внутренней поверхности стальной части пластины при  $r = 0$  (рисунок 4.2, графики 1) наблюдается достаточно высокая температура ( $63 - 71$  °C);

2) Толщина пластины оказывает существенное влияние на время образования установившегося температурного режима во всем теле пластины (рисунок 4.2, график 3, рисунок 4.3 график 2). При этом температура на верхней  $z = 0$  и нижней  $z = h_1$  поверхности металлической пластины будет отличаться незначительно (разница составляет  $1 - 5$  °C);

3) Толщина пластины оказывает существенное влияние на время образования установившегося температурного режима во всем теле пластины (рисунок 4.2, график 3, рисунок 4.3 график 2). При этом температура на верхней  $z = 0$  и нижней  $z = h_1$  поверхности металлической пластины будет незначительно отличаться (разница составляет  $1 - 5$  °C);

4) Толщина слоя с небольшой теплопроводностью ( $h_2$ , пластик) оказывает влияние на температуру нижней поверхности ( $z = h$ ) пластины. В случае  $h_2 = 0.1$  температура меняется в диапазоне от  $59$  °C до  $48$  °C (рисунок 4.3, а, график 2), а при  $h_2 = 0.05$  разница температуры становится более существенной – от  $63$  °C до  $40$  °C (рисунок 4.3, б, в, график 2).

На рисунках 4.4 показаны графики изменения амплитудных значений компонент вектора перемещений по толщине пластины. Пунктирной и сплошной линией соответственно обозначены результаты для  $U^*(0.2, z, t)$ ,  $W^*(0, z, t)$ .



а)  $h_1 = h_2 = 0.1$  ( $t = 1100t_{\max}$ ); б)  $h_1 = h_2 = 0.05$  ( $t = 300t_{\max}$ )

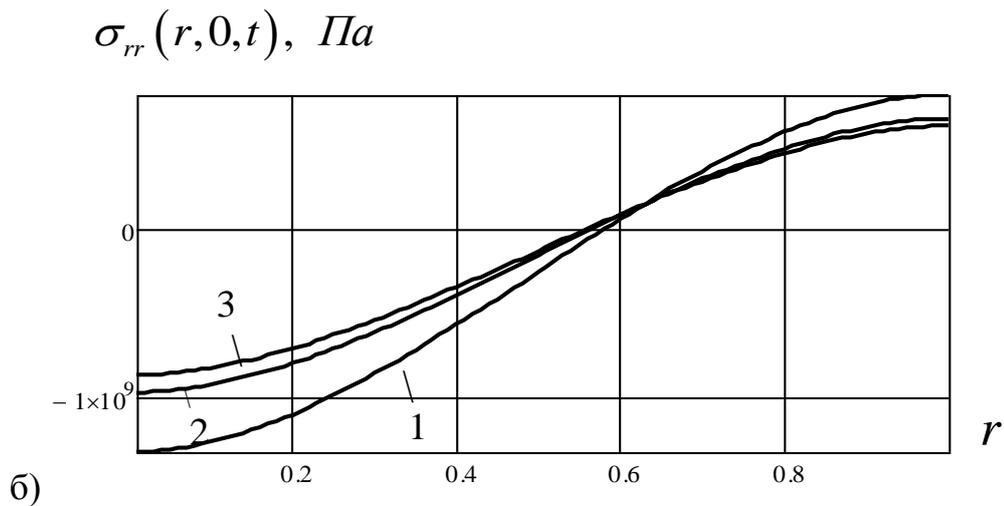
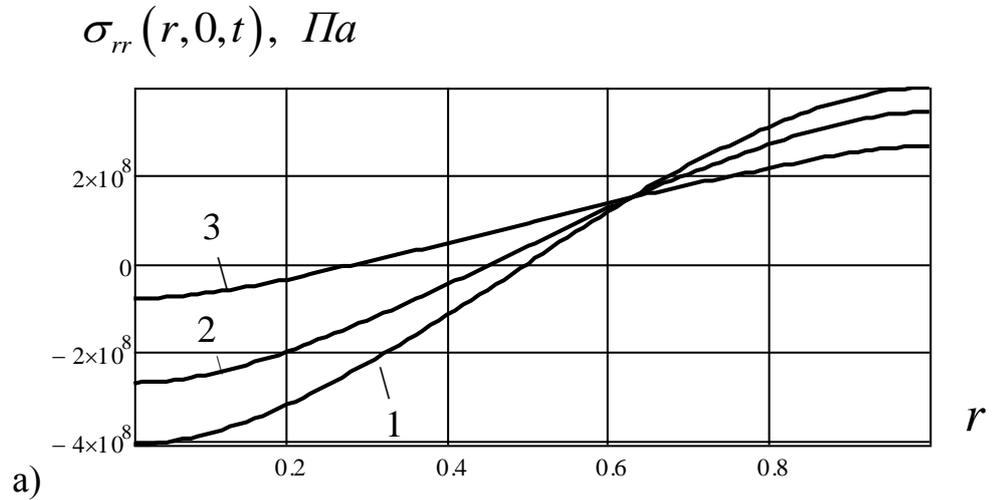
Рисунок 4.4 – График изменения перемещений по высоте пластины (сплошная линия – " $U^*(0.2, z, t) - z$ ", пунктирная линия – " $W^*(0, z, t) - z$ ")

Здесь можно отметить:

- 1) Вертикальная компонента вектора перемещений  $W^*(0, z, t)$  существенно больше радиальной составляющей  $U^*(0.2, z, t)$ ;
- 2) В более тонкой многослойной пластине  $h = 0.1$  ( $h_1 = h_2 = 0.05$ ) радиальная компонента вектора перемещений  $U^*(0.2, z, t)$  по высоте сечения изменяется по линейной зависимости (рисунок 4.4, б). Однако при  $h = 0.2$  ( $h_1 = h_2 = 0.1$ ) данное свойство справедливо только для металлической части

пластины, а для слоя, изготовленного из пластика,  $U^*(0.2, z, t)$  по переменной  $z$  изменяется нелинейно (рисунок 4.4, а).

На рисунках 4.5 представлены графики изменения нормальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$  по радиальной координате в различные моменты времени  $t$ .



$$\text{а) } h_1 = h_2 = 0.1 \quad (1-t = t_{\max}, 2-t = 550t_{\max}, 3-t = 1100t_{\max})$$

$$\text{б) } h_1 = h_2 = 0.05 \quad (1-t = t_{\max}, 2-t = 150t_{\max}, 3-t = 300t_{\max})$$

Рисунок 4.5 – График изменения  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$  по радиальной координате

Результаты расчета показывают, что на верхней лицевой поверхности жестко закрепленной пластины при заданной температурной нагрузке в радиальной плоскости образуются зоны растяжения и сжатия. Нормальные напряжения  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$  принимают максимальные значения при  $t = t_{\max}$  с

последующим уменьшением амплитудных значений. Кроме того, в тонких пластинах за счет большей степени деформирования, образуются более высокие напряжения.

На рисунках 4.6 представлены графики изменения температурного поля  $\Theta^*(0, z, t)$  в металлической части пластины по аксиальной координате в различные моменты времени  $t$ , а на рисунках 4.7, 4.8 – изменение вертикальных перемещений  $W^*(0, z, t)$  и нормальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, 0, t)$  во времени  $t$ . Сплошными и пунктирными линиями соответственно обозначены результаты с учетом и без учета связанности термоупругих полей.

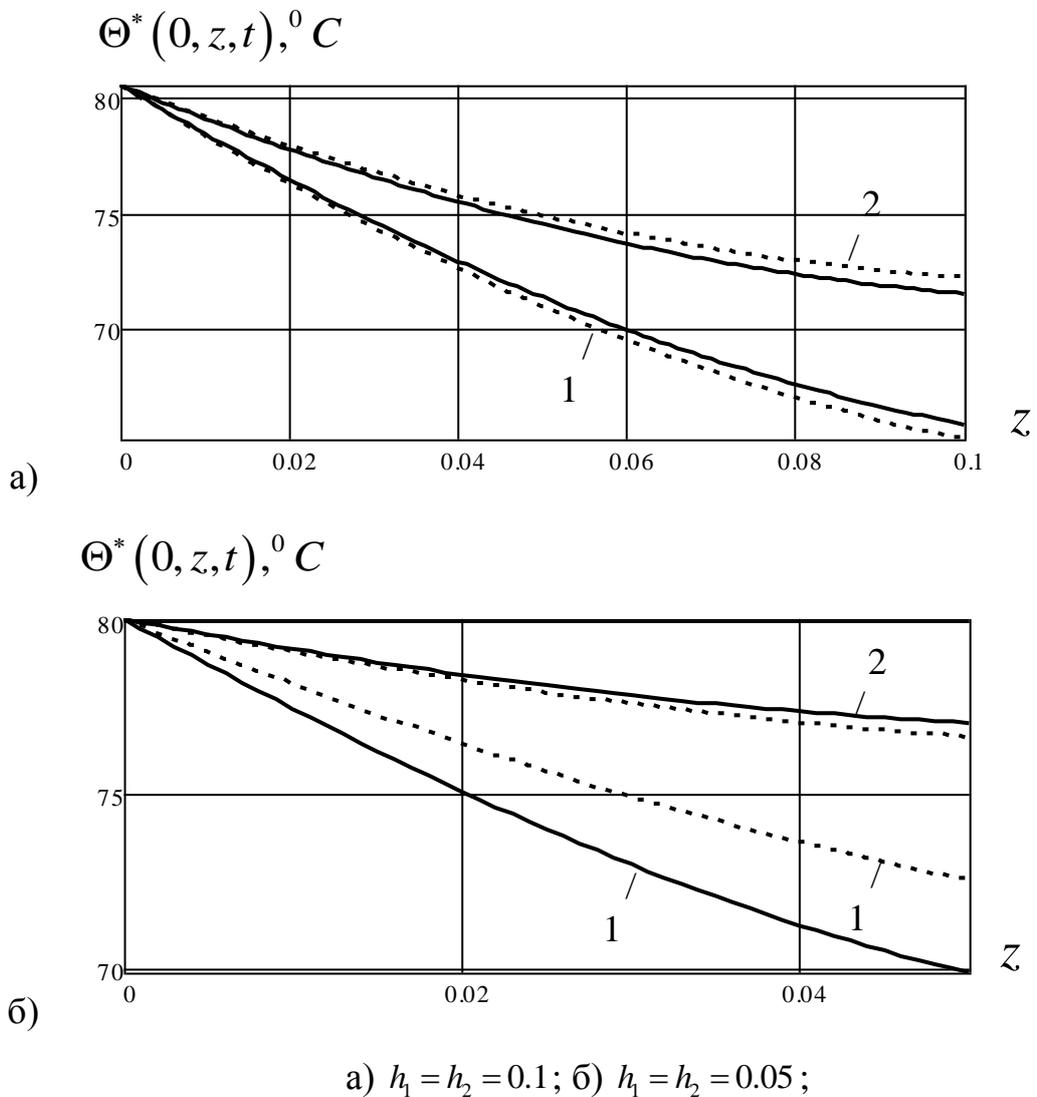
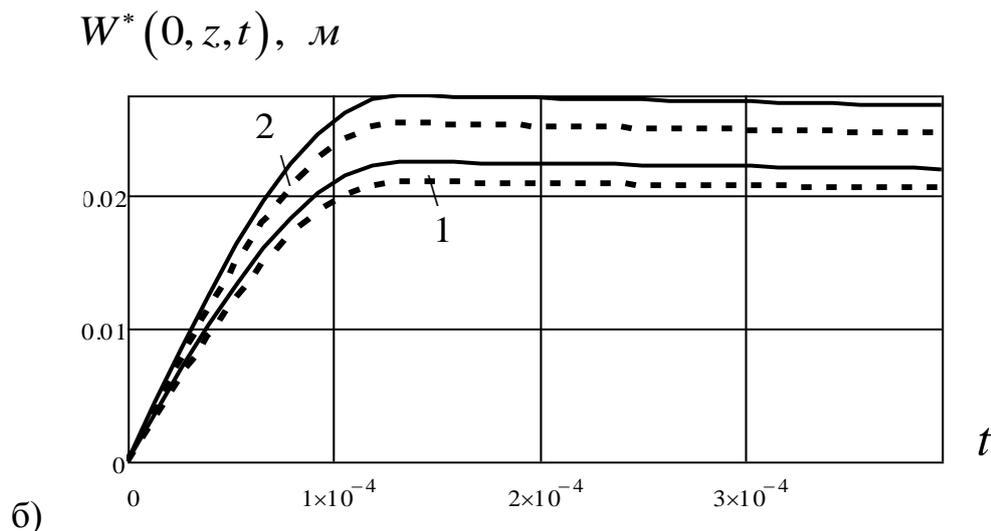
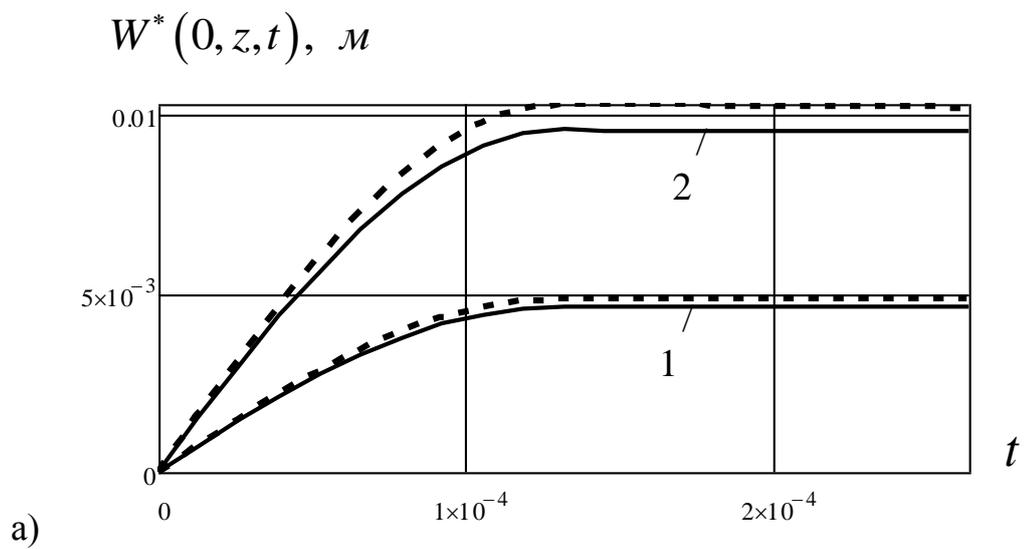


Рисунок 4.6 – График « $\Theta^*(0, z, t) - z$ » металлической части пластины  
( $1-t = 10t_{\max}$ ,  $2-t = 50t_{\max}$ )

Анализ численных результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

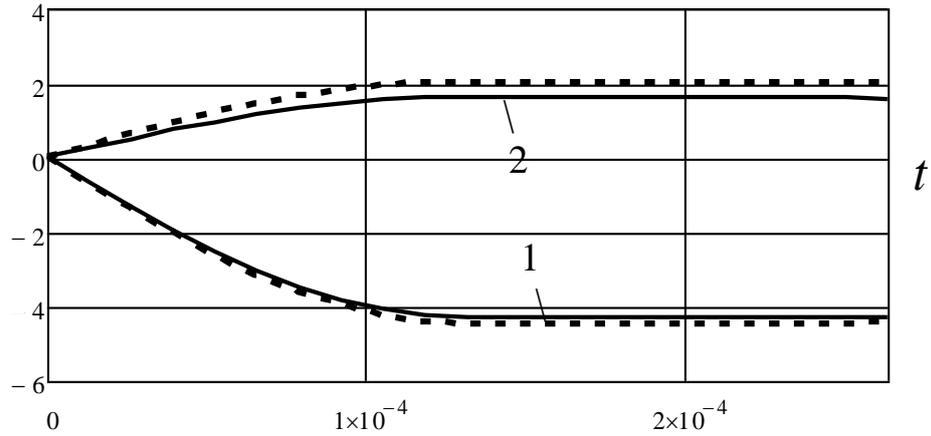
– в упругой системе толщиной  $h=0.2$  ( $h_1=h_2=0.1$ ) при  $t=10t_{\max}$  учет связанности термоупругих полей приводит росту температуры в ее металлической части, а в случае  $t=50t_{\max}$  к уменьшению. Однако для  $h=0.1$  ( $h_1=h_2=0.05$ ) наблюдается противоположная картина (рисунок 4.6); в металлической части элемента, а когда  $h=0.1$  – увеличение;



а)  $h_1 = h_2 = 0.1$ ; б)  $h_1 = h_2 = 0.05$

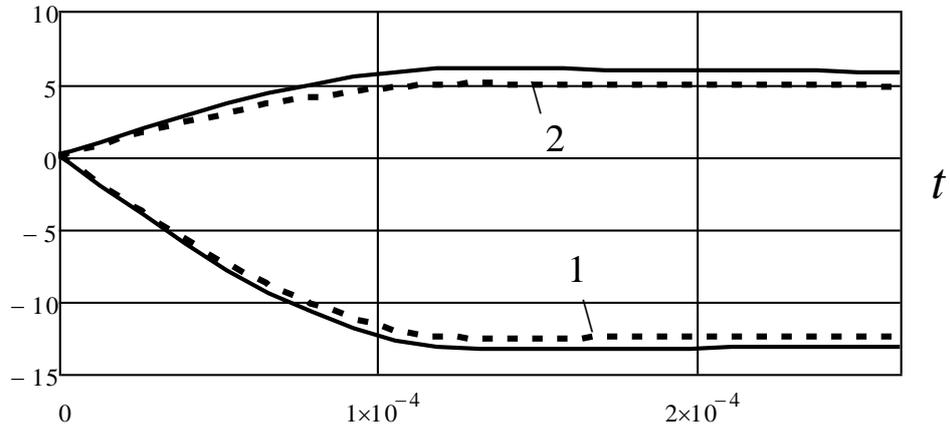
Рисунок 4.7 – График « $W^*(0, z, t) - t$ » ( $1-z=h_1$ ,  $2-z=h$ )

$$\sigma_{rr}(0, z, t) \times 10^{-8}, \text{ Па}$$



а)

$$\sigma_{rr}(0, z, t) \times 10^{-8}, \text{ Па}$$



б)

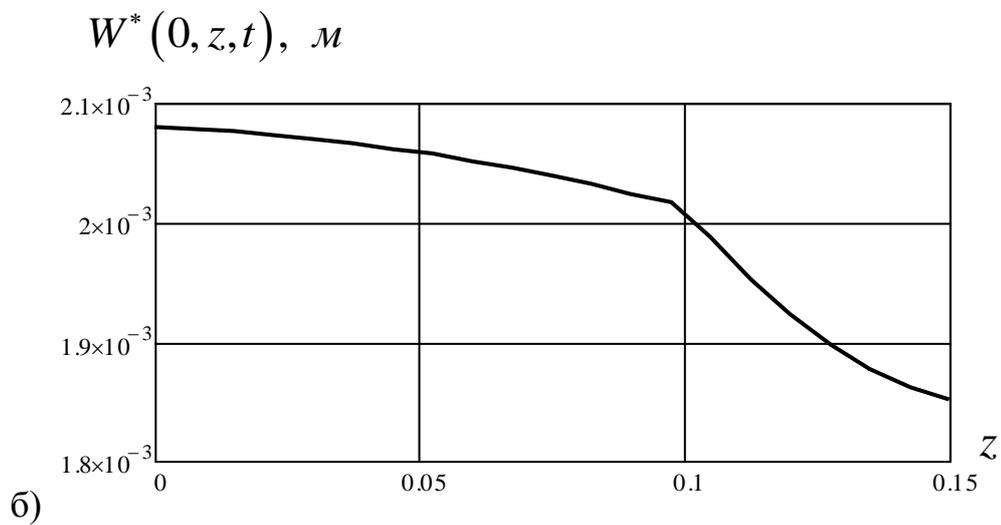
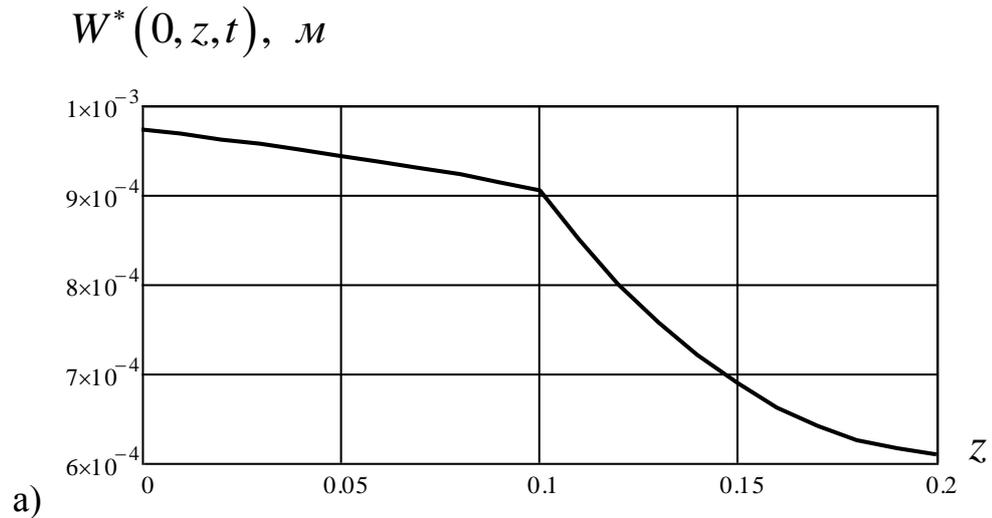
а)  $h_1 = h_2 = 0.1$ ; б)  $h_1 = h_2 = 0.05$ Рисунок 4.8 – График « $\sigma_{rr}(0, 0, t) - t$ »,  $1 - z = 0, 2 - z = h_1$ 

– при вычислении перемещений (рисунок 4.7) и напряжений (рисунок 4.8) в пластине толщиной  $h = 0.2$  эффект связанности полей дает уменьшение  $W^*(0, z, t)$

– уменьшение толщины пластины приводит к росту механических напряжений.

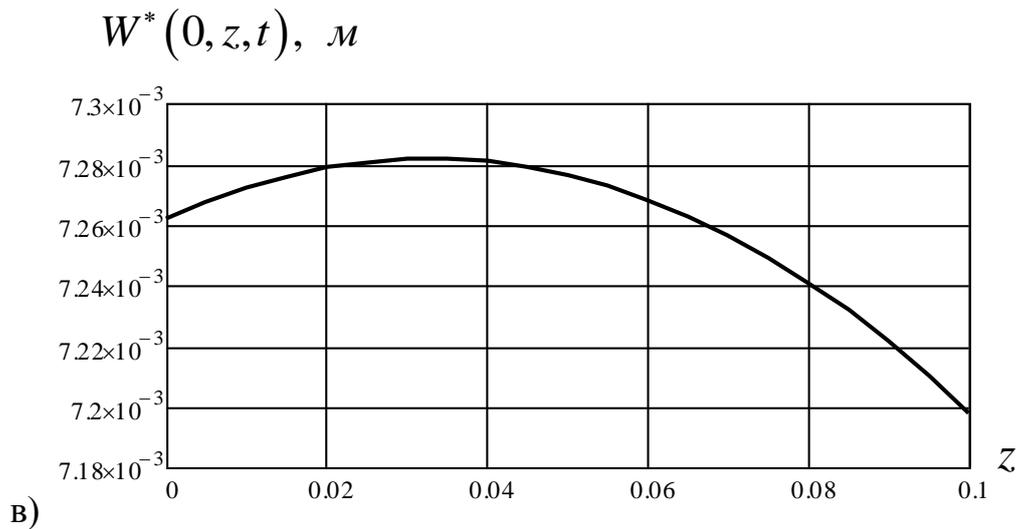
Таким образом, можно сделать вывод, что связанность термоупругих полей оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние пластины и температурное поле. При этом в тонких пластинах за счет более высокой скорости изменения объема тела эффект связанности существенно выше.

На рисунках 4.9 представлены графики изменения перемещений  $W^*(0, z, t)$  по толщине рассматриваемой конструкции при установившемся температурном режиме. При заданной толщине металлической части конструкции ( $h_1 = 0.1$ ) производится варьирование толщины второго слоя, изготовленного из пластика  $h_2 = 0.1, 0.05, 0$ .



а)  $h_1 = h_2 = 0.1, t = 1100t_{\max}$ ; б)  $h_1 = 0.1, h_2 = 0.05, t = 400t_{\max}$

Рисунок 4.9 – Графики « $W^*(0, z, t) - z$ »



б)  $h_1 = 0.1, h_2 = 0, t = 100t_{\max}$

Рисунок 4.9 – Графики « $W^*(0, z, t) - z$ »

Анализ результатов позволяет сделать вывод, что толщина второго слоя пластины, изготовленного из пластика, оказывает существенное влияние на деформированное состояние конструкции. При этом здесь в основном играют роль не упругие характеристики пластика, а его коэффициент теплопроводности.

## 5 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСЧЕТА ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Для проверки разработанного теоретического расчета напряженно-деформированного состояния и температурного поля круглой двухслойной жестко закрепленной пластины при действии температурной нагрузки был разработан экспериментальный стенд.

На рисунке 5.1 показаны: экспериментальная установка, обеспечивающая жесткое закрепление образца, с нагревательным прибором «Плитка нагревательная Н 3.1 САТ» (рисунок 5.1, а); образцы исследуемых пластин, выполненных из металла и пластика различной толщины и ограждающие конусы разного диаметра (рисунок 5.1, б); измерительные приборы по регистрации температуры «Термометр цифровой CENTER 304» и перемещений «Прогибомер П-1» (рисунок 5.1, в).



а)

а) Установка с нагревательным прибором «Плитка нагревательная Н 3.1 САТ».

Рисунок 5.1 – «Экспериментальный стенд для исследования термоупругих полей напряжения».



б)



в)

б) Установка с металлической пластиной толщиной 0,5 см  
и ограждающим конусом диаметром 8 см.

в) Установка с измерительным прибором по регистрации температуры

Рисунок 5.1 – «Экспериментальный стенд для исследования  
термоупругих полей напряжения».



г )

г) Установка со всеми комплектующими устройствами.

Рисунок 5.1 – «Экспериментальный стенд для исследования термоупругих полей напряжения».

Объектом исследования является двухслойная пластина ( $b = 0.2$  м) толщиной  $h^* = 0.04$  (м) ( $h = 0.2$ ) выполненная из металла ( $h_1^* = 0.01$  (м),  $h_1 = 0.05$ ) и пластика ( $h_2^* = 0.03$  (м),  $h_2 = 0.15$ ). Нижняя (металлическая) поверхность пластины нагревается с помощью прибора «Плитка нагревательная Н 3.1 САТ». При этом металлический конус, передающий температурную нагрузку от нагревательного прибора к исследуемой конструкции, позволяет создать температурную осесимметричную нагрузку на части ее поверхности радиусом  $R = 0.04$  (м).

На первом этапе действия нагрузки  $0 < t_* \leq t_{\max}^*$  происходит нагрев нижней лицевой поверхности пластины радиусом  $R$  до температуры  $T_{\max}^*$  и в дальнейшем при  $t_* > t_{\max}^*$  температура внутри металлического конуса остается постоянной. Данный процесс описывается следующей зависимостью:

$$\omega_{11}^*(r_*, t_*) = T_{\max}^* \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]. \quad (5.40)$$

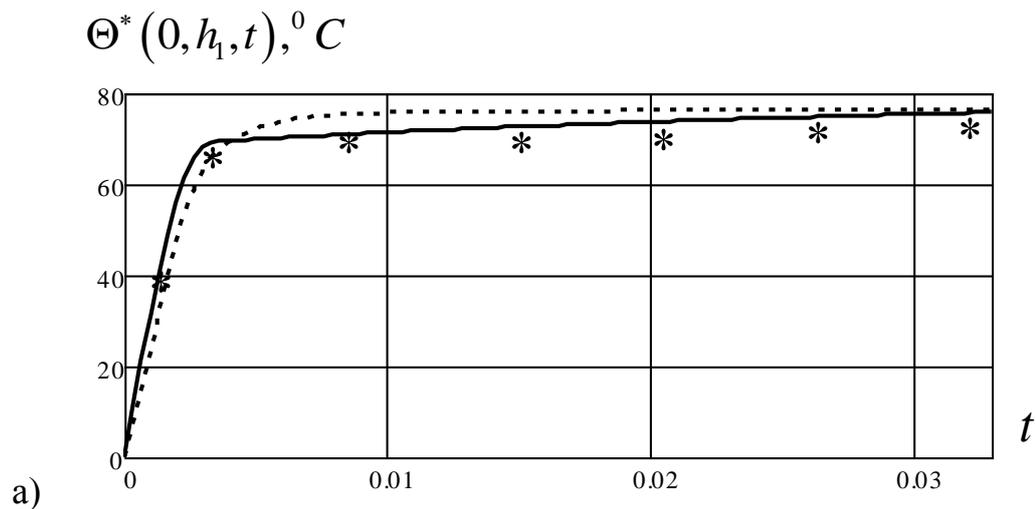
Оставшаяся часть нижней поверхности  $r_* > R$  в период времени  $t_* > t_{\max}^*$  также нагревается. Для описания данного процесса в рамках построенного алгоритма решения принимаем, что здесь также действует нагрузка в виде:

$$\omega_{12}^*(r_*, t_*) = T_{\max}^* \frac{(1-r_*)}{(1-R)} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{20t_{\max}^*} t_*\right) H(10t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - 10t_{\max}^*) \right]. \quad (5.41)$$

В общем виде нестационарная осесимметричная температурная нагрузка, действующая на пластину, определяется следующим образом:

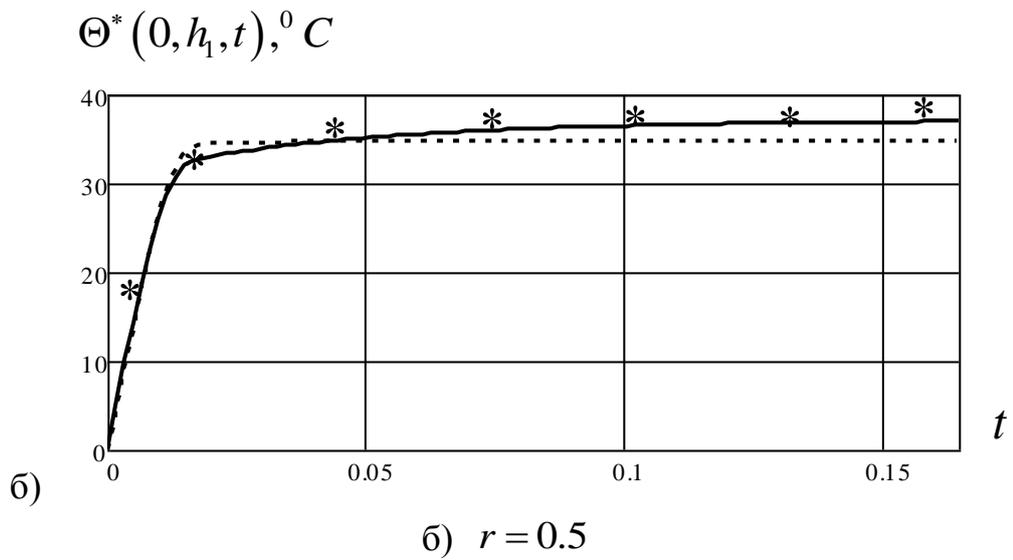
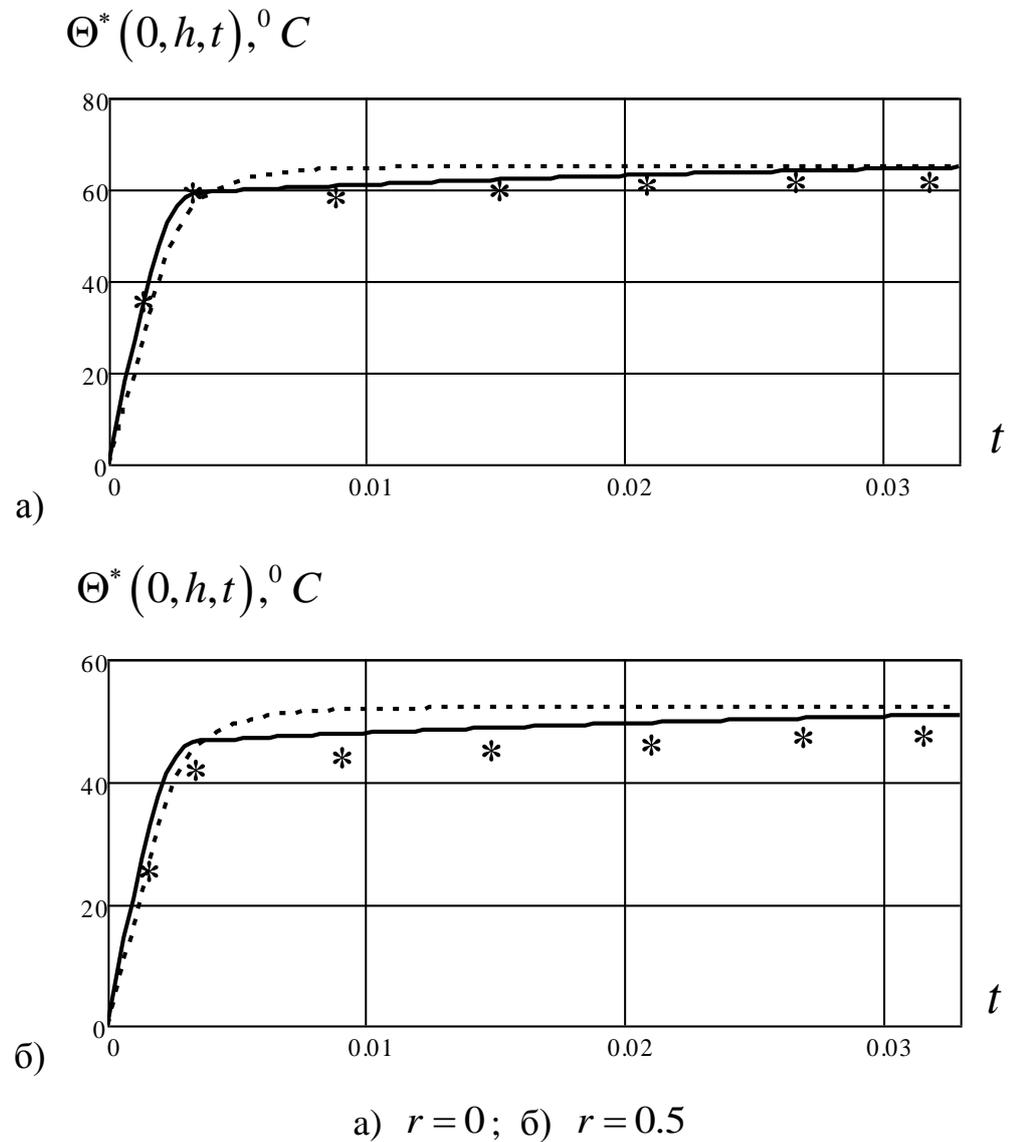
$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \omega_{11}^*(r_*, t_*) H(R - r_*) + \omega_{12}^*(r_*, t_*) H(r_* - R). \quad (5.42)$$

На рисунках 5.2, 5.3 представлены графики изменения температуры  $\Theta^*(r, z, t)$  во времени  $t$  двухслойной пластины при следующих параметрах внешнего воздействия:  $T_{\max}^* = 373 \text{ K}$  ( $100^\circ \text{C}$ ),  $\mathcal{G}^* = T_0 = 293 \text{ K}$  ( $20^\circ \text{C}$ ),  $t_{\max}^* = 10 \text{ с}$ .



а)  $r = 0$ ;

Рисунок 5.2 – Графики изменения температуры  $\Theta^*(r, h_1, t)$  во времени  $t$

Рисунок 5.2 – Графики изменения температуры  $\Theta^*(r, h_1, t)$  во времени  $t$ Рисунок 5.3 – Графики изменения температуры  $\Theta^*(r, h, t)$  во времени  $t$

Звездочками обозначены экспериментальные результаты, а сплошной и пунктирной линиями – теоретические данные, соответственно с учетом и без учета связанности термоупругих полей.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) Наблюдается хорошее совпадение экспериментальных данных и теоретических результатов, полученных с учетом связанности полей. Разница в результатах составляет не более 7%;

2) Разница результатов натурального эксперимента и теоретических результатов, полученных без учета связанности полей существенно больше и достигает 12%.

В таблице 5.1 приведены численные значения перемещений  $W^*(0, h, t)$ , полученные экспериментальным путем для двухслойной круглой ( $b = 0.2$  м) пластины на ее верхней лицевой поверхности. Радиус конуса, создающего температурную нагрузку на поверхности пластины соответственно равен:  $R = 0.04, 0.02$  (м).

Таблица 5.1

$W^*(0, h, t) \times 10^{-4}, \text{ м}$				
$t_*, \text{ с}$ $R, \text{ м}$	600	1200	1800	3600
0.04	0.8	1.4	1.7	1.8
0.02	0.7	1.7	2.0	2.2

На основании экспериментальных данных (таблица 5.1) и результатах теоретического расчета на основании разработанного алгоритма, получены графики перемещений верхней лицевой поверхности пластины (рисунок 5.4). Звездочками обозначены экспериментальные результаты, а сплошной линией теоретические данные.

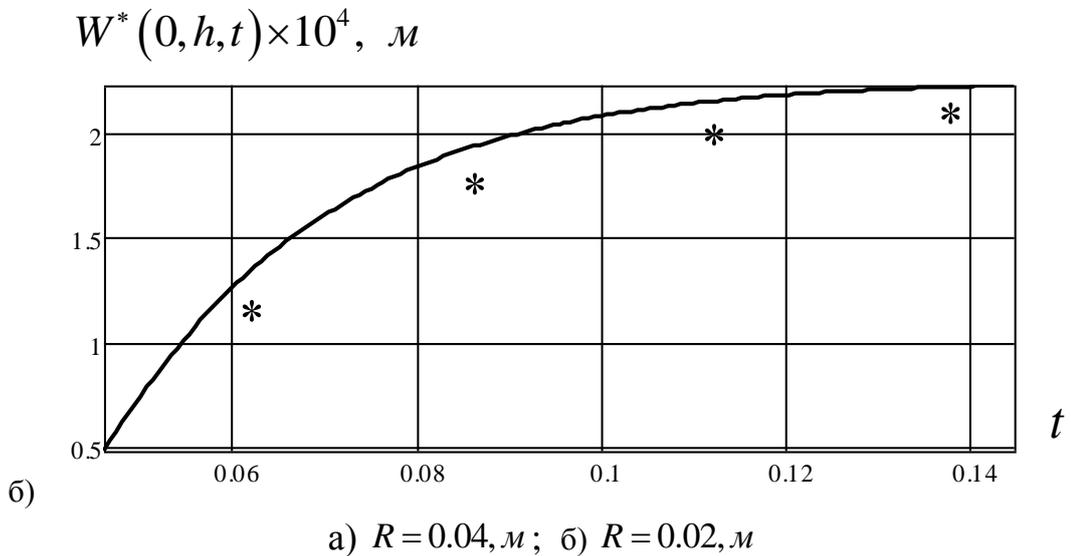
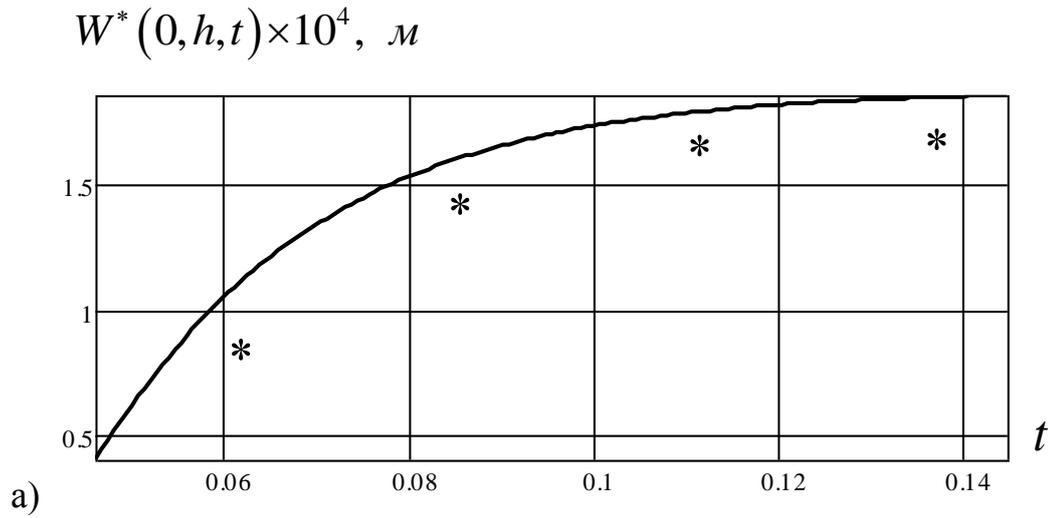


Рисунок 5.4 –Графики изменения перемещения  $W^*(0, h, t)$  во времени  $t$

Здесь также следует отметить хорошее совпадение экспериментальных данных и теоретических результатов. Их разница не превышает 10%.

В целом можно отметить, что достоверность численных результатов расчета, полученных на основании разработанного в настоящей главе алгоритма решения, подтверждается данными натуральных экспериментов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании выполненных исследований можно сформулировать основные достигнутые результаты и выводы:

1) Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины. Разработанный алгоритм позволяет определить напряженно-деформированное состояние и температурное поле без учета скорости изменения объема упругой системы, а также дает возможность установить параметры внешней температурной нагрузки, при которых необходимо учитывать ее инерционные характеристики;

2) Разработан алгоритм расчета и получено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для однослойных круглых пластин без учета сил инерции при выполнении граничных условий теплопроводности 1–го рода.

3) Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для многослойных круглых пластин без учета сил инерции при выполнении граничных условий 1–го и 3–го рода;

4) Разработано программное обеспечение в системе Mathcad–15, позволяющее проводить анализ связанных и несвязанных термоупругих процессов в однослойных и многослойных круглых пластинах;

5) Создана экспериментальная установка по определению температурного поля и перемещений в круглых пластинах при заданном внешнем осесимметричном температурном воздействии;

6) Разработанные алгоритмы расчета используются ООО «НИПИ НГ «Петон» при проектировании ограждающих однослойных и многослойных конструкций. Кроме того, результаты исследования находят свое применение в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство».

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Joseph, F. *Théorie analytique de la chaleur* / F. Joseph. – Paris: Firmin Didot Père et Fils, 1822. – 151 p. (цитируется по: Жизнь науки. Сост.: С.П. Капица, М.: Наука, 1973 г. – 151 с.).
2. Carnot, S. *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* / S. S. Carnot, W. Thompson. – nouv. éd., Paris, 1824. – 151 p. (в русском переводе – «Второе начало термодинамики», М.: Гос. техн. – теорет. изд-во., 1934. – 311 с.).
3. Duhamel, J. *Second Mémoire sur les Phenomenes Thermo-Mecanique* / J. Duhamel. – J. de L'Ecole Polytech, 1837. – Vol. 15.1. – 57 p.
4. Duhamel, J. *Mémoire sur le Calcul des Actions Moléculaires Développées par les Changements de Température dans les Corps Solides* / J. Duhamel // *Memoirs par Divers Savants. A l'Acad. Roy. des Sci. de Tlnst. de France.* – 1838. – Vol. 5. – P. 440-498.
5. Neumann, F. E. *Ueber die Theorie d. Elasticität* / F. E. Neumann. – J. Leipzig, 1885. – 104 p.
6. Lord, H. *A generalized dynamical theory of thermoelasticity* / H. Lord, Y. Shulman // *J. Elasticity.* – 1967. – Vol. 15(5). – P. 299-309.
7. Green, A. E. *Thermoelasticity* / A. E. Green, K. J. Lindsay // *J. Elasticity.* – 1972. – Vol. 2. – P. 1-7.
8. Green, A. E. *On undamped heat waves in an elastic solid* / A. E. Green, P. M. Naghdi // *J. Thermal Stresses.* – 1992. – Vol. 15. – P. 253-264.
9. Green, A. E. *Thermoelasticity without energy dissipation* / A. E. Green, P. M. Naghdi // *J. Elasticity.* – 1993. – Vol.31. – P. 189-208.
10. Новацкий, В. *Вопросы термоупругости* / В. Новацкий. – М.: Изд-во АН СССР: Москва, 1962. – 364 с.
11. Новацкий, В. *Динамические задачи термоупругости* / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.

12. Коваленко, А. Д. Введение в термоупругость / А. Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1965. – 204 с.
13. Коваленко, А. Д. Развитие исследований в области термоупругости, термопластичности, термовязкоупругости / А. Д. Коваленко. – Прикладная механика. – 1969. – Т.5, № 12. – С. 1-16.
14. Коваленко, А. Д. Особенности современной термоупругости / А. Д. Коваленко. – Прикладная механика, 1970. – Т.6, № 4. – С. 23-30.
15. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1970. – 308 с.
16. Коваленко, А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 215 с.
17. Карнаухов, В. Г. Связанные задачи термоупругости / В. Г. Карнаухов. – К.: Наука, думка, 1982. – 260 с.
18. Krysko, V. A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells / V. A. Krysko, J. Awrejcewicz // Berlin etc.: Springer. – 2003. – №5. – 427 p.
19. Krysko, V. A. Thermo-Dynamics of Plates and Shells / V. A. Krysko, J. Awrejcewicz, A. V. Krysko // Berlin etc.: Springer. – 2007. – 777 p.
20. Krysko, V. A. Elastic and Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Structural Members / V. A. Krysko, J. Awrejcewicz // Springer Nature Switzerland AG. Scientific Computation. – 2020. – 602 p.
21. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М.: Госиздат. техн.теорет. лит, 1955. – 491 с.
22. Никофоров, С. Н. Теория упругости и пластичности / С. Н. Никофоров. – М.: Госиздат. по арх. и стр-ву, 1955. – 284 с.
23. Снеддон, И. Н. Преобразования Фурье. / И. Н. Снеддон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
24. Снеддон, И. Н. Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон., Д.С. Берри. – М.: ГИФиз.-мат. лит., – 1961. – 220 с.
25. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 367 с.

26. Thomas, L. Fundamentals of Heat Transfer / L. Thomas. – Prentice-Hall, New Jersey, 1980. – 39 p.
27. Nowacki, W. Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids / W. Nowacki // Proceedings of Vibration Problems. I, II, III. – 1974. – Vol. 15, – P. 105-128.
28. Nowacki, W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity. Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids. / W. Nowacki // IUTAM Symposia. Vienna. – 1966. – P. 259-278.
29. Nowacki, W. Momentnie naprajeniya v termouprugosti [Moment stresses in thermoelasticity] / W. Nowacki // Applied mechanics. – 1967. – Vol. 3. – P. 3-17.
30. Nowacki, W. Theory of asymmetric elasticity/ W. Nowacki. – Pergamon Press. – 1986. – 383 p.
31. Гербер, Г. Основы учения о теплообмене / Г. Гербер, С. Экр, У. Григуль. – М.: ИЛ, 1958. – 566 с.
32. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х.. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – М.: Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
33. Попов, Е. Б. Динамическая задача термоупругости для полупространства с учетом конечности скорости распространения тепла / Е. Б. Попов // Вост.-Евр. журн. перед.техн. ПММ. – 1967. – Т.31, №2. – С. 328-334.
34. Шашков, А. Г. Волновые явления теплопроводности / А. Г. Шашков, В.А. Бубнов, С. Ю. Яновский. – Изд. «Едиториал УРСС», 2004 г. – 296 с.
35. Chandrasekharaiah, D. S. Thermoelasticity with Second Sound: A Review / D. S. Chandrasekharaiah // Applied Mechanics Reviews. – 1986. – № 39 (3). – P. 354-376.
36. Chandrasekharaiah, D. S. Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature / D. S. Chandrasekharaiah // Appl. Mech. Rev. – 1998. – № 51. – P. 705-729.
37. Ignaczak, J. Linear Dynamic Thermoelasticity: A Survey / J. Ignaczak // The Shock and Vibration Digest. – 1981. – Vol. 13(9). – P.3-16.
38. Sherief, H. H. A Problem in Generalized Thermoelasticity for an Infinitely Long Annular Cylinder Composed of Two Different Materials / H. H. Sherief, M. N. Anwar // Acta mechanica 80. – 1989. – P. 137-149.

39. Sherief, H. H. Problem in generalized thermoelasticity / H. H. Sherief, M. N. Anwar // *Journal of Thermal Stresses*. – 1986. – Vol. 9 (2). – P. 165-181.
40. Бажанов, В. А. Расчет конструкций на тепловые воздействия / В. А. Бажанов, И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, А. М. Синюков. – Москва: Машиностроение, 1969. – 599 с.
41. Био, М. А. Вариационные принципы теории теплообмена / М. А. Био. – М.: Энергия, 1975. – 208 с.
42. Болотин, В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла / В. В. Болотин // *ПММ*. – 1960. – Т. 24, 2. – С. 361-366.
43. Бутковский, А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : учеб. пособие / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
44. Векуа, И. Н. Теория тонких и пологих упругих оболочек переменной толщины / И. Н. Векуа. – Н.: Новосиб. гос. ун-т., 1963. – 28 с.
45. Гордезиани, Д. Г. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации: учеб. пособие «Комплексный анализ и его приложения» / Д. Г. Гордезиани, А. А. Самарский. – М.: Москва, 1978. – 186 с.
46. Popovych, V. S. Analytical and Numerical Methods of Solutions of Heat Conduction Problems with Temperature-Sensitive Body Convective Heat Transfer / V. S. Popovych, H. Yu. Harmatiy // *Problems of Mechanics and Mathematics, Pidstryhach*, 1993. – № 13. – 67 p.
47. Titeux, I. Asymptotic Expansion of Temperature Close to a Singularity of a Plate / I. Titeux // *World Journal of Mechanics*. – 2011. – Vol.1. – P. 109-114.
48. Verma, K. L. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method / K. L. Verma // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2008. – Vol. 37. – P. 573-580.
49. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер – М.: Мир, 1984. – 428 с.
50. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

51. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
52. Румянцев, А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности / А. В. Румянцев // Калининград.: Изд-во КГУ. – 1-е изд-е, 1995. – 170 с.; – 2-е изд-е, 1997. – 99 с.
53. Брыков, Н. А. Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности / Н. А. Брыков // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016, – №5 (47). – С. 52-55.
54. Галанин, М. П. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов / М. П. Галанин, Н. Н. Прошунин, А. С. Родина, Д. Л. Сорокин // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2016. – № 66. – С. 1-27.
55. Литвин, О. Н. Исследование нестационарного температурного поля в прямоугольной пластине интерлинационным методом конечных элементов / О. Н. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – № 19(190). – С. 49-56.
56. Berg, P. N. Calculus of variations / Berg, P. N. – Engineering Mechanics ed. W. Flugge, Graw-Hill., 1962. – Vol. 16.– P. 115
57. Visser, W. Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations / W. Visser // Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. – 1965. – P. 925-943.
58. Zienkiewicz, O. C. Finite Elements in the Solution of Field Problems / O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung // Engineer 200. – 1965. – P. 507-510.
59. Клебанов, Я. М. Применение метода конечного элемента для оценки нижней границы предела приспособляемости конструкций при одновременном воздействии механических и тепловых нагрузок / Я. М. Клебанов, Я. В. Кураева // Изв. высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 1. – С. 43–49.
60. Кожевникова, М. Е. Компьютерное моделирование плоских задач термоупругости: сравнительный анализ решения в связанной и несвязанной

постановках / М. Е. Кожевникова, Т. А. Ротанова, А. В. Валов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 388–398.

61. Кудрявцев, А. А. Разработка программы реализации метода конечных элементов в задаче стационарной теплопроводности / А. А. Кудрявцев // Вестник Иркутского гос. техн. ун-та. – 2011. – №10 (57). – С. 39-46.

62. Кудряшов, А. Б. Применение метода конечного элемента к расчету трехмерных стационарных задач математической теории упругости и теплопроводности / А. Б. Кудряшов, В. Д. Чубань, Ю. А. Шевченко // Ученые записи Цаги, институт им. проф. Н.Е. Жуковского. – 1974. – № 6 (5). – С. 63-69.

63. Мурашов, М. В. Решение уравнения теплопроводности методом конечных элементов / М.В. Мурашов // Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. Матер. науч. конф. – 2001. – С. 315-318.

64. Подгорный, С. А. Метод конечных элементов в решении задач теплопроводности / С. А. Подгорный, З. А. Меретуков, Е. П. Кошевой, В. С. Косачев // Вестник Воронежского гос. ун-та инженерных технологий. – 2013. – № 2. – С. 10-15.

65. Свиридов, В. В. Математическое моделирование трехмерной задачи теплопроводности методом конечных элементов / В. В. Свиридов, Т. В. Алябьева // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. – 2014. – № 1. – С. 72-76.

66. Царёв, А. В. Использование метода конечных элементов для решения двумерных задач теплопроводности : уч. метод. пособ. / А. В. Царёв, В. М. Пучков. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 28 с.

67. Allen D. N. Relaxation Methods / D. N Allen. – McGraw-Hill, 1954. – 199 p.

68. Афанасьев, Е. Ф. Некоторые задачи для уравнения теплопроводности со смешанными граничными условиями / Е. Ф. Афанасьев // Дифференциальные уравнения. Ин-т проблем механики АН СССР. – 1965. – Т. 1, № 5. – С. 663-670.

69. Варданян, С. А. Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин / С. А. Варданян, С. О. Саркисян // Известия НАН Армении. Механика. – 2007. – Т. 60, № 3. – С. 64-77.

70. Величко, И. Г. Решение задачи о стационарном распределении тепла в многослойной анизотропной пластине / И. Г. Величко, М. Г. Олененко // Вісник Чернігівського державного тех.ун-та. ЧНТУ. – 2013. – №1 (63). – С. 33-37.
71. Величко, И. Г. Аналитический метод решения задач термоупругости с периодическими условиями для многослойных оснований / И. Г. Величко // ТДАТУ. Изд. Минск. – Механика машин, механизмов и материалов. – № 4. – 2015. – С. 42-49.
72. Витохин, Е. Ю. Исследование колебательных и волновых процессов в термоупругой среде с учетом времени релаксации теплового потока: диссерт. кандидата Физико-математических наук / Е. Ю. Витохин. – Ин-т проблем машиноведения РАН. – Санкт-Петербург, 2017. – 114 с.
73. Гольцев, А. С. Фундаментальное решение уравнений плоской задачи термоупругости для тонких ортотропных пластин при симметричном теплообмене / А. С. Гольцев // Высш. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. Науки. – 1999. – Вып.1. – С. 51-56.
74. Гольцев, А. С. Задачи термоупругости для ортотропных цилиндрических оболочек при локальном температурном воздействии / А. С. Гольцев // Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – № 33. – С. 139-144.
75. Гольцев, А. С. Исследование влияния условий теплообмена для локально нагретых ортотропных сферических оболочек / А. С. Гольцев // Динамические системы. – 2001. – № 17. – С. 76-82.
76. Жорник, А. И. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра / А. И. Жорник, В. А. Жорник, П. А. Савочка // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 6 (31). – С. 63-68.
77. Зарубин, В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности: учеб. пособие / В. С. Зарубин. – Москва: Энергоатомиздат, 1983. – 326 с.
78. Карташов, Э. М. Аналитические подходы к исследованиям нестационарной теплопроводности для частично ограниченных областей / Карташов Э. М // ТВТ. – 2020. – Т. 58 (3). – С. 402–411.

79. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
80. Кудинов, В. А. Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, А. В. Еремин, Е. В. Котова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.мат. науки. – 2012. – № 2 (27). – С. 188-191.
81. Кудинов, В. А. Аналитическое решение квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды / В. А. Кудинов, А. Э. Кузнецова, А. В. Еремин, Е. В. Котова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.мат. науки. – 2014. – № 2 (35). – С. 130-135.
82. Кудинов, В. А. Получение точных аналитических решений нестационарных задач теплопроводности ортогональными методами / В. А. Кудинов, Р. М. Клебнеев, Е. А. Куклова // Вестн. Сам.гос.техн. ун-та. Сер. Физ. мат. науки. – 2017. – № 1 (21). – С. 197-206.
83. Кузнецова, Ю. А. Нестационарные температурные поля и напряжения в конечных неоднородных телах: диссерт. кандидата физико-математических наук: 05.13.18 / Кузнецова Юлия Андреевна. – Тул. гос. ун-т. – Тула, 2006. – 175 с.
84. Лотарев, В. Я. Температурные поля и напряжения в движущихся телах конечных размеров : диссерт. канд.техн.наук: 05.13.16 / Лотарев Валерий Яковлевич. – Тул. гос. ун-т. – Тула, 2000. – 134 с.
85. Макарова, И. С. Решение несвязанной задачи термоупругости с краевыми условиями первого рода / И. С. Макарова // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ. – мат. науки. – 2012. – Т. 28, №3. – С. 191-195.
86. Подстригач, Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач. – К.: Наукова думка, 1976. – 311 с.
87. Подстригач, Я. С. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно и др. – К.: Наукова думка, 1977. – 160 с.
88. Подстригач, Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. – К.:Наукова думка, 1977г. – 277 с.

89. Подстригач, Я. С. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки / Я. С. Подстригач, Э. И. Григолюк, Я. И. Бурак // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 174 (3). – С. 534–537.
90. Подстригач, Я. С. Теплоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
91. Саркисян, С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек / С. О. Саркисян // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14. №1. – С. 55-66.
92. Саркисян, С.О. Некоторые общие вопросы термоупругости микрополярных тонких оболочек / С. О. Саркисян // Изв. НАН Армении. Механика. – 2014. – № 2. – С. 67-68.
93. Трещев, А. А. Напряженно-деформированное состояние тонких прямоугольных пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термосилового нагружения / А. А. Трещев, А. А. Петров, В. Г. Теличко // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2008. – № 1. – 110-117 с.
94. Трещев, А. А. Решение задачи термоупругости для цилиндрической оболочки из анизотропного разносопротивляющегося материала / А. А. Трещев, М. В. Спасская // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2015. – № 1(31). – 65-74 с.
95. Vattre, A. Thermoelasticity of multilayered plates with imperfect interfaces / A. Vattre, E. Pan // International Journal of Engineering Science. – 2020. – Vol. 158. – P. 1-30.
96. Sargsyan S. H. Mathematical Models of Thermoelasticity of Micropolar Elastic Thin Shells // Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. – 2011. – Vol. 15. – P. 91-100.
97. Sherief, H. H. Two-dimensional problems for thermoelasticity, with two relaxation times in spherical regions under axisymmetric distributions / H. H. Sherief, F. A. Megahed // International Journal of Engineering Science. – 1999. – Vol. 37. – P. 299–314.
98. Галимов, Ш. К. Устойчивость прямоугольной защемленной пластинки при неравномерном несимметричном нагреве / Ш. К. Галимов, М. С. Ганеева // Изд-во Казанск. ун-та. – 1967. – № 5. – С. 332-341.

99. Гольденвейзер, А. Л. Температурные напряжения в тонких оболочках / А. Л. Гольденвейзер // Труды ЦАГИ, ин-т им. проф. Н. Е. Жуковского. – 1947. – № 618. – С.1-8.
100. Дургарьян, С. М. Температурные задачи теории оболочек и пластинок / С. М. Дургарьян // Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.914-915.
101. Подстригач, Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач. – К.: Наукова думка, 1978. – 343 с.
102. Филатов, В. Н. Расчет на температурные воздействия гибких пологих оболочек, подкрепленных ортогональной сеткой ребер / В. Н. Филатов // Нелинейные задачи расчета тонкостенных конструкций. – Саратов: изд. СГУ. –1989. – С. 108-110.
103. Хижняк, В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: уч. пос. / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
104. Цветкова, О. А. Задачи несвязанной термоупругости ортотропных геометрически нерегулярных оболочек и пластин с термочувствительной толщиной : диссерт. кандидата физико-математических наук : 01.02.04 / Цветкова Ольга Алексеевна. – Сарат. гос. техн. ун-т., Саратов, 2001. – 150 с.
105. Baltrukonis, J. H. Thermal buckling of hingen plates / J. H. Baltrukonis // *Mechan Univ., Bruxelles.* – 1957. – vol. 7. – P. 2–33.
106. Bokov, I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Bokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* – 2017. – Vol. 2. – P. 4-12.
107. Аксельрад, Э. Л. О температурных деформациях неоднородных ортотропных оболочек / Э. Л. Аксельрад // Труды Ленингр. ин-та инжен. ж-д. тр. – 1966. – № 249. – С.181-186.
108. Даниловская, В. И. Об одной динамической задаче термоупругости / В. И. Даниловская // ПММ. – 1952. – Т. 16, № 3. – С.341-344.
109. Мелан, Э. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – М.: Физматгиз. – 1958. – 167 с.

110. Цой, П. В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса: прямые и обратные задачи нестационарной теплопроводности и термоупругих напряжений / П. В. Цой. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – №3. – 568 с.
111. Hamdy M. Generalized Thermoelasticity Problem of Material Subjected to Thermal Loading Due to Laser Pulse / M. Youssef Hamdy, S. Al-Felali Ahmed // Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 3 (2). – P. 142-146.
112. Harmatij, H. Yu. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange / H. Yu Harmatij, M. Marta Król, V. Vasył Popovycz // Advances in Pure Mathematics. – 2013. – №3. – P. 430-437.
113. Chadwick, P. Plane Waves in an Elastic Solid Conducting Heat / P. Chadwick, I. N. Sneddon // J. Mech. Phys. Sol. – 1958. – V. 6. – P. 223-230.
114. Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
115. Андреев, А. Н. Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин / А. Н. Андреев // Изв. Алтайского гос. ун-та. – Т. 1. № 81. – 2014. – С. 19-21.
116. Бойко, С. Б. Расчет двумерных тепловых стационарных периодических полей в многослойных плитах / С. Б. Бойко, И. Г. Величко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2014. – № 2. – С. 111-116.
117. Валишвили, Н. В. Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач / Н. В. Валишвили. – ПММ. – Т.32, №6. – 1968. P. 1089– 1096.
118. Григолюк, Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука. 1988. – 232 с.
119. Ефремов, А. В. Задачи установившейся и нестационарной теплопроводности и термоупругости плит и цилиндров из пористых материалов: дис. кандидата техн. наук / А. В. Ефремов. – Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 2008. – 204 с.

120. Жигалин, А. Г. Замкнутые решения динамических задач связанной термоупругости для цилиндра и шара / А. Г. Жигалин, А. С. Лычев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 17-34.
121. Жуков, П. В. Расчет температурных полей и термических напряжений в толстостенном цилиндре при импульсном подводе теплоты / П. В. Жуков // Вестник ИГЭУ. – 2013. – № 3. – С. 1-4.
122. Каркусты, Н. Н. Вторая основная связанная задача теории термоупругости для бесконечной полосы / Н. Н. Каркусты // Владикавк. Матем. Журн. – 1999. – № 1(2). – С. 3-9.
123. Кобзарь, В. Н. Плоская динамическая задача термоупругости / В. Н. Кобзарь, Л. А. Фильштинский // РАН ПММ. – 2008. – Т. 72, № 5. – С. 842-851.
124. Ковалев, В. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Изв. Саратов. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, №. 4(2). – С. 94-127
125. Ковалев, В. А. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.мат. Науки. – 2011. – № 2(23). – С. 53-61.
126. Ковалев, В. А. Прохождение обобщенной ГНП- термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Р. А. Ревинский // Изв. Саратов. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, №. 1. – С. 59-70
127. Лычев, С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра / С. А. Лычев // Вестн. Сам. гос. ун-та. – 2003. – № 4 (30). – С. 112-124.
128. Лычев, С. А. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости / С. А. Лычев, Ю. Э. Сеницкий // Вестник Самарск. ун-та. Естественнонаучная серия. – 2002. – Спец. выпуск. – С. 16-38.
129. Лычев, С. А. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости / С. А. Лычев, А. В. Манжиров, С. В. Юбер // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 138-154.

130. Матченко, Н. М. Теория деформирования разно-сопротивляющихся материалов / Н. М. Матченко, А. А. Трещева. – Изд-во ТулГУ, 2005. – 186 с.
131. Мкртычев, О. В. Сравнительный анализ аналитического и численного решения задачи термоупругости для прямоугольной пластины / О. В. Мкртычев, Д. С. Сидорова, М. А. Рубцова // Вестник МГСУ. – 2011. – № 4. – 248 с.
132. Радаев, Ю. Н. Гармонические связанные термоупругие волны в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе / Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2008. – №. 8/2(67). – С. 109-132
133. Ревинский, Р. А. Распространение обобщенных связанных термоупругих волн в волноводе с проницаемой для тепла стенкой: диссерт. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Ревинский Роман Александрович. – Чуваш. гос. пед. ун-т им. И.Я. Яковлева, Чебоксары, 2011. – 142 с.
134. Фридман, Л. И. Нестационарная динамическая задача теории упругости для конечного цилиндра / Л. И. Фридман // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2003. – № 2(28). – С. 113-121.
135. Сеницкий, Ю. Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра / Ю. Э. Сеницкий // Прикл. Механика. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 95-100.
136. Сеницкий, Ю. Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы / Ю. Э. Сеницкий // Прикл. мех. АН УССР. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 34–41.
137. Сеницкий, Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований / Ю. Э. Сеницкий. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. – 174 с.
138. Сеницкий, Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики / Ю. Э. Сеницкий // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57-63.
139. Сеницкий, Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики / Ю.Э. Сеницкий // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 71-81.

140. Сеницкий, Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям / Ю. Э. Сеницкий // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Матем., механ., информатика, – 2011. – № 3(1). – С. 61-89.
141. Шляхин Д. А. Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра / Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова // Инженерный вестник Дона. – 2020. – № 3. – С. 9-12.
142. Fu, J. W. et al. Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials / J. W. Fu // Composite Structures. – 2015. – № 131. – P. 139-150.
143. Merzlyakov, V. P. Axisymmetric problem of thermoelasticity for a hollow cylinder of finite length / V. P. Merzlyakov // Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal. – 1967. – Vol. 12, № 5. – P. 620-625.
144. Shlyakhin, D. A. Non-stationary axially symmetric goal of thermo-elasticity for a fixed rigid circular multi-layer plate / D. A. Shlyakhin // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol. 117, № 00156. – P. 1-8.
145. Shlyakhin, D. A. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate / D. A. Shlyakhin, O. V. Ratmanova (Kazakova) // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 153. – P. 662-666.
146. Zong, Y. L. Coupled Problem of Thermoelasticity for Multilayered Spheres with Time-Dependent Boundary Conditions / Y. L. Zong // Journal of Marine Science and Technology. – 2004. – Vol. 12. № 2. – P. 93-101.
147. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М.: Высш. Шк, 2005. – 430 с.
148. Кудинов, В. А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк, С. А. Назаренко. – Самара: СамГТУ, 2006. – 303 с.

149. Мотовиловец, И. А. Механика связанных полей в элементах конструкций / И. А. Мотовиловец, В. И. Козлов. – Термоупругость, Киев: Наук, думка, 1987. – Т. 1. – 264 с.
150. Шляхин, Д. А. Осесимметричная задача теории упругости для круглой жесткозакрепленной пластины / Д. А. Шляхин // Известия вузов. Строительство. – 2011. – № 7. – С. 3-9.
151. Шляхин, Д. А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины. / Д. А. Шляхин // Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. серия. – 2011. – № 8 (89). – С. 142-152.
152. Daoud, S. Transient response of multilayered hollow cylinder using various theories of generalized thermoelasticity/ S. Daoud Mashat, M. Aahraf Zenkour, A. Khaled Elsibai // Natural Science. – 2010. – Vol.2, №10. – P. 1171-1179.
153. Gennaro, V. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders / V. Gennaro, M. Gennady // Journal of the European Ceramic Society. – 2016. – № 36. P. 2411–2417.
154. Youssef H. M. Two-Dimensional Generalized Thermoelasticity Problem for a Half-Space Subjected to RampType Heating / H. M. Youssef // European Journal of Mechanics A Solids. – 2006. – Vol. 25, №. 5. – P. 745-763.
155. Chen, C. K., Hung, C.I. and Lee, Z.Y. Transient thermal stresses analysis of multilayered hollow cylinder / C. K. Chen, C.I. Hung, Z. Y. Lee // Acta Mechanica. – 2001. – № 151. – P. 75-88.
156. Шляхин, Д. А. Нестационарная задача термоупругости для круглой пластины / Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева // Материалы Международной научно-практической конференции «Научные исследования XXI века: теория и практика». Нефтекамск: Научно-издательский центр «Мир науки». – 2020. – С. 57-68.
157. Шляхин, Д. А. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной изотропной пластины / Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева // Сетевое издание «Научные исследования XXI века». – 2020. – № 3 (5). – С. 62-68.

158. Кусаева, Ж. М. Нестационарная задача термоупругости для жестко закрепленной многослойной круглой пластины / Ж. М. Кусаева // Цифровизация образования: теоретические и прикладные исследования современной науки. Ростов-на-Дону: изд-во Южного университета ИУБиП. – 2021. – Т. 2 (1). – С. 163-168.
159. Кусаева, Ж. М. Задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины / Ж. М. Кусаева // Наука, технологии, инновации в мире глобальных трансформаций. Ростов-на-Дону: изд-во Южного университета ИУБиП. – 2021. – Т. 1. – С. 20-22.
160. Кусаева, Ж. М. Задача термоупругости для круглой пластины в случае действия температурной нагрузки / Ж. М. Кусаева // Достижения науки и образования. Иваново: «Научные исследования». – 2021. – № 5 (77). – С. 15-18.
161. Кусаева, Ж. М. Решение задачи термоупругости для круглой пластины при действии температурной нагрузки / Ж. М. Кусаева // Сборник научных работ «Современная школа России. Вопросы модернизации». Москва: Заметки ученого. – 2021. – № 3 (36, т.2). – С. 32-34.
162. Кусаева, Ж. М. Решение осесимметричной задачи термоупругости для круглой пластины с учетом связанности термоупругих полей / Ж. М. Кусаева // Вестник Инженерной школы Дальневост. федеральн. ун-та. – 2021. – № 3(48). – С. 3-10.
163. Kusaeva, Zh. M. Thermoelastic non-stationary fields in a rigidly fixed plate / Zh. M. Kusaeva // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2021. - Vol. 1181. – 012026 p.
164. Шляхин, Д. А. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины / Д. А. Шляхин, Ж. М. Даулетмуратова (Кусаева) // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – № 5 (77). – С. 1-18.
165. Шляхин, Д. А., Даулетмуратова (Кусаева) Ж. М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой

пластины / Д. А. Шляхин, Ж. М. Даулетмуратова (Кусаева) // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 4. – С. 191-200.

166. Шляхин, Д. А., Даулетмуратова (Кусаева) Ж. М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости / Д. А. Шляхин, Ж. М. Даулетмуратова (Кусаева) // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительные технологии. Самара: Самар. гос. техн. ун-т. – 2019. – № 1. – С. 561-567.

167. Шляхин, Д. А. Динамическая задача теории термоупругости для жестко закрепленного изотропного диска / Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительные технологии. Самара: Самар. гос. техн. ун-т. – 2020. – № 1. – С. 422-427.

168. Шляхин, Д. А. Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жестко закрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований / Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 320-342.

169. Shlyakhin, D. A. Unsteady thermoelasticity problem for rigidly fixed round plate / D. A. Shlyakhin, Zh. M. Kusaeva, M. A. Kalmova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 775. – 2020. – № 012137. – P. 1-9.

170. Shlyakhin, D. A. The associated non-stationary thermal elasticity problem for a two-layer plate / D. A. Shlyakhin, Zh. M. Kusaeva // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2021. – № 1015. – P. 1-8.

171. Shlyakhin, D. A. Influence of the Connectedness of Thermoelastic Fields on the Stress-Strain State of a Circular Rigidly Fixed Plate / D. A. Shlyakhin, Zh. M. Kusaeva // International Conference on Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021). – 2022. – P. 237-244.

## Приложение 1



Общество с ограниченной ответственностью  
«Научно Исследовательский Проектный институт нефти и газа «Петон»  
(ООО «НИПИ НГ «Петон»)

### АКТ

**о внедрении результатов диссертационной работы  
«Исследование связанных нестационарных термоупругих полей в однослойных  
и многослойных круглых пластинах»  
ассистента кафедры «Строительная механика, инженерная геология,  
основания и фундаменты» АСА СамГТУ  
Кусаевой Жанслу Маратовны**

ООО «Научно-исследовательский Проектный институт нефти и газа «Петон» осуществляет проектирование и разработку различных нефтедобывающих конструкций, которые подвергаются термическому воздействию во время их эксплуатации. В частности, при конструировании таких оборудований в качестве основного рабочего элемента используется многослойная круглая пластина.

Настоящий акт составлен о том, что в целях повышения эффективности работы ООО «НИПИ НГ «Петон» были использованы материалы кандидатской работы Кусаевой Ж.М. «Исследование связанных нестационарных термоупругих полей в однослойных и многослойных круглых пластинах», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, посвященной разработке методики расчета круглых жесткозакрепленных изотропных пластин, испытывающих нестационарное температурное воздействие.

Разработанная Кусаевой Ж.М. методика расчета температурных деформаций и напряжений в упругих телах позволяет повысить теоретический уровень инженерных расчетов, выполняемых проектным отделом ООО «НИПИ НГ «Петон», и уменьшить количество дорогостоящих натурных экспериментов.

Исследования диссертационной работы Кусаевой Жанслу Маратовны проводили комиссия в составе:

Ведущий Инженер авторского надзора ООО «НИПИ НГ «Петон»

Алехин А. П.

Инженер Независимого технического надзора и СК НК

Смирнов А. В.

Начальник лаборатории неразрушающего контроля ООО «ПРЕМИУМ»

Наумов В.В.

Руководитель проекта ООО «ПРЕМИУМ»

Андриевский С.В.





**САМАРСКИЙ  
ПОЛИТЕХ**  
Опорный университет

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
федеральное государственное  
бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Самарский государственный  
технический университет»  
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)  
Академия строительства и архитектуры  
(АСА СамГТУ)

ул. Молодогвардейская, 244,  
гл. корпус, г. Самара, 443100  
Тел.: (846) 278-43-11, факс (846) 278-44-00  
E-mail: [rector@samgtu.ru](mailto:rector@samgtu.ru)  
ОКПО 02068396, ОГРН 1026301167683,  
ИНН 6315800040, КПП 631601001

№ \_\_\_\_\_  
На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_



«УТВЕРЖДАЮ»

Директор АСА СамГТУ  
К.Т.Ш. Шувалов М.В.

## АКТ

внедрения результатов диссертационной работы  
ассистента кафедры «Строительная механика, инженерная геология,  
основания и фундаменты» АСА СамГТУ  
Кусаевой Ж.М

Материалы диссертационной работы Кусаевой Ж.М. «Исследование связанных нестационарных термоупругих полей в однослойных и многослойных круглых пластинах» используются в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению 08.04.01 «Строительство» (профиль образования «Теория сооружений») и при изучении дисциплины «Взаимодействие упругих элементов конструкции с сопряжёнными полями гидроупругости, термоупругости, электроупругости».

Зав.кафедрой СМИГОФ  
д.т.н., доцент

Шляхин Д.А

## Приложение 2



Общество с ограниченной ответственностью «ИНЭКС СЕРТ». Аттестат аккредитации RA, RU.312302

## СВИДЕТЕЛЬСТВО О ПОВЕРКЕ

№ 41922

Действительно до  
24.11.2021 г.

Средство измерений: Измеритель температуры электронный «CENTER» мод. 304,  
Рег. № 22128-07

*наименование, тип, модификация, регистрационный номер в Федеральном  
информационном фонде по обеспечению единства измерений, присвоенный при  
утверждении типа*

заводской (серийный) номер 200405467

в составе -

номер знака предыдущей поверки -

поверено в полном объеме

*наименование единиц величин, диапазонов измерений, на которых поверено средство измерений*

в соответствии с МП 22128-07 «Измерители температуры электронные «CENTER» моделей  
301,302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309 фирмы CENTER Technology Corp.,  
Тайвань. Методика поверки»

*наименование или обозначение документа, на основании  
которого выполнена поверка*

с применением эталонов: Термометр сопротивления платиновый вибропрочный

*регистрационный номер и (или) наименование, тип,*

эталонный ПТС-10М, № 2852; Термометр сопротивления платиновый вибропрочный эталонный  
ПТС-10М, № 2855; Измеритель температуры многоканальный прецизионный МИТ 8.03, № 289;  
Преобразователь термоэлектрический платиновый-платинородисевый эталонный, ПРО-1250-01,  
№0038; Калибратор температуры, КТ-3, №229

*заводской номер, разряд, класс или погрешность эталонов, применяемых при поверке*

при следующих значениях влияющих факторов: Температура воздуха 21,2°C

*перечень влияющих факторов,*

Относительная влажность воздуха 56 %, атмосферное давление 754 мм рт.ст.

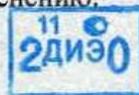
*нормированных в документе на методику поверки, с указанием их значений*

и на основании результатов первичной (периодической) поверки признано

*ненужное зачеркнуть*

пригодным к применению.

Знак поверки:



Руководитель лаборатории

*СА*  
подпись

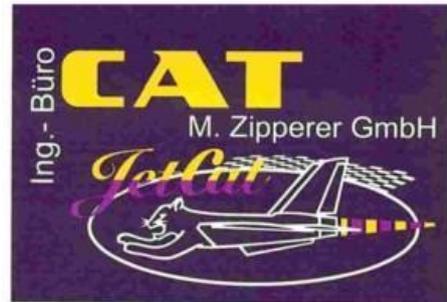
Соколов Александр Олегович

Поверитель

*Кириенко*  
подпись

Кириенко Константин Борисович

Дата поверки  
25.11.2020 г.



Ingenieurbüro CAT, M. Zipperer GmbH, Wettelbrunner Str. 6, D-79282 Ballrechten-Dottingen

Eltemiks Equipment  
87b Pirogova Str.  
394038 Voronezh  
Russian Federation

AS/DK

01.08.2019

**To whom it may concern**

We hereby certify that Eltemiks Equipment 87b Pirogova Str. 394038 Voronezh is the official and distributor for Russian Federation, and is authorized to offer, bid and sell the products of Ingenieurbüro CAT, M. Zipperer GmbH, Wettelbrunner Straße 6, 79282 Ballrechten-Dottingen.

This certificate is valid until revocation and replaces all other certificates.

Ingenieurbüro CAT  
M. Zipperer GmbH

Ingenieurbüro **CAT**  
M. Zipperer GmbH  
Wettelbrunner Str. 6 · D-79282 Ballrechten-Dottingen  
Tel. 0 76 34/5 05 68 00 · Fax 5 05 68 01  
e-mail: info@cat-ing.de

  
Sales Manager

Geschäftsführer: Markus Zipperer  
Steuer-IdNr.: 12179/48400  
USt-IdNr./VAT: DE 142212412  
Handelsregister: Freiburg HRB 310 108  
Mail/ Webseite: info@cat-ing.de / www.cat-ing.de

Firmensitz: Ingenieurbüro CAT, M. Zipperer GmbH  
Wettelbrunner Str. 6  
D-79282 Ballrechten-Dottingen / Germany  
Tel.: +49 (0) 7634-5056-800 · Fax: -801  
ALB: www.cat-ing.de · www.jetcat.de

Bank: Sparkasse Staufen-Breisach · BIC: SOLADES1STF  
IBAN: DE08 6805 2328 0009 0770 66

Bank: Deutsche Bank AG · BIC: DEUTDE6F  
IBAN: DE68 6807 0030 0040 1794 00



### Приложение 3

**Типовая программа в среде MathCad–15 по определению частот собственных колебаний круглой жестко закрепленной пластины.**

**Размеры пластины:**

$bb := 1$       радиус пластины, м;

$hh := 0.1$       толщина пластины, м;

**Физические характеристики пластины:**

$E := 2.7 \cdot 10^{10}$       модуль упругости, Н/м<sup>2</sup>;

$\mu := 0.2$       коэффициент Пуассона;

$\rho := 2000$       плотность, кг/м<sup>3</sup>;

$h := \frac{hh}{bb}$       толщина пластины в безразмерной форме;

**Собственные значения по радиальной координате:**

$j1 := 3.83170$ ,       $j2 := 7.01558$ ,       $j3 := 10.1734$ ,

$j4 := 13.32369$ ,       $j5 := 16.47$ ,       $j6 := 19.615$ ;

$a1 := \frac{1 - 2 \cdot \mu}{2 \cdot (1 - \mu)}$ ,       $a2 := \frac{1}{2 \cdot (1 - \mu)}$ ,       $a8 := \frac{\mu}{1 - \mu}$ ;

$jj := j1$

$B1(\lambda) := \sqrt{jj^2 - \lambda^2}$ ,       $B1(\lambda) := \sqrt{B1(\lambda)}$ ;

$B2(\lambda) := jj^2 - \frac{\lambda^2}{a1}$ ,       $B2(\lambda) := \sqrt{B2(\lambda)}$ ;

$K11(\lambda, z) := e^{B1(\lambda) \cdot z}$ ,       $K12(\lambda, z) := e^{-B1(\lambda) \cdot z}$ ,       $K13(\lambda, z) := e^{B2(\lambda) \cdot z}$ ,       $K14(\lambda, z) := e^{-B2(\lambda) \cdot z}$ ;

$$K24(\lambda, z) := \left[ \frac{a1 \cdot B2(\lambda)^2 + \lambda^2 - jj^2 + a2^2 \cdot jj^2}{a2 \cdot jj \cdot (a1 \cdot jj^2 - \lambda^2)} \right] \cdot (-B2(\lambda) \cdot e^{-B2(\lambda) \cdot z}),$$

$$K21(\lambda, z) := \left[ \frac{a1 \cdot B1(\lambda)^2 + \lambda^2 - jj^2 + a2^2 \cdot jj^2}{a2 \cdot jj \cdot (a1 \cdot jj^2 - \lambda^2)} \right] \cdot (B1(\lambda) \cdot e^{B1(\lambda) \cdot z}),$$

$$K22(\lambda, z) := \left[ \frac{a1 \cdot B1(\lambda)^2 + \lambda^2 - jj^2 + a2^2 \cdot jj^2}{a2 \cdot jj \cdot (a1 \cdot jj^2 - \lambda^2)} \right] \cdot (-B1(\lambda) \cdot e^{-B1(\lambda) \cdot z}),$$

$$K23(\lambda, z) := \left[ \frac{a1 \cdot B2(\lambda)^2 + \lambda^2 - jj^2 + a2^2 \cdot jj^2}{a2 \cdot jj \cdot (a1 \cdot jj^2 - \lambda^2)} \right] \cdot (B2(\lambda) \cdot e^{B2(\lambda) \cdot z});$$

$$D11(\lambda, z) := a8 \cdot jj \cdot K11(\lambda, z) + \frac{d}{dz} K21(\lambda, z), \quad D12(\lambda, z) := a8 \cdot jj \cdot K12(\lambda, z) + \frac{d}{dz} K22(\lambda, z),$$

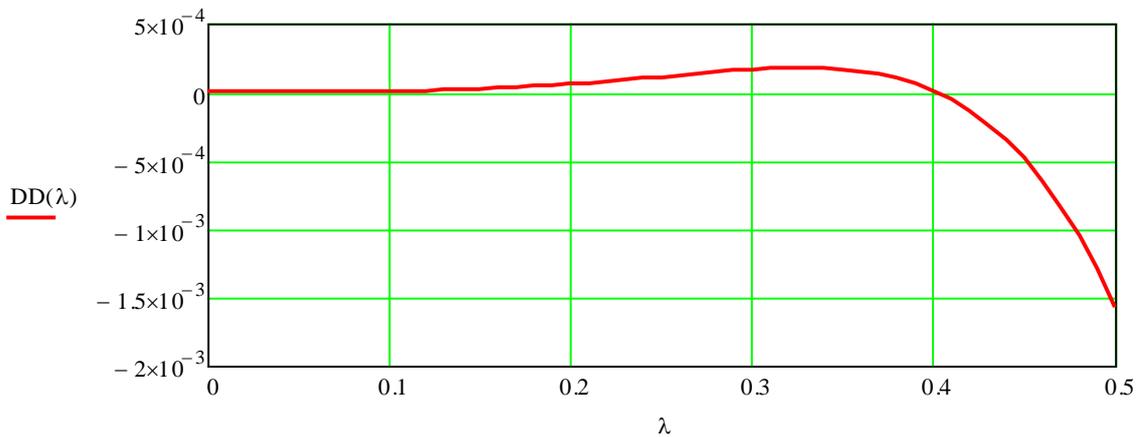
$$D13(\lambda, z) := a8 \cdot jj \cdot K13(\lambda, z) + \frac{d}{dz} K23(\lambda, z), \quad D14(\lambda, z) := a8 \cdot jj \cdot K14(\lambda, z) + \frac{d}{dz} K24(\lambda, z),$$

$$D21(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K11(\lambda, z) - jj \cdot K21(\lambda, z), \quad D22(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K12(\lambda, z) - jj \cdot K22(\lambda, z),$$

$$D23(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K13(\lambda, z) - jj \cdot K23(\lambda, z), \quad D24(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K14(\lambda, z) - jj \cdot K24(\lambda, z);$$

$$DD(\lambda) := \begin{pmatrix} D11(\lambda, 0) & D12(\lambda, 0) & D13(\lambda, 0) & D14(\lambda, 0) \\ D21(\lambda, 0) & D22(\lambda, 0) & D23(\lambda, 0) & D24(\lambda, 0) \\ D11(\lambda, h) & D12(\lambda, h) & D13(\lambda, h) & D14(\lambda, h) \\ D21(\lambda, h) & D22(\lambda, h) & D23(\lambda, h) & D24(\lambda, h) \end{pmatrix}$$

$\lambda := 0, 0.1..1.5$



$$DD(0.401) = 1.071 \times 10^{-8}$$

$$\lambda := 0.401$$

$$DDD := \begin{pmatrix} D12(\lambda, 0) & D13(\lambda, 0) & D14(\lambda, 0) \\ D22(\lambda, 0) & D23(\lambda, 0) & D24(\lambda, 0) \\ D12(\lambda, h) & D13(\lambda, h) & D14(\lambda, h) \end{pmatrix}, \quad D2 := \frac{\begin{pmatrix} -D11(\lambda, 0) & D13(\lambda, 0) & D14(\lambda, 0) \\ -D21(\lambda, 0) & D23(\lambda, 0) & D24(\lambda, 0) \\ -D11(\lambda, h) & D13(\lambda, h) & D14(\lambda, h) \end{pmatrix}}{DDD},$$

$$D3 := \frac{\begin{pmatrix} D12(\lambda, 0) & -D11(\lambda, 0) & D14(\lambda, 0) \\ D22(\lambda, 0) & -D21(\lambda, 0) & D24(\lambda, 0) \\ D12(\lambda, h) & -D11(\lambda, h) & D14(\lambda, h) \end{pmatrix}}{DDD}, \quad D4 := \frac{\begin{pmatrix} D12(\lambda, 0) & D13(\lambda, 0) & -D11(\lambda, 0) \\ D22(\lambda, 0) & D23(\lambda, 0) & -D21(\lambda, 0) \\ D12(\lambda, h) & D13(\lambda, h) & -D11(\lambda, h) \end{pmatrix}}{DDD};$$

$$KK1(z) := K11(\lambda, z) + D2 \cdot K12(\lambda, z) + D3 \cdot K13(\lambda, z) + D4 \cdot K14(\lambda, z),$$

$$KK2(z) := K21(\lambda, z) + D2 \cdot K22(\lambda, z) + D3 \cdot K23(\lambda, z) + D4 \cdot K24(\lambda, z);$$

$$P1(z) := a8 \cdot jj \cdot KK1(z) + \frac{d}{dz} KK2(z), \quad P2(z) := \frac{d}{dz} KK1(z) - jj \cdot KK2(z);$$

$$z := 0, 0.001 \cdot h$$

