

На правах рукописи



Кальмова Мария Александровна

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНИКА РАДИАЛЬНЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ
ПОЛЕЙ В ДЛИННОМ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ
ЦИЛИНДРЕ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Самара 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет»

Научный руководитель:

Шляхин Дмитрий Аверкиевич, доктор технических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Ермоленко Георгий Юрьевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой технических дисциплин филиала Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова» г. Новороссийск

Нестеров Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений филиала ФГБУ науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук» Южного Математического Института г. Владикавказ

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону Ростовской области

Защита состоится «13» октября 2023 г. в 11 ч. 00 минут на заседании объединенного диссертационного совета 99.2.039.02 (Д999.122.02) на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» и ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, главный корпус, аудитория 200.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»:

Отзывы на автореферат просим высылать в двух экземплярах, заверенных печатью, по адресу: Россия, 443100, г. Самара ул. Молодогвардейская, 244, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета 99.2.039.02 (Д999.122.02)

Автореферат разослан «___» _____ 202_ г.

Ученый секретарь диссертационного совета:



А.Р. Луц

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В настоящее время широко используются измерительные приборы, работа которых основана на эффекте связанности полей различной физической природы. Особый интерес представляют конструкции, изготовленные из пьезокерамического материала в случае их неравномерного нестационарного нагрева. Данное внешнее воздействие сопровождается возникновением температурных деформаций, что приводит к образованию в поляризованной среде электрического поля.

Для определения напряженно–деформированного состояния, а также характера распределения электрического и температурного полей в конструкции с учетом их взаимного влияния используются разнообразные теории термоэлектроупругости, позволяющие решить данную проблему с различной степенью точности. Математическая формулировка рассматриваемых задач включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения, электростатики и теплопроводности. Проблема их интегрирования приводит, как правило, к исследованию расчетных соотношений в несвязанной постановке. Однако для более качественной оценки нестационарных процессов в конструкциях возникает необходимость построения связанных аналитических решений. Данный подход позволяет получить точные, в рамках используемых моделей, расчетные соотношения в наиболее общем виде, что в результате дает возможность усовершенствовать и повысить функциональные возможности пьезокерамических устройств.

Таким образом, разработка эффективных аналитических алгоритмов расчета термоэлектроупругих систем, позволяющих получить замкнутое решение, выявление новых связей между характером внешнего температурного воздействия, процессом деформирования и величиной электрического поля в пьезокерамических конструкциях, представляет в настоящее время одну из актуальных проблем современной науки в области механики деформируемого твердого тела.

Степень разработанности темы диссертации. Общая трактовка связанности механических, тепловых и электрических процессов в конструкциях конечных размеров, впервые была представлена в работах Р.Д. Миндлина и В. Новацкого. В основе их исследований лежат фундаментальные труды в области электроупругости и теплопроводности таких ученых, как В. Фойгт, У. Мэзон, Ю.В. Новожилов, В.З. Партон, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Ф. Нейман, Дж. Дюгамель.

Использование в дальнейшем гиперболических уравнений теплопроводности, предложенных Г. Лордом, Ю. Шульманом, А. Грином и П. Нахди позволило сформулировать уточненные теории термоэлектроупругости.

Большой вклад в решение прикладных задач внесли Ватульян А.О., А.В. Белоконов, А.В. Наседкин, Т.И. Белянкова, В.А. Крысько, Е.Б. Попов, В.И. Даниловская, Кирилук В.С., Е.А. Тимошкина, В.В. Фирсанов, W Chen, И.А. Глозман, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкин, М. Aouadi, C.Q. Chen, D. O Iesan, M. Ishihara, H.S. Tzou, R. Ye, Rao S.S., Sunar M., Y. Li, L. Yang, L. Zhang, и др.

Целью диссертационной работы является разработка нового теоретического подхода по решению проблемы расчета длинного полого пьезокерамического цилиндра с учетом связанности термоэлектроупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки, а также проведение качественного и количественного анализа нестационарных процессов в исследуемых электроупругих системах.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и построены новые замкнутые решения связанных и несвязанных начально–краевых задач гиперболической теории термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра.

Методы исследования. Для решения поставленных линейных краевых задач используются конечные интегральные преобразования, являющие наиболее общей формой метода неполного разделения переменных и позволяющие построить замкнутые решения самосопряженных и несамосопряженных начально–краевых задач. Построенные расчетные соотношения реализованы в среде Mathcad–15 в виде программного комплекса.

Научная новизна диссертационной работы заключается в развитии теоретических основ нестационарного расчета длинного полого пьезокерамического цилиндра с учетом связанности термоэлектроупругих полей. Полученные расчетные соотношения, описывающие механические, температурные и электрические поля, позволяют научно обосновать и уточнить конструктивное решение проектируемых пьезокерамических элементов конструкций различного назначения.

В работе получены следующие **новые научные результаты**, связанные с расчетом длинного пьезокерамического цилиндра при

использовании гиперболической теории термоэлектроупругости Лорда–Шульмана:

1. Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

2. Получено новое замкнутое решение связанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;

3. Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости без учета сил инерции упругой системы и удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

4. Разработана методика расчета несвязанной динамической осесимметричной задачи обратного пьезоэффекта для пьезокерамического термоупругого цилиндра;

5. Проанализировано влияние температурного поля на напряженно–деформированное состояние и электрическое поле пьезокерамического элемента.

Теоретическая значимость работы. Разработанная методика расчета позволяет описать и проанализировать взаимосвязь полей различной физической природы в длинном пьезокерамическом цилиндре при внешнем осесимметричном нестационарном температурном и электрическом воздействии. Полученные замкнутые решения дают возможность выявить новые закономерности при анализе численных результатов, что существенно повышает теоретический уровень инженерных расчетов.

Практическая значимость работы определяется возможностью создания, на основании разработанных алгоритмов расчета, программного комплекса, предназначенного для проектирования пьезокерамических элементов в виде длинного полого цилиндра, входящих в состав измерительных устройств. Полученные результаты позволяют также обосновать рациональную программу экспериментов, что значительно сократит объем дорогостоящих натуральных исследований.

Разработанные алгоритмы расчета и их программная реализация нашли применение в инженерных расчетах, выполняемых проектным отделом ООО «СамараГазСтрой». Результаты работы используются также в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство» и профилю образования «Теория соору-

жений». Результаты внедрения исследования подтверждены соответствующими актами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

2. Новое замкнутое решение связанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;

3. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра без учета сил инерции (граничные условия теплопроводности 1–го и 3–го рода);

4. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи обратного пьезоэффекта для пьезокерамического термоупругого цилиндра;

5. Анализ численных результатов расчета термоэлектроупругих процессов в пьезокерамическом цилиндре.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений, математической постановки и методами решения рассматриваемых нестационарных задач термоэлектроупругости, совпадением в частных случаях представленных решений с известными численными результатами, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 77–80–ых Всероссийских научно–технических конференциях «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре», Самара, 2020–2023; Международной научной конференции «Civil, Architectural and Environmental Sciences and Technologies» (Международный форум «Города будущего»), Самара, 2019; XXIX, XXX Международных научных Российско–польско–словацких семинарах, 2020, 2021; II Международной научной конференции «Modelling and methods of structural analysis», 2021; XXV Международной научной конференции «On Advance in Civil Engineering Construction the formation of living environment», 2022, Международная научно–техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», 2022.

Полностью диссертация была представлена на расширенном семинаре кафедры «СМИГОФ» СамГТУ (зав. кафедрой Шляхин Д.А., д.т.н., доцент), «Математическое моделирование в механике (зав. кафедрой Степанова Л.В., д.ф.–м.н., профессор) и на семинаре аспирантов СамГТУ (руководитель аспирантуры по направлению 01.06.01 Математика и механика Радченко В.П., д.ф.–м.н., профессор).

Публикации. По результатам данного исследования опубликовано 17 научных работ, из них 3 работы в рецензируемых журналах ВАК, 5 работ в рецензируемых журналах Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Работы [9, 15-17] выполнены автором самостоятельно. Постановка задач, построение замкнутых решений, разработка программного комплекса и анализ полученных результатов в работах [1-8, 10-14] диссертантом проводилась совместно с соавторами. Проводимые в рамках диссертационной работы экспериментальные исследования были выполнены автором самостоятельно.

Объем и структура диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы и приложений, общим объемом 142 страниц машинописи, 106 рисунка, 2 таблицы. Список литературы включает 123 работы.

Благодарности: Автор выражает благодарность научному руководителю доктору технических наук Д.А. Шляхину за постановку задачи и поддержку работы.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, излагается ее научная новизна и практическая значимость результатов, а также представлено общее содержание диссертационной работы.

В первой главе проведен обзор работ, связанных с расчетом пьезокерамических тел в случае действия нестационарной температурной нагрузки. На основании выполненного анализа литературы по теме диссертации был сделан вывод, что большинство решений начально – краевых задач термоэлектроупругости получены с помощью прикладных и численных методов расчета. Это позволило сформулировать актуальность темы диссертации, связанной с необходимостью создания новых алгоритмов расчета, позволяющих описать сложные нестационарные процессы в длинном цилиндре.

Во второй главе в пункте 2.1 приведены расчетные соотношения для пьезокерамического радиально поляризованного материала с гексагональной кристаллической решеткой класса бтт. Доказано, что при исследовании длинного цилиндра в случае удовлетворения граничных условий на его цилиндрических поверхностях, не зависящих от аксиальной координаты, в уравнении теплопроводности можно пренебречь относительными деформациями по его высоте. И в результате рассматривать нестационарную задачу о чисто радиальных колебаниях (перемещениях).

В пунктах 2.2–2.5 исследуется начально–краевая задача термоэлектростатости для полого длинного незакрепленного пьезокерамического цилиндра, занимающего в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область $\Omega : \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. На внутренней ($r_* = a$) цилиндрической поверхности известна температура $\omega_1^*(t_*)$ (граничное условие 1– рода) изменяющаяся по времени t_* , а на внешней ($r_* = b$) лицевой поверхности задан закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3– рода) и температура окружающей среды \mathcal{G}^* . Внутренняя электродированная поверхность заземлена, а внешняя подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением.

В общем случае осесимметричные дифференциальные уравнения движения и электростатики для пьезокерамического радиально поляризованного материала с гексагональной кристаллической решеткой класса бтт, а также уравнение теплового баланса на основании гиперболической теории Лорда–Шульмана в цилиндрической системе координат в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta &= 0, \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(a_7 \Theta + a_8 \nabla U - a_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi|_{r=R} = 0, \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad (2)$$

$$\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \Theta \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r} + a_{11} \Theta \right)_{|r=1} = a_{11} \mathcal{G};$$

$$t = 0 \quad U = \phi = \Theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0; \quad (3)$$

$$\text{где } \{U, r, R\} = \{U^*, r_*, a\} / b, \quad \phi = \frac{e_{33}}{C_{33} b} \phi^*, \quad \{t, \beta\} = \frac{\{t_*, \beta_{rel}\}}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}},$$

$$\{\Theta, \omega_1, \mathcal{G}\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, \omega_1^* - T_0, \mathcal{G}^* - T_0\}, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}},$$

$$a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33} \varepsilon_{33}}, \quad a_5 = \frac{e_{31} e_{33}}{C_{33} \varepsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3 e_{33}}{\varepsilon_{33} \gamma_{33}}, \quad a_8 = \frac{b \gamma_{33}^2 T_0}{\Lambda \sqrt{C_{33} \rho}},$$

$$\{a_7, a_9\} = \left\{ k, \frac{\gamma_{33} g_3 T_0}{e_{33}} \right\} \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_{10} = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad a_{11} = \alpha \frac{b}{\Lambda}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$U^*(r_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, t_*)$ – радиальная составляющая вектора перемещений и потенциал электрического поля в размерной форме; $\Theta^*(r_*, t_*) = T(r_*, t_*) - T_0(r_*)$; Θ^*, T, T_0 – соответственно приращение, текущая температуры, а также температура первоначального состояния тела; $C_{ms}, \rho, e_{ms}, \varepsilon_{33}$ – модули упругости, плотность, пьезомодули и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала ($m, s = \overline{1,3}$); γ_{11}, γ_{33} – компоненты тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = C_{11} \alpha_t$, $\gamma_{33} = C_{33} \alpha_t$); Λ, k, α_t – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; g_3 – компонента тензора пироккоэффициентов; β_{rel} – время релаксации, α – коэффициент теплоотдачи, $\dot{\Theta}_0$ – известная в начальный момент скорость изменения температуры.

Проблема решения несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (1) приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается задача теплопроводности (последнее равенство (1) и соответствующие условия (2), (3) без учета изменения объема тела и напряженности электрического поля путем использования конечного интегрального преобразования Ханкеля.

В результате получается следующее выражение для функции $\Theta(r, z, t)$:
$$\Theta(r, t) = H_1(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} R_H(n, t) K(j_n, r) \|K_n\|^{-2}, \quad (4)$$

где $R_H, K, \|K_n\|$ – трансформанта, функция и норма преобразования Ханкеля, H_1 – вспомогательная функция, позволяющая перевести неоднородные условия (2) в однородные, j_n – собственные значения.

На втором этапе решается задача электроупругости (первые два равенства (1)) с соответствующими краевыми условиями (2) – (5) с учетом известного температурного поля Θ . Использование вырожденного обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) позволяет получить выражения для функций $U(r, t), \phi(r, t)$:

$$\begin{aligned} \{U(r, t), \phi(r, t)\} &= \{H_1(r, t), H_2(r, t)\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \frac{\{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)\}}{\|K_i\|^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

где $G, K_1, K_2, \|K_{in}\|$ – трансформанта, компоненты вектор-функции преобразования и норма ядровой функции метода КИП, H_1, H_2 – стандартизирующие функции; λ_i – собственные значения.

Принимая во внимание заземление внутренней поверхности пьезокерамического элемента, напряжение холостого хода $V(t_*)$ определяется потенциалом электрического поля на его внешней поверхности:
$$V^*(t_*) = \phi(1, t_*). \quad (6)$$

Расчетные соотношения (4) – (6) дают возможность определить напряженно-деформированное состояние и электрическое поле цилиндра, а также его температурное поле без учета скоростей изменения объема и напряженности в процессе деформирования. Причем при исследовании задачи электроупругости предполагается линейное распределение температуры по толщине стенки.

В качестве примера рассматривается цилиндр, изготовленный из пьезокерамики состава PZT-4, в случае изменения температуры на его внутренней цилиндрической поверхности по следующей зависимости:

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_* \right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad (7)$$

где $H(\tilde{t})$ – единичная функция Хэвисайда, T_{\max}, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max} = 373 \text{ K}$ ($100 \text{ }^\circ\text{C}$), $T_0 = 293 \text{ K}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$)).

Для определения области использования теории теплопроводности Лорда–Шульмана при исследовании задач термоэластостатики на рисунке 1 показаны графики изменения приращения температуры $\Theta(r, t)$ в цилиндре по радиальной координате ($t_{\max}^* = 10^{-5} \text{ с}$, $b = 7 \times 10^{-5} \text{ м}$, $R = 0.9$). Сплошной и пунктирной линией соответственно обозначены результаты, полученные с помощью гиперболического и параболического уравнения.

Результаты расчета подтверждают известные данные о более медленном прогреве упругой системы при использовании гиперболической теории. При этом разница результатов наблюдается только в цилиндрах микроразмеров и высокоскоростном изменении температуры (7).

Решение динамической задачи электроупругости позволяет получить зависимость (рис.2) между предельным значением времени t_{\max}^* и толщиной стенки цилиндра R , когда силами инерции в расчетах можно пренебречь (не заштрихованная часть графика) и использовать при постановке задач уравнения равновесия.

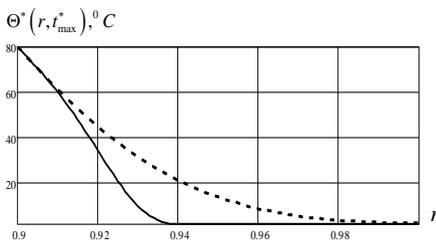


Рис. 1. Графики " $\Theta(r, t_{\max}^*) - r$ "

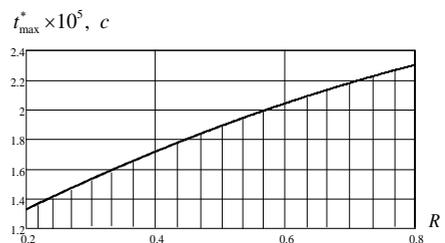


Рис. 2. График " $t_{\max}^* - R$ "

В третьей главе рассматривается связанная задача термоэластостатики при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1 – рода. В этом случае последнее условие (2)

заменяется на равенство: $\Theta|_{r=1} = \omega_2$ (ω_2 – известная температура на внешней цилиндрической поверхности).

В этом случае расчетные соотношения (1), при использовании условий о равенстве компонент тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = \gamma_{33}$) и отсутствие влияния температуры на электрическое поле ($g_3 = 0$), удается представить в виде самосопряженной системы уравнений. При этом данные допущения не оказывают существенно влияния на общую картину работы пьезокерамического цилиндра.

Решение краевой задачи строится при использовании вырожденного обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП). В результате получаются выражения для $U(r, t)$, $\phi(r, t)$, $\Theta(r, t)$:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_1(\lambda_i, t) K(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}, \quad (8)$$

$$\Theta(r, t) = H_2(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) \nabla K(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2},$$

$$\phi(r, t) = a_4 U(r, t) + \int [a_5 U(r, t) r^{-1} + a_6 \Theta(r, t)] dr,$$

где $G_1, G_2, K, \|K_i\|$ – трансформанты, функции и ее норма метода КИП.

В качестве примера рассматривается пьезокерамический цилиндр состава PZT-4 ($b = 0.02$ м, $R = 0.8$). На его внутренней поверхности действует температурная нагрузка (7), а на внешней $\omega_2^*(t_*) = 0$.

На рисунке 3 представлены графики изменения $\Theta^*(r, t)$ по радиальной координате в различные моменты времени ($1 - t_{\max}$, $2 - 4t_{\max}$, $3 - 15t_{\max}$). Численные результаты расчета показывают, что влиянием электроупругого поля на температурное поле можно пренебречь. При этом основным преимуществом построенного алгоритма расчета связанной задачи заключается в том, что в отличие от несвязанной постановки отпадает необходимость аппроксимации функции температуры при решении задачи электроупругости.

На рисунке 4 показаны графики изменения перемещений $U(1, t)$ по времени t с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) наведенного электрического поля. Следует отметить, что предварительная поляризация пьезокерамики приводит к образованию более «жесткого» материала, что приводит к уменьшению перемещений.

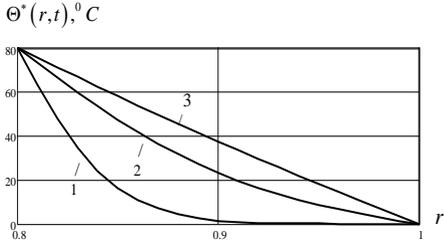


Рис.3. Графики " $\Theta(r, t_{\max}^*) - r$ "

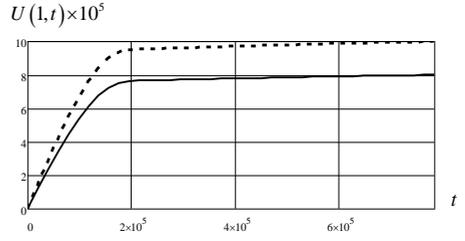


Рис.4. Графики " $U(1, t) - t$ "

В четвертой главе при учете ограничений по толщине стенки цилиндра и скорости изменения нагрузки (рис.2), позволяющих использовать в соотношениях (1) уравнения равновесия, исследуется связанная нестационарная задача термоэластостатики (1) – (3) при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода. В этом случае постоянные $a_7 - a_9$ принимают вид: $a_7 = 1$, $a_8 = \gamma_{33}^2 T_0 / (C_{33} k)$, $a_9 = \gamma_{33} g_3 T_0 / (e_{33} k)$, а безразмерное время определяется равенством $t = t_* \Lambda (b^2 k)^{-1}$.

Особенность построенного алгоритма заключается в том, что к начально-краевой задаче (1) – (3) применяется вырожденное биортогональное интегральное преобразование. Использование данного метода позволяет получить счетное множество задач для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\beta \frac{d^2 G_i}{dt^2} + \frac{dG_i}{dt} + \lambda_i^2 G_i = -R_H, \quad (9)$$

$$t = 0 \quad G_{i|t=0} = G_0, \quad \left. \frac{dG_i}{dt} \right|_{t=0} = \dot{G}_0; \quad (10)$$

решение, которых имеет вид:

$$G(\lambda_i, t) = (m_{1i} - m_{2i})^{-1} \left\{ (\dot{G}_0 - G_0 m_{2i}) \exp(m_{1i} t) - (\dot{G}_0 - G_0 m_{1i}) \exp(m_{2i} t) + \right. \\ \left. + \beta^{-1} \int_0^t R_H(\lambda_i, \tau) [\exp(m_{2i}(t - \tau)) - \exp(m_{1i}(t - \tau))] d\tau \right\}, \quad (11)$$

а также однородные краевые задачи относительно неизвестных компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r)$:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dK_{li}}{dr} - a_1 \frac{K_{li}}{r^2} + a_4 \nabla \frac{dK_{2i}}{dr} - a_5 \frac{1}{r} \frac{dK_{2i}}{dr} - \lambda_i^2 a_7 \frac{dK_{3i}}{dr} &= 0, \quad (12) \\ -\nabla \frac{dK_{2i}}{dr} + \nabla \frac{dK_{li}}{dr} + a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_{li}}{dr} + \lambda_i^2 a_8 \nabla K_{3i} &= 0, \\ \nabla \frac{dK_{3i}}{dr} + \frac{dK_{li}}{dr} + a_3 \frac{K_{li}}{r} - a_6 \frac{dK_{2i}}{dr} + \lambda_i^2 K_{3i} &= 0; \end{aligned}$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dK_{li}}{dr} + a_9 \frac{K_{li}}{r} + a_4 \frac{dK_{2i}}{dr} - \lambda_i^2 a_7 K_{3i} = 0, \quad K_{2i|r=R} = K_{3i|r=R} = 0, \quad (13)$$

$$\left(-\frac{dK_{2i}}{dr} + \frac{dK_{li}}{dr} + a_2 \frac{K_{li}}{r} + \lambda_i^2 a_8 K_{3i} \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{dK_{3i}}{dr} + a_{10} K_{3i} \right)_{|r=1} = 0;$$

и $N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dN_{li}}{dr} - a_1 \frac{N_{li}}{r^2} + \nabla \frac{dN_{2i}}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{dN_{2i}}{dr} - \nabla N_{3i} + a_3 \frac{N_{3i}}{r} &= 0, \quad (14) \\ -\nabla \frac{dN_{2i}}{dr} + a_4 \nabla \frac{dN_{li}}{dr} + a_5 \frac{1}{r} \frac{dN_{li}}{dr} + a_6 \nabla N_{3i} &= 0, \\ \nabla \frac{dN_{3i}}{dr} + \mu_i^2 \left(N_{3i} + a_7 \nabla N_{li} - a_8 \frac{dN_{2i}}{dr} \right) &= 0; \end{aligned}$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dN_{li}}{dr} + a_9 \frac{N_{li}}{r} + \frac{dN_{2i}}{dr} - N_{3i} = 0, \quad N_{2i|r=R} = N_{3i|r=R} = 0, \quad (15)$$

$$\left(-\frac{dN_{2i}}{dr} + a_4 \frac{dN_{li}}{dr} + a_5 \frac{N_{li}}{r} + a_6 N_{3i} \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{dN_{3i}}{dr} + a_{10} N_{3i} \right)_{|r=1} = 0;$$

где λ_i, μ_i – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_i, r)$ и инвариантных $N_k(\mu_i, r)$ компонент вектор-функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$), R_H – трансформанта нагрузки, m_{1i}, m_{2i} – корни уравнения:

$$\beta m_i^2 + m_i + \lambda_i^2 = 0, \quad \{G_0, \dot{G}_0\} = \int_R^1 \left\{ A_0, \frac{\partial A_0}{\partial t} \right\} K_{3i} r dr, \quad A_0 = \left(H_3 + a_7 \nabla H_1 - a_8 \frac{\partial H_2}{\partial r} \right).$$

Окончательные выражения функций $U(r,t)$, $\phi(r,t)$, $\Theta(r,t)$ имеют вид:

$$\{U(r,t), \phi(r,t), \Theta(r,t)\} = \{H_1(r,t), H_2(r,t), H_3(r,t)\} + \quad (17)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\}}{\|K_i\|^2},$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K_3(\lambda_i, r) N_3(\lambda_i, r) r dr.$$

В качестве примера рассматривается случай действия на внутренней поверхности ($r_* = a$) цилиндра ($b = 0.02$ м, $R = 0.8$), нагрузки (7).

На рисунке 5 представлены графики изменения перемещений $U(R,t)$ по времени, полученные при решении связанной (сплошная линия) и несвязанной (пунктирная) задачи. Более точное определение температурного поля позволяет получить качественно другую картину деформирования цилиндра в течение времени.

На рисунке 6 показано изменение разности потенциалов $V(t)$ по времени цилиндра с различной толщиной стенки (1– $R = 0.8$, 2– $R = 0.6$, 3– $R = 0.4$), выполненного из пьезокерамики состава ПКР –35. Данный состав характеризуется высоким значением коэффициента линейного температурного расширения $\alpha_t = 1.1 \times 10^{-5} K^{-1}$, что позволяет наиболее эффективно преобразовать температурное воздействие в электрический импульс. При этом увеличение толщины стенки приводит к росту $V(t)$.

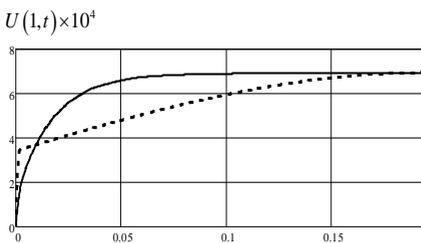


Рис.5. Графики " $U(R,t) - t$ "

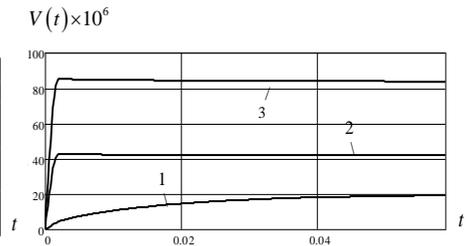


Рис.6. Графики " $V(t) - t$ " $\left(V(t) = \frac{e_{33}}{C_{33}b} V^*(t) \right)$

Результаты аналитического расчета сравниваются с аналогичными данными, полученные численным методом с помощью программного

комплекса ANSYS. Их анализ позволяет сделать вывод, что численный расчет достаточно точно позволяет описать работу нерезонансных преобразователей энергии только при действии стационарного температурного поля. При этом практическая ценность построенного замкнутого алгоритма заключается также в использовании результатов расчета в качестве тестовых при модернизации численного метода в случае исследования нестационарного процесса.

В пятой главе построено новое замкнутое решение динамической задачи обратного пьезоэффекта для термоупругого цилиндра. Рассматривается случай действия на его лицевых поверхностях электрической нагрузки в виде разности потенциалов при заданной температуре окружающей среды. В этом случае граничные условия (2) принимают вид:

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi = \pm V, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{11} \Theta = a_{11} g; \quad (17)$$

Проблема интегрирования несамосопряженной системы уравнений (1) также приводит к исследованию несвязанной задачи.

На первом этапе рассматривается задача электроупругости (два первых равенства (1) и соответствующие условия (3), (17)) без учета изменения температуры тела путем использования вырожденного обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП). В результате получается следующее выражение для функций $U(r, t)$, $\phi(r, t)$:

$$\{U(r, t), \phi(r, t)\} = \{H_1(r, t), H_2(r, t)\} + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \frac{\{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)\}}{\|K_i\|^2}. \quad (18)$$

В качестве примера рассматривается пьезокерамический цилиндр состава PZT-4 ($R = 0.8$, $b = 0.02$ м) при действии гармонической электрической нагрузки в виде разности потенциалов на его электродированных поверхностях:

$$V(t) = V_0 \sin \theta t, \quad (19)$$

где V_0 , θ – амплитудное значение потенциала и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме ($\theta = 0.8\lambda_1$).

На рисунке 7 представлены графики изменения амплитудных значений потенциала $\phi(r, t)$ (1) и напряженности $E_r(r, t)$ (2) электрического поля по радиальной координате r . Здесь следует

отметить, что использование гипотез о линейной зависимости потенциала $\phi(r,t)$ и постоянном значении напряженности $E_r(r,t) = \partial\phi(r,t)/\partial r$ электрического поля при исследовании задач обратного пьезоэффекта с помощью прикладных теорий не находят свое подтверждение при решении динамических задач.

На следующем этапе исследования рассматривается задача теплопроводности с учетом известных функций перемещений и потенциала электрического поля. Решение строится методом КИП. Окончательное выражение для функции $\Theta(r,t)$ имеет вид:

$$\Theta(r,t) = \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} R_H(n,t) K(j_n, r) \|K_i\|^{-2}.$$

При решении задачи теплопроводности на первом этапе определяется скорость изменения температуры $\dot{\Theta}_0(r) = \dot{\Theta}_0$ в начальный момент времени. Для этого при гармоническом воздействии (19) был выполнен натурный эксперимент ($T_0 = 295 \text{ K}$ ($22 \text{ }^\circ\text{C}$), $V_0^* = 10 \text{ B}$), позволяющий определить постоянное значение приращения температуры в теле цилиндра Θ^* равного $0.1 \text{ }^\circ\text{C}$.

На рисунке 8 представлены графики " $\Theta - t$ " в безразмерной форме, которые при $\dot{\Theta}_0 = 3.2/V_0$ качественно и количественно подтверждают экспериментальные данные.

Полученный результат подтверждает известный факт, что при исследовании динамических задач прямого и обратного пьезоэффекта пьезокерамические элементы можно рассматривать, как консервативные системы, т.е. пренебрегать потерями энергии на их нагрев.

$\{\phi(r,t), E_r(r,t)/5\}/V_0$

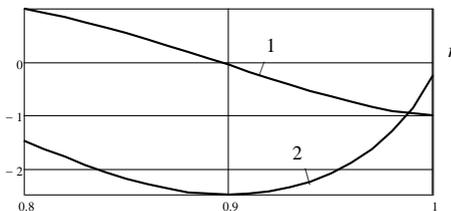


Рис.7. Графики " $\phi(r,t) - r$ "-1,
" $E_r(r,t) - r$ "-2

$\Theta(1,t)/V_0$

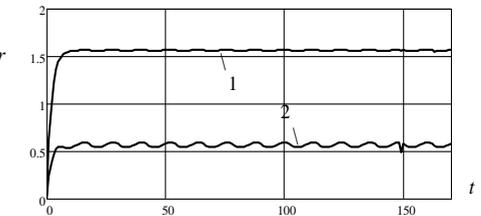


Рис.8. Графики " $\Theta(r,t) - r$ ", 1- $\dot{\Theta}_0 = 3.2/V_0$,
2- $\dot{\Theta}_0 = 1.2/V_0$

В пункте 5.5 выполнен анализ работы пьезокерамического актюатора и определена относительная толщина стенки цилиндра, позволяющей наиболее эффективно преобразовать электрический сигнал в перемещения. Доказано, что нагрев пьезокерамического элемента, изготовленного из состава с низким коэффициентом линейного температурного расширения, не приводит к существенному изменению амплитудных значений перемещений.

На основании выполненных исследований для длинного полого пьезокерамического цилиндра, можно сформулировать основные достигнутые результаты и выводы:

- 1) Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэластостатики при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода. Разработанный алгоритм позволяет определить напряженно-деформированное состояние, электрическое поле, а также температурное поле без учета скорости изменения объема и напряженности электроупругой системы;
- 2) Разработан алгоритм расчета и получено новое замкнутое решение связанной динамической осесимметричной задачи термоэластостатики при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода.
- 3) Получено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэластостатики без учета сил инерции электроупругой системы при выполнении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода.
- 4) Разработан алгоритм расчета и получено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи обратного пьезоэффекта для термоупругого цилиндра.
- 5) Разработано программное обеспечение в системе Mathcad –15, позволяющее проводить анализ связанных и несвязанных термоэластостатических полей в длинном пьезокерамическом цилиндре. Численные результаты расчета дают возможность подобрать геометрические размеры электроупругой конструкции и состав пьезокерамического материала, позволяющие наиболее эффективно преобразовать температурное поле в электрический импульс.
- 6) Разработанные алгоритмы расчета используются ООО «СамараГазСтрой» при проектировании пьезокерамического актюатора. Кроме того, результаты исследования находят свое

применение в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство».

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ:

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК России

1. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэластостатики для длинного полого цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2020. – Т. 23, № 4. – С. 677-691. (Web of Science)
2. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэластостатики для длинного пьезокерамического цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Вестник ПНИПУ. Механика, 2021. – № 2. – С. 181-190. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16. (Scopus)
3. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэластостатики для длинного полого пьезокерамического цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Advanced Engineering Research, 2022 – Т. 22, № 2. – С. 81–90.

Публикации в журналах, входящие в библиографическую базу SCOPUS, WOS

4. Shlyakhin, D.A. Unsteady thermoelasticity problem for rigidly fixed round plate / D.A. Shlyakhin, Zh.M. Dautemuratova (Kusaeva), M.A. Kalmova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. – Vol. 775. – 012137 p.
5. Shlyakhin, D.A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell / D.A. Shlyakhin, M.A. Kalmova // LNCE, 2022 – Т. 189. – P. 263-271.
6. Ratmanova O.V., Kalmova M.A. Dynamic actions of a two-layer freely supported beam / O.V. Ratmanova, M.A. Kalmova // LNCE, 2022 – Т. 189. – P. 3-9.
7. Shlyakhin, D.A., Kalmova M.A. Related thermoelastic elastomeric task for long cylinder/ D.A. Shlyakhin, M.A. Kalmova // AIP Conference Proceedings, 2023 – Vol. 2497, 030009 <https://doi.org/10.1063/5.0103490>.

Публикации в других сборниках

8. Кальмова М.А. Становление и развитие аналитических методов решения динамических задач термоэластостатики / М.А. Кальмова, Д.А. Шляхин // Математические модели техники, технологий и экономики: материалы Всеросс. научно-практич. студ. конф. – СПб.: Политех-пресс, 2020. – С. 6-11.

9. Кальмова М.А. Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для длинного пьезокерамического термоупругого цилиндра / М.А. Кальмова // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020. Т. 47. № 4. С. 57-68.
10. Шляхин Д.А. Нестационарная связанная задача термоупругости для изотропного длинного цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. – Самара: СамГТУ, – 2020. – С. 416-421.
11. Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра / М.А. Кальмова, Д.А. Шляхин // Инженерный вестник Дона. 2020. № 3 (63). С. 1-12.
12. Элекина Е.Н., Напряженно-деформированное состояние неоднородного длинного цилиндра, нагруженного внутренним динамическим давлением / Е.Н. Элекина, М.А. Кальмова, Е.А. Кулакова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. – Самара: СамГТУ, – 2020. – С. 449-454.
13. Шляхин Д.А. Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для длинного пьезокерамического цилиндра, обладающего термоупругими свойствами / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. – Самара: СамГТУ, – 2021. – С. 935-944.
14. Кальмова М.А. Использование пьезо- и пирозэффектов в измерительных приборах / М.А. Кальмова, Д.А. Шляхин, // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. – Самара: СамГТУ, – 2022. – С. 849-855.
15. Kalmova M.A. The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields / M.A. Kalmova // The Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, 2022. – № 3-4. – С. 14-16.
16. Кальмова М.А. Определение напряженно-деформированного состояния упругого элемента при действии температурной нагрузки / М.А. Кальмова // Научный альманах центрального Черноземья, 2022. – №4, ч.1. – С. 67-73.
17. Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для цилиндрического тела, выполненного из пьезокерамики / М. А. Кальмова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12-14 декабря 2022 г. — Воронеж, 2023. — С. 1044-1049.

Научное издание
Кальмова Мария Александровна

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук на тему:
«Нестационарная механика радиальных осесимметричных
термоэлектроупругих полей в длинном
пьезокерамическом цилиндре»

Автореферат отпечатан с разрешения объединенного диссертационного
совета 99.2.039.02 (Д 999.122.02)
на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический
университет» и ФГАОУ ВО «Самарский национальный
исследовательский университет имени С.П. Королева»
(протокол №4 от «22» июня 2023 г.)

Подписано в печать ____ . ____ . 2023 г.
Формат 60×84 1/16. Набор компьютерный.
Усл. печ. л. 1,00. Тираж 100 экз. Заказ № ____.

Отпечатано на ризографе.
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»,
Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.