

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Самарский государственный технический университет»

Кальмова Мария Александровна

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНИКА РАДИАЛЬНЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛЕЙ В ДЛИННОМ
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель: доктор технических наук,

доцент Шляхин Д. А.

Самара 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	11
ГЛАВА 2	25
ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕСВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА	25
2.1. Уравнения термоэлектроупругости	25
2.2. Постановка задачи для длинного цилиндра	28
2.3. Решение задачи теплопроводности	30
2.4. Решение задачи электроупругости	33
2.5. Численный анализ результатов	37
СВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИМЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА (ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1–ГО РОДА)	51
3.1. Постановка задачи	51
3.2. Построение общего решения	52
3.3. Численный анализ	59
СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА (ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1 – ГО И 3 – ГО РОДА)	68
4.1. Постановка задачи	69
4.2. Построение общего решения	70
4.3. Численный анализ результатов	77
4.4. Сравнительный анализ замкнутого и численного решения	90
ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА	97
5.1. Постановка задачи	97
5.2. Общее решение задачи электроупругости	99
5.3. Общее решение задачи теплопроводности	102

5.4. Численный анализ результатов	104
5.5. Анализ работы пьезоактюатора.....	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	116
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	118
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	132
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	141
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	142

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В настоящее время широко используются измерительные приборы различного назначения, работа которых основана на эффекте связанности полей различной физической природы. Особый интерес представляют конструкции подверженные неравномерному нестационарному нагреву и изготовленные из пьезокерамического материала. Данное внешнее воздействие сопровождается возникновением температурных деформаций, что приводит к образованию в поляризованной среде электрического поля.

Для определения напряженно–деформированного состояния, а также характера распределения электрического и температурного полей в конструкции с учетом их взаимного влияния используются разнообразные теории термоэлектроупругости, позволяющие решить данную проблему с различной степенью точности. Математическая формулировка рассматриваемых задач включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения, электростатики и теплопроводности. Проблема их интегрирования приводит, как правило, к исследованию расчетных соотношений в несвязанной постановке. При этом уравнение теплопроводности рассматривается без учета изменения формы и электрического поля пьезоупругой системы. Однако для более качественной оценки нестационарных термоэлектромеханических процессов в конструкциях возникает необходимость построения связанных аналитических решений в трехмерной постановке. Данный подход позволяет получить точные, в рамках используемых моделей, расчетные соотношения в наиболее общем виде, что в результате дает возможность усовершенствовать и повысить функциональные возможности пьезокерамических устройств.

Таким образом, разработка эффективных аналитических методов и алгоритмов расчета термоэлектроупругих систем, позволяющих получить замкнутое решение, выявление новых связей между характером внешнего температурного воздействия, процессом деформирования и величиной электрического поля в пье-

зокерамических конструкциях, представляет в настоящее время одну из актуальных проблем современной науки в области механики деформируемого твердого тела.

Степень разработанности темы диссертации. Общая трактовка связанности механических, тепловых и электрических процессов в конструкциях конечных размеров, впервые была представлена в работах Р.Д. Миндлина и В. Новацкого. В основе их исследований лежат фундаментальные труды в области электроупругости и теплопроводности таких ученых, как В. Фойгт, У. Мэзон, Ю.В. Новожилов, В.З. Партон, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Ф. Нейман, Дж. Дюгамель. Использование в дальнейшем гиперболических уравнений теплопроводности, предложенных Г. Лордом, Ю. Шульманом, А. Грином и П. Нахди позволило сформулировать уточненные теории термоэлектроупругости.

Большой вклад в решение прикладных задач внесли Ватульян А.О., А.В. Белоконь, А.В. Наседкин, А.В. Лыков, Т.И. Белянкова, В.А. Крысько, Е.Б. Попов, В.И. Даниловская, Кирилюк В.С., Е.А. Тимошкина, В.В. Фирсанов, W Chen, И.А. Глозман, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкин, М. Aouadi, C.Q. Chen, D. O Iesan, M. Ishihara, H.S. Tzou, R. Ye, Rao S.S., Sunar M., Y. Li, L. Yang, L. Zhang, и др.

Целью диссертационной работы является разработка нового теоретического подхода по решению проблемы расчета длинного полого пьезокерамического цилиндра с учетом связанности термоэлектроупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки, а также проведение качественного и количественного анализа нестационарных процессов в исследуемых электроупругих системах.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и построены новые решения связанных и несвязанных начально–краевых задач гиперболической теории термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра.

Методы исследования. Для решения поставленных линейных краевых задач используются конечные интегральные преобразования, являющие наиболее общей формой метода неполного разделения переменных, которые позволяют построить замкнутые решения самосопряженных и несамосопряженных начально–

краевых задач. Полученные расчетные соотношения реализованы в среде Mathcad–15 в виде программного комплекса.

Научная новизна диссертационной работы заключается в развитии теоретических основ нестационарного расчета длинного полого пьезокерамического цилиндра с учетом связанности термоэлектроупругих полей. Полученные расчетные соотношения, описывающие механические, температурные и электрические поля, позволяют научно обосновать и уточнить конструктивное решение проектируемых пьезокерамических элементов конструкций различного назначения.

В работе получены следующие **новые научные результаты**, связанные с расчетом длинного пьезокерамического цилиндра при использовании гиперболической теории термоэлектроупругости Лорда-Шульмана:

1. Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

2. Получено новое замкнутое решение связанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;

3. Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости без учета сил инерции упругой системы и удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

4. Разработана методика расчета несвязанной динамической осесимметричной задачи обратного пьезоэффекта для пьезокерамического термоупругого цилиндра;

5. Проанализировано влияние температурного поля на напряженно–деформированное состояние и электрическое поле пьезокерамического элемента.

Теоретическая значимость работы. Разработанная методика расчета позволяет описать и проанализировать взаимосвязь полей различной физической природы в длинном пьезокерамическом цилиндре при внешнем осесимметричном нестационарном температурном и электрическом воздействии. Полученные замкнутые решения дают возможность выявить новые закономерности при анализе

результатов, что существенно повышает теоретический уровень инженерных расчетов.

Практическая значимость работы определяется возможностью создания программного комплекса, на основании разработанных алгоритмов расчета, для проектирования преобразующих пьезокерамических элементов в виде длинного полого цилиндра, входящих в состав измерительных устройств, в случае действия внешнего температурного и электрического воздействия. Полученные результаты позволяют также обосновать рациональную программу экспериментов, что значительно сократит объем дорогостоящих натурных исследований.

Разработанные алгоритмы расчета и их программная реализация нашли применение в инженерных расчетах, выполняемых проектным отделом ООО «СамараГазСтрой». Результаты работы используются также в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство» и профилю образования «Теория сооружений». Результаты внедрения исследования подтверждены соответствующими актами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэластостатики для длинного пьезокерамического цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;
2. Новое замкнутое решение связанной динамической осесимметричной задачи термоэластостатики для длинного пьезокерамического цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;
3. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэластостатики для длинного пьезокерамического цилиндра без учета сил инерции (граничные условия теплопроводности 1–го и 3–го рода);
4. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи обратного пьезоэффекта для пьезокерамического термоупругого цилиндра;
5. Анализ численных результатов расчета термоэластостатических процессов в пьезокерамическом цилиндре.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений, математической постановки и методами решения рассматриваемых нестационарных задач термоэлектроупругости, совпадением в частных случаях представленных решений с известными численными результатами, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 77, 78, 79, 80-ой Всероссийской научно-технической конференции «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре», Самара, 2020–2023; Международной научной конференции "Civil, Architectural and Environmental Sciences and Technologies" (Международный форум «Города будущего»), Самара, 2019; XXIX, XXX Международных научных Российско–польско–словацких семинарах, 2020, 2021; II Международной научной конференции «Modelling and methods of structural analysis», 2021; XXV Международная научная конференция «On Advance in Civil Engineering Construction the formation of living environment», 2022, Международная научно-техническая конференция "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики", 2022.

Полностью диссертация была представлена на расширенном семинаре кафедры «СМИГОФ» СамГТУ (зав. кафедрой Шляхин Д.А., д.т.н., доцент), «Математическое моделирование в механике (зав. кафедрой Степанова Л.В., д.ф.–м.н., профессор) и на семинаре аспирантов СамГТУ (руководитель аспирантуры по направлению 01.06.01 Математика и механика Радченко В.П., д.ф.–м.н., профессор).

Публикации. По результатам данного исследования опубликовано 17 научных работ, из них 3 работы в рецензируемых журналах ВАК, 5 работ в рецензируемых журналах Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Работы [25, 28, 29] выполнены автором самостоятельно. Постановка задач, построение замкнутых решений, разработка программного комплекса и анализ полученных результатов в работах [26, 27, 45, 61–70] диссертантом проводилась совместно с соавторами. Проводимые в рамках дис-

сертационной работы экспериментальные исследования были выполнены автором самостоятельно.

Объем и структура диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы и приложения, общим объемом 142 страницы машинописи, 106 рисунка, 2 таблицы. Список литературы включает 123 работы.

В первой главе выполнен литературный обзор, связанный с решением начально–краевых задач термоэластостатики, на основании которого сделаны выводы об актуальности диссертационной работы.

Во второй главе рассматривается несвязанная динамическая осесимметричная задача термоэластостатики для длинного полого пьезокерамического цилиндра в случае действия на его внутренней поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры (граничное условие 1– рода). На внешней цилиндрической поверхности задан закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3– рода) при известной температуре окружающей среды. На основании выполненных исследований и анализе численных результатов сформулированы практические рекомендации, позволяющие для пьезокерамического цилиндра с произвольной толщиной стенки определить скорость изменения внешней температурной нагрузки, при которой в расчетах необходимо учитывать инерционные характеристики электроупругой системы.

В третьей главе исследуется связанная динамическая осесимметричная задача термоэластостатики для длинного полого пьезокерамического цилиндра в случае действия на его цилиндрических поверхностях нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры (граничное условие 1– рода). Результаты расчета позволяют определить напряженно – деформированное состояние, температурное и электрические поля в электроупругой конструкции с учетом связанности термоэластостатических полей.

В четвертой главе построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэластостатики для пьезокерамического цилиндра без учета сил инерции. Проанализировано влияние скорости изменения

объема тела на температурное и электрическое поля, а также на напряженно – деформированное состояние упругой системы.

В пятой главе рассматривается задача обратного пьезоэффекта для пьезокерамического термоупругого цилиндра. Полученные расчетные соотношения позволяют определить напряженно-деформированное состояние электроупругого цилиндра. Численные результаты расчета несвязанной задачи теплопроводности дают возможность доказать, что при решении задач прямого и обратного пьезоэффекта можно не учитывать потери энергии на нагрев пьезокерамической конструкции.

В заключение диссертации сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В приложении 1 приведено решение тестовой задачи для длинного цилиндра конечных размеров с жестким закреплением его торцов при заданном температурном поле, приложение 2, 3 содержат акты внедрения результатов.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Широкое использование пьезокерамических материалов в устройствах ультразвуковой электроники [15], микроэлектронике [1,2] и измерительных приборах [2, 6, 7, 16, 19–22, 23, 36, 41, 51, 56, 58, 59, 80, 119], работа которых связана с использованием пьезо – и пирозэффектов, поставило перед исследователями необходимость углубленного анализа законов связанности электрических, температурных и упругих полей в электроупругих телах. Это привело к созданию нового научного направления – термоэлектроупругость. Данное направление образовалось на стыке таких специальностей, как механика деформируемого твердого тела, теплопроводность и электродинамика (электростатика).

Использование общей трактовки механических, тепловых и электрических процессов позволило Миндлину Р.Д. [99] в начале 60–х годов XX века сформулировать уравнения термоэлектроупругости, учитывающие связанность (взаимное влияние) полей. В основе их исследований лежат фундаментальные труды в области электроупругости и теплопроводности таких ученых, как В. Фойгт, У. Мэзон, Ю.В. Новожилов, В.З. Партон, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Ф. Нейман, Дж. Дюгамель [18, 38, 39, 42, 43, 102]. Расчетные соотношения теории термоэлектроупругости включают уравнения движения, электростатики и классическое уравнение теплопроводности Фурье Ж.Б. [90].

В развитие данного подхода Новацкий В. [103] доказал теорему единственности решения уравнений термоэлектроупругости, сформулировал обобщенный принцип Гамильтона и теорему взаимности работ, а Миндлин Р.Д. [99] при разложении исходных функций по толщине пластины в степенной ряд и использование вариационного уравнения энергии получил двумерные уравнения, которые позволяют описать связанные высокочастотные колебания пьезокерамической пластины.

Дальнейшие исследования в области термоупругости позволили Г. Лорду и Ю. Шульману [97] разработать уточненную гиперболическую теорию (LS–теория), в которой в отличие от классического закона Ж.Б. Фурье учитывается конечную скорость распространения тепла. Использование LS–теории позволило в свою очередь сформулировать расчетные соотношения гиперболической теории термоэлектроупругости.

В конце 90–х годов XX в. ученые Грин А. и Нахди П. [85, 86] предложили новую обобщенную GN–теорию термоупругости, которая была сформулирована в трех вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении GNII – и GNIII – теории предлагают рассматривать процесс распространения тепла, как недиссипативный процесс, что приводит к формированию гиперболических уравнений теплопроводности и в результате позволяет моделировать более широкий спектр явлений, связанных с теплопередачей. Использование данных теорий привело к созданию конечной термоэлектроупругости для жестких проводников II–го и III–го типов [82].

Далее Iesan D. [89] изучил существование и доказал единственность решения для квазистатической и динамической задачи термопьезоэлектричества. Vert S. и Birman V. [77] исследовали зависимость составляющих свойств, как от напряжений, так и от температуры. Они показали, что в результате температурной зависимости коэффициенты теплового расширения и пьезоэлектрические коэффициенты должны зависеть от напряжения.

Уравнения пьезоэлектричества обычно выражаются в дифференциальной форме, но альтернативно могут быть сформулированы и в вариационном виде. Вариационные принципы были получены Altay G.A. и Dökmeci M.C. [73] для разрывных полей. Была доказана возможность создания определяющих уравнений, граничных условий и условий скачка для среды с поверхностью разрыва или без нее. Данный подход позволяет разработать методику создания исходных расчетных соотношений более низкого порядка и построить приближенные решения для термоэлектроупругих тел.

При исследовании задач, учитывающих температурные, электрические и упругие поля напряжений, используются различные математические методы расчета: аналитические, вариационные и численные. В настоящее время численные методы широко используются, благодаря растущим возможностям современной вычислительной техники. Одним из самых востребованных методов решения начально-краевых задач термоэлектроупругости, является метод конечных элементов (МКЭ). С помощью него можно моделировать нестационарные процессы в электроупругих системах.

Tzou H.S., Ye R. [118], Gornandt A., Gabbert U. [84] исследовали и доказали, что МКЭ можно эффективно использовать при решении дифференциальных уравнений. Rao S.S. и Sunar M. [110] рассматривая структуру с распределенными пьезоэлектрическими датчиками, пришли к выводу, что включение тепловых эффектов может помочь улучшить рабочие характеристики системы.

Liew K.M. и др. [96] представил формулировку конечных элементов, основанную на теории деформации сдвига первого порядка для статического и динамического пьезотермоупругого анализа и активного управления пластинами, подвергнутыми тепловой нагрузке. Первая попытка решить проблему индуцированной неоднородности в термо-пьезоэлектричестве для бесконечного и полупространства была дана Aouadi M. [74].

Khorsand M. в [93] провел анализ пьезоэлектрического сферического тела, состоящего из металлического, пьезокерамического и между ними градуированного слоя металл-пьезокерамики, при воздействии механических-электрических-тепловых нагрузок. Задача решена методом конечных элементов.

В работе [4] описаны основные принципы проведения конечно-элементного анализа задач теории электроупругости с учетом температурных эффектов, предназначенные для реализации в пакетах ANSYS и ACELAN. Отмечено, что недостатком являются соответствующие разделы этих пакетов, которые не обладают возможностями для проведения связанного термопьезоэлектрического анализа.

В статье [32] с помощью метода конечных элементов проведен анализ многослойной тонкостенной цилиндрической конструкции при температурном, механическом и электрическом воздействиях. При этом разработанный элемент дает возможность существенно снизить вычислительные затраты, которые используются, например, в ANSYS.

Основным недостатком МКЭ является то, что этот метод в основном предназначен для решения статических задач, а решение динамических задач с помощью МКЭ сопряжено с другими математическими трудностями. Кроме того, этот численный подход не может точно описать связанность температурных, электрических и упругих полей напряжений или достаточно слабо описывает эффект связанности.

Для более точного учета эффекта связанности термоэлектроупругих полей используются методы позволяющие получить замкнутые решения различных задач. В тоже время трудности в построении аналитических решений возникают при исследовании несамосопряженных дифференциальных систем связанных уравнений движения, электростатики и теплопроводности. Для преодоления данных сложностей используются различные упрощения: исследуются стационарные задачи, рассматриваются нестационарные задачи в несвязанной постановке или анализируются конструкции с вырожденной геометрией. В рамках представленных допущений выполнено достаточно большое количество работ [1, 21, 31, 41, 46, 52, 55, 71, 76, 78, 81, 85, 87, 89, 91, 94, 100, 103, 104, 105, 107, 108, 110, 111, 116, 121, 122].

Первоначально отметим исследования, включающие статические задачи. В частности, работа Ishihara M. и др. [90] связана с построением решения для полого цилиндра в случае действия стационарных температурной и силовой нагрузок, которые изменяются экспоненциально по его высоте.

В статье Saadatfar M., Razavi A.S. [111] рассматривается несвязанная стационарная осесимметричная задача для длинного электроупругого цилиндра. Учитывая, заданный (известный) закон распределения температурного поля, уравне-

ние электроупругости рассматривается без учета влияния электрического поля на радиальную составляющую вектора перемещений.

В работе Куликова Г.М., Плотниковой С.В., Ярцева В.П. [32] исследована стационарная задача линейной термоэлектроупругости многослойных композитных оболочек двух функций. На основе выражений деформации 7-параметрической модели оболочки с учетом поперечной нормальной деформации и гипотетического линейного распределения температуры и потенциала электрического поля в пьезоэлектрическом слое, получены вариационные уравнения связанной термопьезоэлектрической задачи.

Chen W. и Shioya T. [80] выполнили анализ пьезотермоупругого поведения пьезоэлектрической сферической оболочки произвольной толщины, подвергнутой воздействию температуры на двух сферических поверхностях. Для упрощения уравнений используется метод разделения переменных. Показано, что уравнения задачи могут быть дополнительно сведены к несвязанному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка и связанной системе уравнений путем разложения функций перемещения и электрического потенциала.

В статье Obata Y., Noda N. [104] рассматриваются стационарные тепловые напряжения в полном круглом цилиндре и полый сфере, изготовленных из функционально градиентного материала (FGM).

В [94] представлен термоэлектроупругий анализ многослойных одномерных пьезоэлектрических квазикристаллических цилиндрических оболочек при поверхностном нагреве, который действует по краям. Точное решение используется для изучения влияния кривизны оболочки, при последовательном нагружении тепловых и электрических полей.

В работе [112] разработано аналитическое решение осесимметричной задачи о радиально поляризованной сферически изотропной пьезоэлектрической полый сфере. Сфера подвергается равномерному внутреннему и внешнему давлению, а также температурному градиенту. Распределение напряжений в сфере получено численно для двух пьезокерамик.

Podil'chuk Y.N. [108] изложил подход к решению трехмерных статических задач для поперечно-изотропного (прямолинейная анизотропия) тела и систематизировал решения для пьезокерамических канонических тел. Результатом исследования явились аналитические решения трехмерных задач. Определены коэффициенты интенсивности напряжений силового поля и электрической индукции вблизи эллиптических и параболических трещин. Показано, что тела испытывают различные механические, тепловые и электрические нагрузки.

В работе Benaissa H., Essoufi E., Fakhri H. [76] исследуется математическая модель, описывающая статический процесс контакта пьезоэлектрического тела с теплопроводящим основанием. Поведение материала моделируется с помощью термо-электроупругого определяющего закона. Контакт описывается условиями Синьорини и законом трения Трески, включая условия электричества и теплопроводности. Получена вариационная формулировка модели в виде связанной системы перемещений, электрического потенциала и температуры.

Тимошкина Е. А. [56] в своей работе приводит точные аналитические решения статических задач электроупругости и термоэлектроупругости трансверсально-изотропного тела в криволинейных координатах.

В статье [91] представлено решение статической задачи термоэлектроупругости включающее поперечно изотропное пространство с теплоизолированным жестким листовым включением (антитрещиной), расположенным в плоскости изотропии. Предполагается, что вдали от этого дефекта тело находится в равномерном тепловом потоке, перпендикулярном плоскости включения. Кроме того, рассмотрен случай, когда электрический потенциал на поверхностях трещин равен нулю. Точные результаты получаются путем построения приближенных потенциальных решений и сведения термоэлектроупругой проблемы к ее термомеханическому аналогу.

В статье Амбарцумяна С.А. и соавторов [1] подробно изучаются задачи об установившихся колебаниях в пластинах и оболочках при наличии магнитного поля, а также рассмотрены вопросы устойчивости. Решена стационарная задача в случае осесимметричной нагрузки с помощью конечных интегральных преобра-

зований Ханкеля и Лапласа, в результате получено замкнутое решение задачи о колебаниях полупространства, вызванных динамической нагрузкой.

В работе [100] исследуются некоторые проблемы контроля толщины в пластинчатых телах, проявляющих пьезоэлектричество. Решена задача для некоторых линейных пьезотермоупругих тел, в составе которых присутствует сегнетоэлектрическая керамика. Изучены точные краевые задачи равновесия.

В [78] представлено аналитическое исследование пьезотермоупругого поведения круглой цилиндрической оболочки, ламинированной пьезоэлектрическим слоем. Решение получено с помощью метода разложения в степенные ряды в сочетании с осесимметричными тепловыми и механическими нагрузками, разложенными в ряд Фурье. Подробно изучаются как прямые, так и обратные пьезоэлектрические эффекты. Представленные результаты характерны для оценки численных результатов (например, метода конечных элементов), полученных с помощью приближенных методов, так и для анализа поведения пьезотермоупругого элемента пьезоэлектрических интеллектуальных оболочек.

Задачи термоэлектроупругости становятся существенно более сложными при исследовании нестационарных термоэлектроупругих полей даже в несвязанной постановке.

В частности, в работе Khorsand M. [93] рассматривается толстенный шар при действии его внутренней поверхности осесимметричной механической (нормальные напряжения) и температурной нагрузки. Лицевые поверхности электроупругой системы короткозамкнуты. Распределение температурного поля в пьезокерамической среде осуществляется на основании решения несвязанной задачи теплопроводности.

В статье [71] исследуется динамическая задача вращающегося радиально поляризованного функционально градуированного пьезоэлектрического полого цилиндра. Цилиндр помещают в постоянное магнитное поле и подвергают термоэлектроупругой нагрузке. Все свойства материала принимаются в соответствии со степенным законом вдоль радиального направления цилиндра. В результате численного анализа, показаны параметры, учитывающие влияние неоднородности

родности, угловой скорости, градиента температуры, магнитного поля и различных граничных условий на термоэлектроупругое поведение полого цилиндра.

Zenkour A.M. в [122] получил решения замкнутой формы пьезоэлектрического полого цилиндра, армированного волокном с экспоненциальной градуировкой, в условиях гигротермической среды. Обсуждается взаимодействие электрического смещения и электрических потенциалов, а также упругих деформаций. Пьезоэлектрический круговой цилиндр, армированный волокном, подвергается механической нагрузке, а также электрическому потенциалу на его боковых поверхностях. Получены аналитические уравнения для пьезоэлектрического композитного цилиндра, армированного волокном. Исследовано совместное влияние температуры, влажности, давления и электрических параметров.

В работе [109] Rahimi G.H. и др. провели аналитический анализ термоупругого функционально градуированного пьезоэлектрического (FGP) вращающегося цилиндра. Цилиндр одновременно подвергается сочетанию электрических, тепловых и механических нагрузок. Конструкция представляет собой упрощенную модель датчика вращения или исполнительного механизма. Основное управляющее дифференциальное уравнение системы получено с использованием энергетического метода. Решение управляющего дифференциального уравнения представлено для двух типов граничных условий, учитывающие свободное вращение цилиндра и действие на элемент внутреннего давления. Исследуется влияние угловой скорости на радиальное распределение различных компонентов. Данную конструкцию можно рассматривать, как датчик для измерения угловой скорости цилиндра, подверженного давлению и температуре.

В [21] рассмотрена нестационарная динамическая контактная задача термоэлектроупругости жёсткого тела, скользящего как полуплоская поверхность с поверхностью упругого покрытия. Контакт осуществляется с учётом силы трения и выделения тепла вследствие трения. Решение задачи теплового фрикционного контакта строится с помощью интегрального преобразования Лапласа. Данное преобразование выражает основные физические параметры задачи: температуру, напряжение, перемещения, индукцию и напряженность электрического поля,

электростатический потенциал в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа или свёртки Лапласа. Решая задачу в такой форме, достаточно легко установить области устойчивых и неустойчивых решений задачи на бесконечном промежутке времени. Выражения для электротока и его напряженности, совместно с температурой и напряжением на скользящем контакте, возникающего на пьезокерамической прослойке, позволяют с течением времени анализировать процесс возникновения и развития термоупругой неустойчивости на поверхности скольжения.

В статье [52] рассматривается краевая задача для слоистой термоэлектроупругой анизотропной среды. Решение нестационарной задачи построено по принципу суперпозиции при использовании расчетных соотношений для гармонической задачи. Разработанный численный метод расчета, представлен интегралами Фурье.

В [47] авторы достаточно глубоко рассмотрели вопрос о нестационарном взаимодействии с акустическими средами. В качестве объекта исследования были приняты тонкостенные и толстостенные пьезопреобразователи различной формы, а именно сферической и цилиндрической. Для исследования тонкостенных элементов была принята модель Кирхгофа-Лява. Решение строилось путем использования преобразования Лапласа по времени, с дальнейшим сведением к тьюегральному уравнению Вольтерра, решение которого было найдено в виде степенного ряда во многих задачах.

В задаче о радиальных нестационарных колебаниях полой пьезоэлектрической сферы с учётом связанных электро- и термомеханических эффектов Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. [82] воспользовались методом разделения переменных, а затем задачу свели к уравнению Вольтерра 2-го рода, которое решалось методом интерполяции.

Вопросы распространения термоэлектромагнитных волн в пьезоэлектриках при исследовании несвязанных задач рассматривались в публикации Guo S. H. [87].

В статье Othman M., Kumar R. [106] изучалась проблема распространения и отражения плоских гармонических волн в изотропной среде (здесь модули упругости линейно зависят от температуры), а в [87] рассматриваются упругие симметричные колебания полупроводников в форме сферической оболочки при воздействии температурного, механического и электромагнитного полей.

В работе Zhu Lin-li, Zheng Xiao-jing [123] исследуется процесс распространения температуры под воздействием внешнего электромагнитного поля в металле, в [104] локальному нестационарному нагреву подвергается пьезоупругий кристалл, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда.

В [41] гармоническим колебаниям подвергается слоистая структура из термоэлектроупругих слоёв, жёстко скреплённая с упругим основанием с дефектами и включениями на плоскостях контакта слоёв. В работе используется преобразование Фурье по пространственной координате, после чего задача сводится к системе интегральных уравнений. Решение общей задачи строится как суперпозиция решений более простых задач.

Следующим наиболее сложным классом задач являются связанные задачи термоэлектроупругости. Это связано с формированием исходной несамосопряженной системы уравнений в частных производных. Здесь можно отметить следующие работы [4, 12, 13, 14, 18, 30, 41, 50, 57, 74, 80, 97, 106, 112, 114, 117].

В [14] Ватульян А.О. и др. изучили влияние связанности полей в электроупругой среде на скорости и коэффициенты затухания модифицированных электроупругих и тепловых волн. Кроме того, построено решение плоской задачи для среды класса бтт в виде определенных интегралов, которые находят свое применение при использовании метода граничных элементов.

Работа Ватульяна А.О., Нестерова С.А. [13] посвящена исследованию неоднородного термоэлектроупругого слоя в случае теплового удара. В результате применения преобразования Лапласа по переменной времени, полученные уравнения в области изображений сводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, которые решаются в дальнейшем численным методом коллокаций.

В статье Ватульяна А.О., Ковалева В.В. [12] при использовании ряда гипотез о распределении компонент физических полей по толщине изучено динамическое поведение тонкостенного элемента с учетом пьезо – и пьезоэлектрическим эффектом.

Paul H.S., Raman G.V. [107] исследовали изгибное и продольное распространение волн в полом длинном пьезокерамическом цилиндре, при удовлетворении граничных условий теплопроводности 2–го рода, а также заземлении цилиндрических поверхностей.

Белянкова Т.И. [4] в рамках теории малых деформаций провела последовательную линеаризацию определяющих соотношений нелинейной механики преднапряженной электротермоупругой сплошной среды. В рамках задачи были получены формулы линеаризованных определяющих соотношений и уравнений движения среды. Предложена модель электротермоупругого полупространства с неоднородным покрытием, представляющим собой структуру из функционально-градиентных слоев. Предполагалось, что каждая из составляющих среды подвержена действию начальных механических деформаций и начальной температуры, материалы составляющих среды относятся к ортотропным пьезоэлектрикам класса $6mm$ гексагональной сингонии. Для построения интегрального представления волнового поля среды использован гибридный численно-аналитический метод, основанный на сочетании аналитических решений с функцией Грина для неоднородных составляющих покрытия, и матричным подходом при удовлетворении граничных условий.

В статье Фирсанова В.В., Нгуен Л.Х. [58] рассматривается напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек при действии механических, электрических нагрузок и температур. Для математического моделирования совместной задачи термоэластопластичности оболочек используется уточненная теория, базирующаяся на уравнениях теории трехмерной упругости. Искомые перемещения оболочек представляются в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява. Следствием нагрева и электрического воздействия будет возник-

новение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением и полем напряженности. Эти деформации накладываются на упругие и учитываются при решении задачи расчета напряженно-деформированного состояния оболочек. Система основных уравнений равновесия термоэластостатики оболочек и соответствующие граничные условия получены с помощью минимизации полной энергии оболочки, основанной на вариационном принципе Лагранжа.

В статье [80] представлен аналитический метод распространения волн напряжений сферически симметричного движения в слоистых пьезоэлектрических оболочках, подвергающихся воздействию теплового удара и нагрузок электрического возбуждения. С помощью конечных преобразований Ханкеля и преобразований Лапласа получены уравнения перемещений, напряжений и электрического потенциала. Используя условия непрерывности интерфейса между слоями и граничные условия на внутренней и внешней поверхностях слоистых сферических оболочек, получено распространение волны термоэлектрического напряжения в симметрично слоистых пьезоэлектрических сферических оболочках.

В работе [50] Сеницкий Ю.Э. описывает связанные задачи, для деформируемых тел при учете взаимодействия температурных, электрических и упругих полей. Рассматривается случай для физически линейных и нелинейных сред при малых деформациях, построено решение связанной модели.

Даниловская В.И. в [19] проанализировала динамические эффекты в распределении напряжений при переходе от тепловых к электрическим импульсам в линейной термоэлектрической модели упругого тела, подвергнутого тепловому удару.

В работе [118] изучается пьезотермоупругий эффект в пьезоэлектрических устройствах, получено решение связанной задачи. Путем разложения обобщенной функции Дирака по плоским волнам задача сводится к одномерной. Математическая модель задачи представлена дифференциальными уравнениями движения в частных производных, уравнением Гаусса в пьезоэлектрике и уравнением диффузии электронов в полупроводнике, а также граничными условиями и рассмотрена

как временная гармоническая зависимость, в случае импульсного нагружения. Показаны конкретные результаты для функции Грина.

В статье [97] рассмотрена нелинейная одномерная задача о термоэлектроупругости с термической релаксацией и в квазиэлектростатике. В качестве дополнительной переменной вводится вектор теплового потока, который включает в себя несколько нелинейных связей и может быть использован при изучении задач упругих диэлектриков при низких температурах, а также в задачах высокотемпературной теплопроводности в диэлектрических твердых телах, подвергнутых воздействию сильных высокочастотных лазерных лучей. Представлено численное решение системы нелинейных уравнений с использованием итерационной схемы квазилинейности по конечным разностям.

В работе [41] изложен эффективный метод построения матриц-символов ядер интегральных уравнений в динамических задачах термоэлектроупругости для многослойных сред, позволяющий учитывать наличие внутренних неоднородностей (дефектов) различного типа при произвольном их количестве и сочетании.

В статье [30] проанализировано упругое напряженное состояние в пьезоэлектрическом теле с произвольно ориентированной эллиптической трещиной при механических и электрических нагрузках. Решение получено с использованием тройного преобразования Фурье и преобразованной Фурье функции Грина для неограниченного пьезоупругого тела.

Работа [111] посвящена аналитическим решениям напряжений и электрических перемещений вблизи эллиптической трещины. Термопьезоэлектрическое твердое тело подвержено воздействию однородной температуры. Приводится явное выражение коэффициента напряженности поля.

В работе [112] с помощью локального метода Петрова-Галеркина рассматривается динамическая задача в трехмерных осесимметричных пьезоэлектрических твердых телах с непрерывно неоднородными свойствами материала. Учитываются как механические, так и тепловые нагрузки. Осевая симметрия геометрии и граничных условий сводит исходную трехмерную краевую задачу к двумерной.

Интегральные формулировки основаны либо на методе преобразования Лапласа, либо на подходе с разницей во времени.

В [74] работе рассматривается краевая задача для термоэластостатических анизотропных слоев с плоскопараллельными границами раздела, содержащими трещины или жесткие включения. Эта проблема представляет как самостоятельный интерес, так и вспомогательный интерес для метода дифференциальной факторизации в произвольных областях. Результаты, полученные в этой работе, демонстрируют методы реализации метода дифференциальной факторизации с использованием возможностей численных вычислений функций, задаваемых двумерными интегралами Фурье.

Таким образом, на основе анализа литературы можно сделать вывод о том, что для решения проблем в задачах термоэластостатики было проведено достаточно большое количество исследований. За длительный период времени было разработано множество методов и подходов для решения этих проблем. Вопросы, связанные с влиянием температуры на устройства и конструкции и определением физико-механических свойств, рассматривались и исследовались многими выдающимися учеными. В результате этих исследований стали известны различные методы получения точных и приближенных аналитических решений.

Однако следует отметить, что исследованию связанных нестационарных задач термоэластостатики для тел конечной жесткости посвящено довольно малое количество работ [4, 12, 13, 14, 18, 30, 41, 50, 57, 80, 117]. И в настоящее время не разработана общая теория расчета пьезокерамических тел конечных размеров в пространственной постановке на нестационарное температурное воздействие. Для решения, в некоторой степени, данной проблемы в диссертационной работе предложен новый теоретический подход по решению проблемы расчета длинной полый пьезокерамической цилиндрической оболочки с учетом связанности температурных, электрических и упругих полей в случае нестационарного осесимметричного температурного воздействия. Основные результаты фундаментальных исследований были представлены автором в следующих работах [24, 25, 26, 27, 45, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 69].

ГЛАВА 2

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕСВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

2.1. Уравнения термоэлектродупругости

В общем случае осесимметричные дифференциальные уравнения движения, электростатики и теплового баланса на основании гиперболической теории Лорда–Шульмана для пьезокерамического материала в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) имеют вид [17, 34, 44, 96]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} = 0,$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r_*} + \frac{D_r}{r_*} + \frac{\partial D_z}{\partial z_*} = 0,$$

$$T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial t_*} + \beta_{rel} \frac{\partial^2 s}{\partial t_*^2} \right) = \Lambda \left(\nabla \frac{\partial \Theta^*}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial z_*^2} \right).$$

Уравнения осесимметричного состояния пьезокерамического анизотропно-го материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6mm при радиальной поляризации цилиндра записываются следующим образом [4, 17]:

$$\sigma_{rr} = C_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{13} \frac{U^*}{r_*} \left(\frac{U^*}{r_*} + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) + e_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{33} \Theta^*, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + C_{12} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} + e_{31} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{11} \Theta^*,$$

$$\sigma_{zz} = C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12} \frac{U^*}{r_*} + C_{11} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} + e_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} - \gamma_{11} \Theta^*,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} &= C_{55} \left(\frac{\partial U^*}{\partial z_*} + \frac{\partial W^*}{\partial r_*} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}, \\ D_r &= -\varepsilon_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} + e_{33} \left(\frac{\partial W^*}{\partial z_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + e_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + g_3 \Theta^*, \\ D_z &= -\varepsilon_{11} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} + e_{15} \left(\frac{\partial U^*}{\partial z_*} + \frac{\partial W^*}{\partial r_*} \right) + g_1 \Theta^*.\end{aligned}$$

а объемная плотность энтропии $s(r_*, z_*, t_*)$ при разложении в ряд Тейлора, с учетом условия $\frac{\Theta^*}{T} \ll 1$, определяется следующей линейной зависимостью [14]:

$$s = \gamma_{33} \left(\nabla U^* + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) + k \frac{\Theta^*}{T_0} - g_3 \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}. \quad (2.3)$$

В равенствах (2.1) – (2.3) $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$, $\Theta^*(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры в размерной форме; $\sigma_{ck}(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты тензора механических напряжений ($c, k = r, z$); $D_r(r_*, z_*, t_*)$, $D_z(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты индукции электрического поля; t_* – время в размерной форме; $C_{ms}, e_{ms}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ – модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала ($m, s = \overline{1,3}$); γ_{11}, γ_{33} – компоненты тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = C_{11}\alpha_t$, $\gamma_{33} = C_{33}\alpha_t$); Λ, k, α_t – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; g_1, g_3 – компоненты тензора пироккоэффициентов; β_{rel} – время релаксации; $\Theta^* = T - T_0$; T, T_0 – соответственно текущая температура и температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения; $\nabla = \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*}$.

При исследовании длинного термоэластопластического цилиндра, когда граничные осесимметричные условия на его цилиндрических поверхностях не зависят от аксиальной координаты, в приложение 1 настоящей диссертации был исследован вопрос о возможности не учитывать в уравнении энтропии (2.3) относительные деформации

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W^*}{\partial z_*}.$$

Был рассмотрен анизотропный цилиндр конечных размеров при известном температурном поле, не изменяющемся по его высоте, у которого цилиндрические поверхности, а также торцевые плоскости свободны от закрепления по радиальной координате. На основании построенного замкнутого решения получены численные результаты расчета, позволяющие сделать вывод, что в случае изменения температурного поля в длинном цилиндре, не зависящего от аксиальной координаты, разница между суммой относительных деформаций ($\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = \nabla U$) и

$$\text{аксиальной деформацией } \left(\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \right) \text{ существенна } \left(\nabla U \gg \frac{\partial W}{\partial z} \right).$$

В этом случае в уравнении энтропии (2.3) можно пренебречь относительными деформациями по аксиальной координате и учитывать только радиальные и окружные деформации.

Таки образом при исследовании длинного термоэластопластического цилиндра

$$\text{с учетом выполнения условий } \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W^*}{\partial z_*} = 0, E_z = \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} = 0, \text{ рассматривается}$$

нестационарная задача о чисто радиальных колебаниях (перемещениях). В этом случае в результате подстановки (2.2), (2.3) в (2.1) (без учета уравнения движения относительно аксиальной координаты) получаем следующую систему дифференциальных уравнений термоэластопластичности для длинного цилиндра в безразмерной форме:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (2.4)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(a_7 \Theta + a_8 \nabla U - a_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0;$$

$$\text{где } \{U, r\} = \{U^*, r_*\} / b, \quad \phi = \frac{e_{33}}{C_{33} b} \phi^*, \quad \Theta = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \Theta^*, \quad \{t, \beta\} = \frac{\{t_*, \beta_{rel}\}}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}},$$

$$a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33} \epsilon_{33}}, \quad a_5 = \frac{e_{31} e_{33}}{C_{33} \epsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3 e_{33}}{\epsilon_{33} \gamma_{33}}, \quad a_7 = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_8 = \frac{b \gamma_{33}^2 T_0}{\Lambda \sqrt{C_{33} \rho}},$$

$$a_9 = \frac{b \gamma_{33} g_3 T_0}{e_{33} \Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Решение задачи о радиальных колебаниях длинного цилиндра позволяет определить перемещение $U^*(r_*, t_*)$, потенциал электрического поля $\phi^*(r_*, t_*)$, приращение температуры $\Theta^*(r_*, t_*)$, а также компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ и радиальную компоненту индукции электрического поля D_r .

2.2. Постановка задачи для длинного цилиндра

Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область Ω : $\{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. Рассматривается случай действия на внутренней ($r_* = a$) цилиндрической поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры $\omega_1^*(t_*)$ (граничное условие 1- рода), а на внешней ($r_* = b$) лицевой поверхности задан закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3 – рода) и известна температура окружающей среды \mathcal{G}^* .

Внутренняя электродированная поверхность заземлена, а внешняя подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (режим электрического холостого хода).

В этом случае математическая формулировка рассматриваемой задачи включает дифференциальные уравнения термоэлектроупругости (2.4) и следующие краевые условия:

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi_{|r=R} = 0, \quad \Theta_{|r=R} = \omega_1, \quad (2.5)$$

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \Theta \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{11} \Theta \right)_{|r=1} = a_{11} \mathcal{G};$$

$$t = 0 \quad U = \phi = \Theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0; \quad (2.6)$$

где $R = a/b$, $\{\omega_1, \mathcal{G}\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\omega_1^* - T_0, \mathcal{G}^* - T_0\}$, $a_{10} = \frac{C_{13}}{C_{33}}$, $a_{11} = \alpha \frac{b}{\Lambda}$, α – коэффициент

теплоотдачи, $\dot{\Theta}_0$ – известная в начальный момент скорость изменения температу-

ры на внутренней цилиндрической поверхности $\dot{\Theta}_0 = \frac{d\omega_1(t)}{dt} \delta(r-R)$, $\delta(y)$ –

дельта-функция Дирака ($\delta(y) = 1$ при $y = 0$, $\delta(y) = 0$ при $y \neq 0$).

Расчетные соотношения (2.5) учитывают отсутствие механических напряжений на цилиндрических поверхностях, их заземление и подключение к измерительному прибору, а также граничные условия теплопроводности.

В начальный момент времени цилиндр находится в недеформированном состоянии, а его температурное поле определяется температурой первоначального состояния $T_0(r)$. При этом известна скорость изменения температуры на внутренней цилиндрической поверхности при $t = 0$.

Принимая во внимание заземление внутренней поверхности пьезокерамического элемента, напряжение холостого хода $V(t_*)$ определяется потенциалом электрического поля на его внешней поверхности:

$$V(t_*) = \phi(1, t_*). \quad (2.7)$$

Проблема решения несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (2.4) приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается задача теплопроводности без учета изменения объема тела ($\nabla U = 0$) и напряженности электрического поля ($\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$):

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - a_7 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta = 0; \quad (2.8)$$

$$r = R, 1 \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{11} \Theta \right)_{|r=1} = a_{11} \vartheta; \quad (2.9)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0. \quad (2.10)$$

На следующем этапе рассматривается связанная задача теории электроупругости относительно радиальной компоненты вектора перемещений U и потенциала электрического поля ϕ с учетом известного температурного поля Θ :

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \nabla \Theta - a_3 \frac{\Theta}{r}, \quad (2.11)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = -a_6 \nabla \Theta,$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = \Theta, \quad \phi|_{r=R} = 0, \quad (2.12)$$

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} \right)_{|r=1} = -a_6 \Theta|_{r=1};$$

$$t = 0 \quad U = \phi = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (2.13)$$

Расчетные соотношений (2.8) – (2.13) представляют математическую формулировку рассматриваемой несвязанной задачи термоэлектроупругости.

2.3. Решение задачи теплопроводности

Для решения начально – краевой задачи (2.8) – (2.10) первоначально выполняется процедура приведения неоднородных граничных условий (2.9) к однородным при использовании следующего разложения:

$$\Theta(r,t) = f_1(r)\omega_1(t) + f_2(r)\mathcal{G} + N(r,t), \quad (2.14)$$

где $f_1(z)$, $f_2(z)$ – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (2.14) в (2.8) – (2.10) при выполнении условий:

$$f_1(R) = 1, \quad f_2(R) = 0, \quad \frac{df_1(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_{11}f_1(1) = 0, \quad \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_{11}f_2(1) = a_{11}, \quad (2.15)$$

позволяет получить новую краевую задачу относительно функции $N(r,t)$:

$$\nabla \frac{\partial N}{\partial r} - a_7 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) N = F; \quad (2.16)$$

$$r = R, 1 \quad N|_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial r} + a_{11}N \right) \Big|_{r=1} = 0; \quad (2.17)$$

$$t = 0 \quad N(r,0) = N_0(r), \quad \frac{\partial N(r,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{N}_0(r), \quad (2.18)$$

$$\text{где } F(r,t) = \left[-\nabla \frac{\partial}{\partial r} + a_7 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] [f_1(r)\omega_1(t)] - \nabla \frac{df_2(r)}{dr} \mathcal{G},$$

$$N_0(r) = -f_1(r)\omega_1(0) - f_2(r)\mathcal{G}, \quad \dot{N}_0(r) = \dot{\Theta}_0 - f_1(r) \frac{d\omega_1(t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Использование конечного интегрального преобразования Ханкеля [53, 54] по переменной r :

$$R_H(n,t) = \int_R^1 N(r,t) r [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)] dr, \quad (2.19)$$

$$N(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_H(n,t) [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)]}{\|K_n\|^2}, \quad (2.20)$$

$$\|K_n\|^2 = \int_R^1 [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)]^2 r dr,$$

позволяет сформировать краевую задачу для трансформанты R_H :

$$\beta \frac{d^2 R_H}{dt^2} + \frac{dR_H}{dt} + \frac{j_n^2}{a_7} R_H = F_H; \quad (2.21)$$

$$t=0 \quad R_H(n,0) = R_{H0}, \quad \frac{dR_H(n,t)}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{R}_{H0}, \quad (2.22)$$

трансцендентное уравнение по определению собственных значений j_n :

$$[a_{11}J_0(j_n) - j_n J_1(j_n)]Y_0(j_n R) - [a_{11}Y_0(j_n) - j_n Y_1(j_n)]J_0(j_n R) = 0; \quad (2.23)$$

и выражение для постоянной интегрирования D_{1n} :

$$D_{1n} = -\frac{J_0(j_n R)}{Y_0(j_n R)}. \quad (2.24)$$

В равенствах (2.19)–(2.24) используются следующие обозначения

$$F_H(t) = -a_7^{-1} \int_R^1 F(r,t) r [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)] dr, \quad R_{H0} = \int_R^1 N_0(r) r [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)] dr,$$

$$\dot{R}_{H0} = \int_R^1 \dot{N}_0(r) r [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)] dr, \quad J_\nu(\dots), Y_\nu(\dots) - \text{функции Бесселя первого и}$$

второго рода порядка ν .

Общий интеграл краевой задачи (2.21), (2.22) при выполнении условия $a_7 - 4j_n^2 \beta > 0$ имеет вид:

$$R_H = (A_1 - A_2)^{-1} \left\{ (\dot{R}_{H0} - A_2 R_{H0}) \exp(A_1 t) - (\dot{R}_{H0} - A_1 R_{H0}) \exp(A_2 t) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_H(\tau) [\exp(A_1(t-\tau)) - \exp(A_2(t-\tau))] d\tau \right\}, \quad (2.25)$$

где $A_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4j_n^2 \beta a_7^{-1}}}{2\beta}$.

Окончательное выражение функции $\Theta(r,t)$ определяется в результате применения в трансформанте (2.25) формулы обращения (2.20). С учетом (2.14) имеем:

$$\Theta(r,t) = f_1(r)\omega_1(t) + f_2(r)\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_H(n,t) [J_0(j_n r) + D_{1n} Y_0(j_n r)]}{\|K_n\|^2}. \quad (2.26)$$

На заключительном этапе определяются функции $f_1(z), f_2(z)$ при решении следующих уравнений:

$$\nabla \frac{df_k(r)}{dr} = 0, \quad (k=1,2) \quad (2.27)$$

что позволяет существенно упростить правую часть дифференциального уравнения (2.16).

В результате, с учетом условий (2.15), имеем:

$$f_1(r) = \frac{1 - a_{11} \ln(r)}{1 - a_{11} \ln(R)}, \quad f_2(r) = a_{11} \frac{\ln(r) - \ln(R)}{1 - a_{11} \ln(R)}.$$

Зависимость распределения температурного поля в цилиндре (2.26) позволяет перейти к решению связанной задачи электроупругости.

2.4. Решение задача электроупругости

Приведения неоднородных граничных условий (2.12) к однородным осуществляется путем введения новые функции $u(r,t)$, $\chi(r,t)$, связанных с $U(r,t)$, $\phi(r,t)$ следующими соотношениями:

$$U(r,t) = H_1(r,t) + u(r,t), \quad \phi(r,t) = H_2(r,t) + \chi(r,t), \quad (2.28)$$

где $\{H_1, H_2\} = \{f_3(r), f_4(r)\} \omega_1(t) + \{f_5(r), f_6(r)\} \Theta(1,t)$, $f_3(r) \dots f_6(r)$ дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (2.28) в (2.11) – (2.13) при удовлетворении условий

$$\left(\frac{\partial H_1}{\partial r} + a_{10} \frac{H_1}{r} + \frac{\partial H_2}{\partial r} \right) = \Theta_{|r=R,1}, \quad H_2(R,t) = 0, \quad (2.29)$$

$$\left(-\frac{\partial H_2}{\partial r} + a_4 \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_5 \frac{H_1}{r} \right)_{|r=1} = -a_6 \Theta_{|r=1},$$

позволяет получить краевую задачу относительно функций $u(r,t)$, $\chi(r,t)$, с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial u}{\partial r} - a_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1, \quad (2.30)$$

$$-\nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = F_2,$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + a_{10} \frac{u}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0, \quad \chi|_{r=R} = 0, \quad \left(-\frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{u}{r} \right)_{|r=1} = 0; \quad (2.31)$$

$$t = 0 \quad u = u_0, \quad \chi = \chi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \dot{\chi}_0, \quad (2.32)$$

где $F_1 = \nabla \Theta - a_3 \frac{\Theta}{r} - \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2},$

$$F_2 = -a_6 \nabla \Theta + \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r},$$

$$u_0 = -H_1(r, 0), \quad \chi_0 = -H_2(r, 0), \quad \dot{u}_0 = -\frac{\partial H_1(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{\chi}_0 = -\frac{\partial H_2(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

Начально–краевую задачу (2.30)–(2.32) решаем, используя структурный алгоритм вырожденного обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [48]. Для этого вводим на сегменте $[R, 1]$ КИП с неизвестными компонентами собственных вектор–функций ядер преобразований $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$:

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 u(r, t) K_1(\lambda_i, r) r dr, \quad (2.33)$$

и формулы обращения:

$$\{u(r, t), \chi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)\} \|K_i\|^{-2}, \quad (2.34)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K_1(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

где λ_i – собственные значения, образующие счетное множество.

Использование алгоритма КИП [120] позволяет получить задачи для трансформанты $G(\lambda_i, t)$:

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \lambda_i^2 G = F_H, \quad (2.35)$$

$$t = 0 \quad G_{i|t=0} = G_0, \quad \frac{dG_i}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{G}_0; \quad (2.36)$$

и компонент собственных вектор–функций $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$:

$$\nabla \frac{dK_1}{r} - a_1 \frac{K_1}{r^2} + \nabla \frac{dK_2}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_2}{dr} + \lambda_i^2 K_1 = 0, \quad (2.37)$$

$$-\nabla \frac{dK_2}{dr} + a_4 \nabla \frac{dK_1}{dr} + a_5 \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} = 0,$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dK_1}{dr} + a_{10} \frac{K_1}{r} + \frac{dK_2}{dr} = 0, \quad K_{2|r=R} = 0, \quad \left(-\frac{dK_2}{dr} + a_4 \frac{dK_1}{dr} + a_5 \frac{K_1}{r} \right)_{|r=1} = 0; \quad (2.38)$$

$$\text{где } F_H = -\int_R^1 (F_1 K_1 + F_2 K_2) r dr, \quad G_0 = \int_R^1 (u_0 K_1 + \chi_0 K_2) r dr, \quad \dot{G}_0 = \int_R^1 (\dot{u}_0 K_1 + \dot{\chi}_0 K_2) r dr.$$

Общий интеграл уравнения (2.35), с учетом начальных условий (2.36), имеет вид:

$$G(\lambda_i, t) = G_0 \cos \lambda_i t + \dot{G}_0 \frac{\sin \lambda_i t}{\lambda_i} + \lambda_i^{-1} \int_0^t F_H(\tau) \sin \lambda_i (t - \tau) d\tau. \quad (2.39)$$

Система (2.37) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно функции $K_1(\lambda_i, r)$:

$$\frac{d^2 K_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} + \left(A_i^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) K_1 = a_{12} \frac{D_{1i}}{r^2}, \quad (2.40)$$

решение которого имеет вид

$$K_1(\lambda_i, r) = D_{1i} a_{12} Q_{v,-1}(A_i r) + D_{2i} J_v(A_i r) + D_{3i} Y_v(A_i r). \quad (2.41)$$

Здесь $Q_{v,-1}(\dots), J_v(\dots), Y_v(\dots)$ – неэлементарная функция Ломмеля, функции Бесселя 1–го и 2–го родов порядка v [120]; $D_{1i} \dots D_{3i}$ – постоянные интегрирования;

$$A_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{1 + a_4}, \quad v^2 = \frac{a_1 + a_2 a_5}{1 + a_4}, \quad a_{12} = \frac{a_2}{1 + a_4}.$$

Интегрирование второго уравнения (2.37) позволяет определить функцию $K_2(\lambda_i, r)$:

$$K_2(\lambda_i, r) = a_4 K_1(\lambda_i, r) + a_5 \int K_1(\lambda_i, r) r^{-1} dr + D_{4i} \ln(r) + D_{4i}. \quad (2.42)$$

Подстановка $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$ в граничные условия (2.38) формирует систему алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить постоянные интегрирования $D_{1i} \dots D_{4i}$ и собственные значения λ_i .

Окончательные выражения функций $U(r,t)\phi(r,t)$ получим, применяя к трансформанте (2.39) формулы обращения (2.34). В результате, с учетом (2.28), имеем:

$$U(r,t) = H_1(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i,t) K_1(\lambda_i,r) \|K_i\|^{-2}, \quad (2.43)$$

$$\phi(r,t) = H_2(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i,t) K_2(\lambda_i,r) \|K_i\|^{-2}.$$

Функции $H_1(r,t), H_2(r,t)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений

$$\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_1 \frac{H_1}{r^2} + \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} = 0 \quad (2.44)$$

$$\nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} = 0,$$

что позволяет существенно упростить правые части расчетных соотношений (2.30). В результате подстановки выражений H_1, H_2 в (2.44) формируются две системы уравнений относительно $f_3(r), f_4(r)$ и $f_5(r), f_6(r)$. Их решение, при удовлетворении условий (2.29), позволяет определить функции $f_3(r) \dots f_6(r)$:

$$f_3(r) = N_1 r^v + N_2 r^{-v}, \quad f_4(r) = N_1 \left(a_4 + \frac{a_5}{v} \right) r^v + N_2 \left(a_4 - \frac{a_5}{v} \right) r^{-v} + N_3,$$

$$f_5(r) = N_4 r^v + N_5 r^{-v}, \quad f_6(r) = N_4 \left(a_4 + \frac{a_5}{v} \right) r^v + N_5 \left(a_4 - \frac{a_5}{v} \right) r^{-v} + N_6,$$

где $N_1 = \frac{a_{13}}{a_{14}} N_2, \quad N_2 = \frac{R}{a_{13}(R^{-v} - R^v)}, \quad N_3 = -a_{15} N_1 - a_{16} N_2, \quad N_4 = \frac{R^{-2v}}{a_{14}} N_5,$

$$N_5 = \frac{1}{a_{13}(1 - R^{-2v})}, \quad N_6 = -a_{15} N_4 - a_{16} N_5, \quad a_{13} = a_5 + a_{10} - v(1 + a_4),$$

$$a_{14} = a_5 + a_{10} + v(1 + a_4), \quad a_{15} = \left(a_4 + \frac{a_5}{v} \right) R^v, \quad a_{16} = \left(a_4 - \frac{a_5}{v} \right) R^{-v}, \quad v^2 = \frac{a_1 + a_2 a_5}{1 + a_4}.$$

Расчетные соотношения (2.26), (2.43), удовлетворяющие дифференциальные уравнения (2.8), (2.11) и краевые условия (2.9) – (2.13), представляют замкнутое

решение рассматриваемой несвязанной осесимметричной задачи термоэлектроупругости.

2.5. Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается длинный полый цилиндр ($b = 0.02$ м) изготовленный из радиально поляризованной пьезокерамики следующих составов (таблица 2.1):

- PZT–4 – материал средней сегнетожесткости [80, 110, 113];
- PZT–5A – сегнетомягкая пьезокерамика [33];
- ПКР–35 – пьезокерамика средней сегнетожесткости, обладающая высоким коэффициентом линейного температурного расширения и низким коэффициентом диэлектрической проницаемости [16, 40].

Таблица 2.1

Физические свойства	PZT–4	PZT–5A	ПКР–35
$C_{11} \times 10^{-10}$, Па	13.9	9.92	13.95
$C_{13} \times 10^{-10}$, Па	7.43	5.08	6.2
$C_{33} \times 10^{-10}$, Па	11.5	8.69	11.8
$\varepsilon_{33} \times 10^9$, Ф/м	5.62	15	1.06
e_{31} , Кл/м ²	–5.2	–7.2	–7.3
e_{33} , Кл/м ²	15.1	15.1	16.2
$\rho \times 10^{-3}$, кг/м ³	7.5	7.65	5.2
$k \times 10^{-6}$, Дж/(м ³ К)	3	3	4
Λ , Вт/(м К)	1.6	1.8	3.14
$\alpha_l \times 10^5$, К ⁻¹	0.4	0.33	1.1
$g_3 \times 10^6$, Кл/(м ² К)	–0.6	–2	–2
$\beta_{rel} \times 10^5$, с	1	1	1

Для пьезокерамического цилиндра коэффициент теплоотдачи $\alpha = 5.6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$.

Рассматривается случай изменения температуры внутренней ($r_* = a$) цилиндрической поверхности электроупругого элемента по времени следующим образом (рис.2.1):

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad (2.45)$$

где $H(\tilde{t})$ единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t}) = 1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t}) = 0$ при $\tilde{t} < 0$),

$T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, T_{\max}^*, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373 \text{ К}$ ($100 \text{ }^\circ\text{C}$), $T_0 = 293 \text{ К}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$), $t_{\max}^* = 1 \text{ с}$).

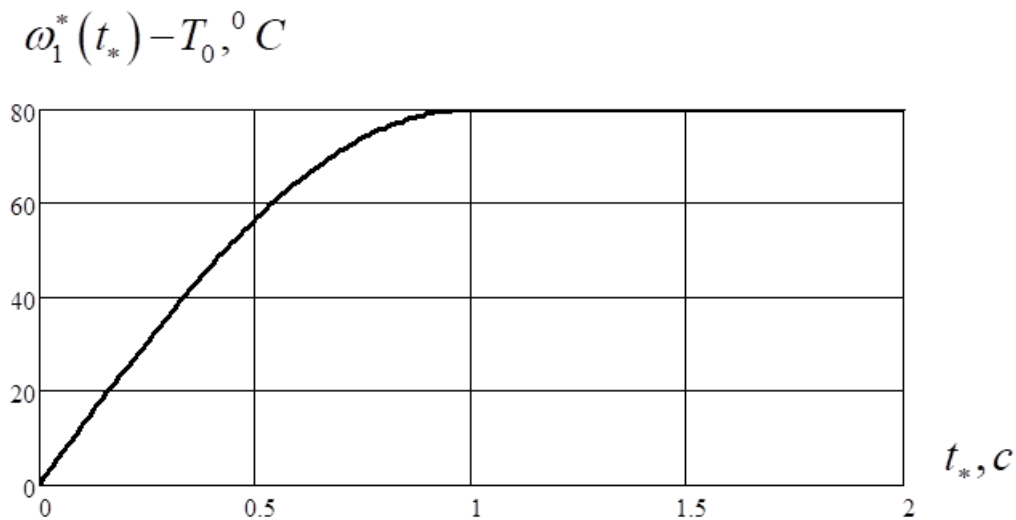


Рис.2.1. График изменения $\omega_1^*(t_*)$ во времени t_*

На рисунках 2.2, 2.3 представлены графики изменения температуры $\Theta^*(r, t)$ по радиальной координате, полого цилиндра различной толщины (рис.2.2– $R = 0.8$, рис.2.3– $R = 0.5$). Цифрами 1–3 обозначены результаты для различных моментов времени: $t = t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$ – для конструкции с относительной толщиной $R = 0.8$ и $t = t_{\max}, 100t_{\max}, 400t_{\max}$ – $R = 0.5$.

Здесь и ниже в графиках используется безразмерное время t_{\max} , соответствующее времени достижения нагрузки максимального значения, т.е.

$$t_{\max} = \frac{t_{\max}^*}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}.$$

Результаты расчета показывают, что при высокоскоростном температурном нагружении ($t_{\max}^* = 1$ с), не зависимо от толщины стенки, первоначально прогревается внутренняя цилиндрическая поверхность на одинаковую глубину (рис.2.2, 2.3, графики 1). В дальнейшем, при постоянной температуре на внутренней поверхности прогревается весь цилиндр (рис.2.2, 2.3, графики 2,3). При этом очевидно, что время установившегося температурного режима зависит от толщины упругой системы.

Скорость изменения температурного поля в цилиндрах, выполненных из пьезокерамики различных составов, зависит от коэффициента температуропро-

водности $\eta = \frac{\Lambda}{k}$, учитывающего в расчетах с помощью постоянной $a_7 = \frac{b}{\eta} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}$.

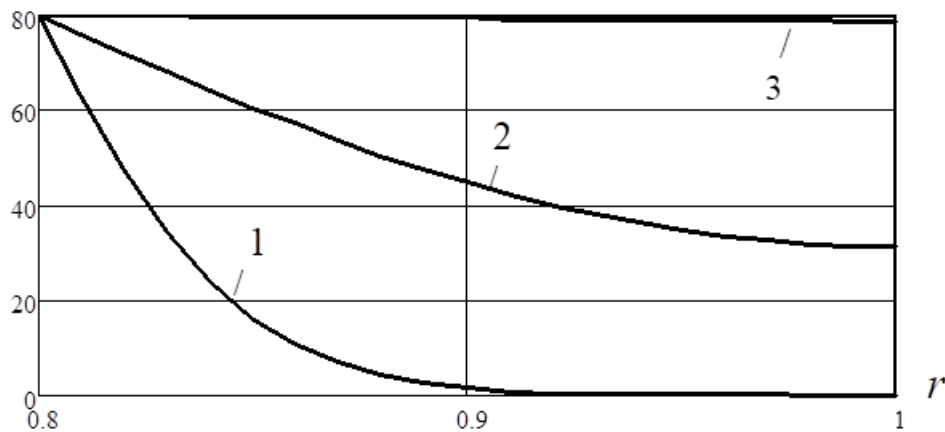
Его увеличение для различных пьезокерамик (PZT-4 – $\eta = 0.533 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, PZT-5A – $\eta = 0.6 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, ПКР-35 – $\eta = 0.785 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) приводит к росту скорости изменения температуры в цилиндре (рис.2.2, 2.3, графики 2).

Температура внешней цилиндрической поверхности, при постоянном значении коэффициента теплоотдачи α , зависит от толщины стенки элемента и коэффициента теплопроводности материала Λ (рис.2.2, 2.3, графики 3). Данные параметры в расчетах учитываются с помощью постоянной $a_{11} = \alpha \frac{b}{\Lambda}$. Рост параметра

Λ приводит к снижению коэффициента a_{11} , при постоянных значениях α, b , и в результате к увеличению температуры на внешней цилиндрической поверхности при установившемся температурном режиме. Для состава PZT-4 при $R = 0.8$ имеем $\Theta^*(1, t) = 78.77 \text{ } ^\circ\text{C}$, а при $R = 0.5$ – $\Theta^*(1, t) = 76.29 \text{ } ^\circ\text{C}$. Для составов пьезо-

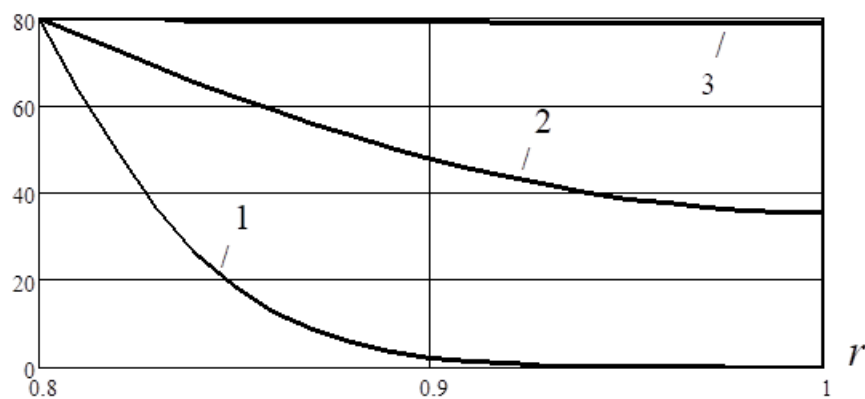
керамик PZT-5A, ПКР-35 соответственно получается следующие температуры:
 $78.9^{\circ}C - R = 0.8$, $76.69^{\circ}C - R = 0.5$ и $79.37^{\circ}C - R = 0.8$, $78.87^{\circ}C - R = 0.5$.

$$\Theta^*(r,t),^{\circ}C$$



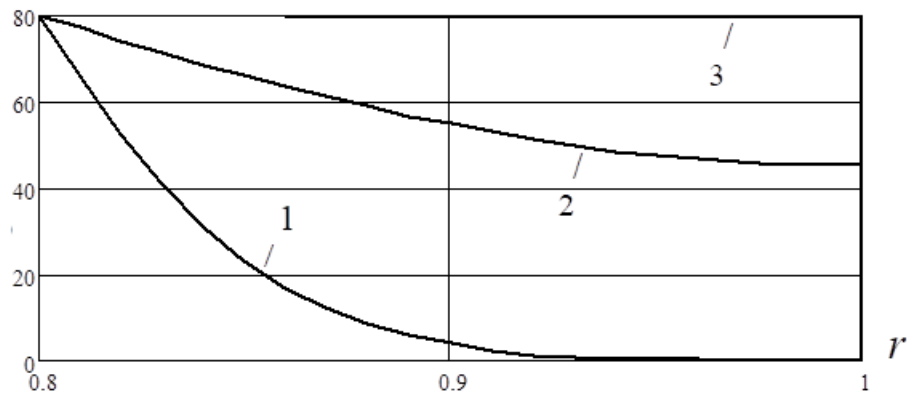
а) PZT-4

$$\Theta^*(r,t),^{\circ}C$$



б) PZT-5A

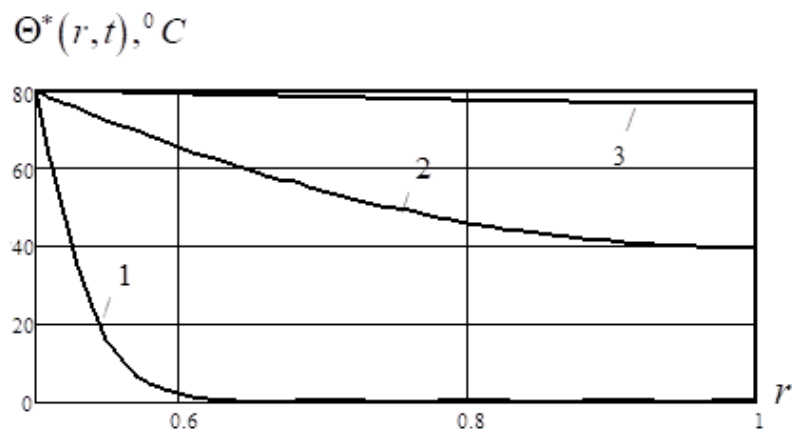
$$\Theta^*(r,t),^{\circ}C$$



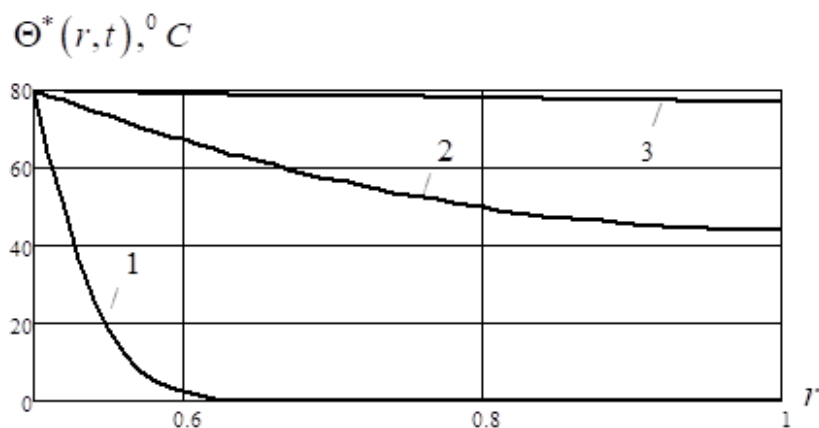
в) ПКР-35

Рис. 2.2. Изменение температурного поля цилиндра ($R = 0.8$) в различные моменты времени:

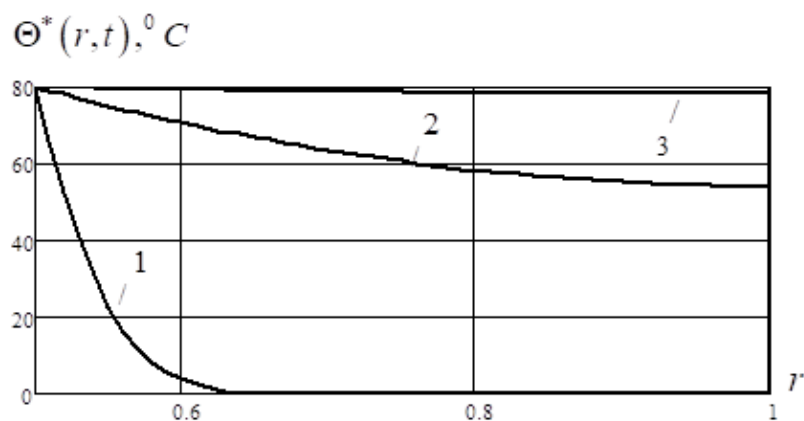
$$1-t = t_{\max}, 2-t = 10t_{\max}, 3-t = 100t_{\max} \left(t_{\max} = \frac{t_{\max}^*}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \right)$$



а) PZT-4



б) PZT-5A



в) ПКР-35

Рис. 2.3. Изменение температурного поля цилиндра ($R = 0.5$) в различные моменты времени:

$$1-t = t_{\max}, 2-t = 100t_{\max}, 3-t = 400t_{\max} \left(t_{\max} = \frac{t_{\max}^*}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \right)$$

На рисунке 2.4 показаны графики изменения температуры $\Theta^*(r, t_{\max})$ в цилиндре ($R = 0.9$) по радиальной координате при использовании гиперболической (сплошная линия) и параболической ($\beta_{rel} = 0$, пунктирная линия) теорий теплопроводности. Представленные результаты получены для цилиндра радиусом $b = 7 \times 10^{-5}$ (м) при высокоскоростным изменении температуры $t_{\max}^* = 10^{-5}$ (с).

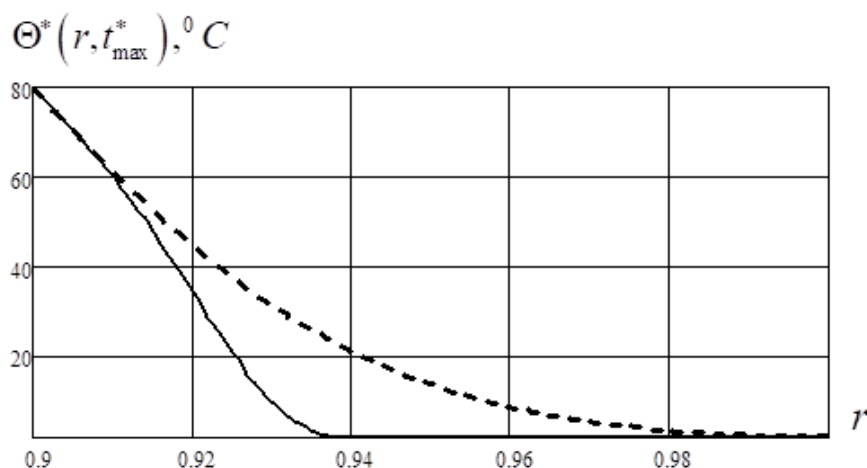


Рис. 2.4. Изменение температуры $\Theta^*(r, t_{\max}^*)$ по радиальной координате в цилиндре ($R = 0.9$) состава PZT-4: сплошная линия – гиперболическая теория ($\beta_{rel} = 10^{-5}$ с), пунктирная линия – параболическая теория ($\beta_{rel} = 0$)

Результаты расчета подтверждают известные данные о более медленном прогреве упругой системы при использовании гиперболических теорий. При этом разница результатом наблюдается использовании цилиндров микроразмеров. Дальнейшее уменьшение размеров электроупругой конструкции и увеличении скорости изменения температуры на лицевой поверхности приводит к более существенной разнице результатов полученных по различным теориям результатов.

На основании численных результатов, полученных при решении задачи теплопроводности, температурное поле в стенке цилиндра, для исследования в дальнейшем задачи электроупругости, аппроксимируется следующим образом:

– изменение температуры на внутренней поверхности цилиндра определяется функцией $\omega_1^*(t_*)$ (2.45);

– изменение температуры по времени на внешней поверхности цилиндра определяется на основании расчета (рис.2.2, 2.3). Для пьезокерамического цилиндра при $R = 0.8$ в общем случае имеем следующий график « $\Theta^*(1, t_*) - t_*$ » (рисунок 2.5), который описывается следующей зависимостью:

$$\Theta^*(1, t_*) = 0 \times H(3t_{\max}^* - t_*) + \left[T^{(1)} \sin\left(\frac{\pi}{2 \times 100t_{\max}^*} (t - 3t_{\max}^*)\right) \right] \left[H(100t_{\max}^* - t_*) - H(3t_{\max}^* - t_*) \right] + T^{(1)} H(t - 100t_{\max}^*),$$

где $T^{(1)} = T_{\max}^{(1)} - T_0$, $T_{\max}^{(1)}$ – максимальное значение температуры на внешней лицевой поверхности цилиндра.

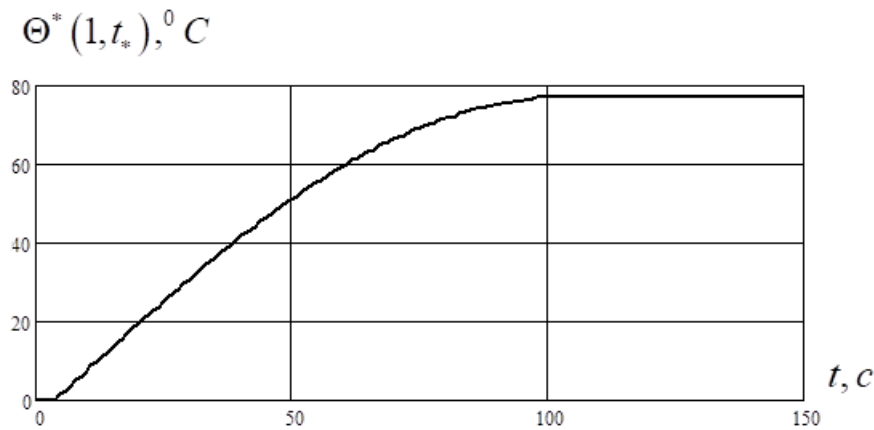


Рис. 2.5. Изменение температуры на внешней лицевой поверхности цилиндра $\Theta^*(1, t_*)$ ($R = 0.8$) по времени

– принимаем линейную зависимость изменения температурного поля в стенке цилиндра в произвольный момент времени.

В результате имеем следующую зависимость изменения температурного поля в цилиндре:

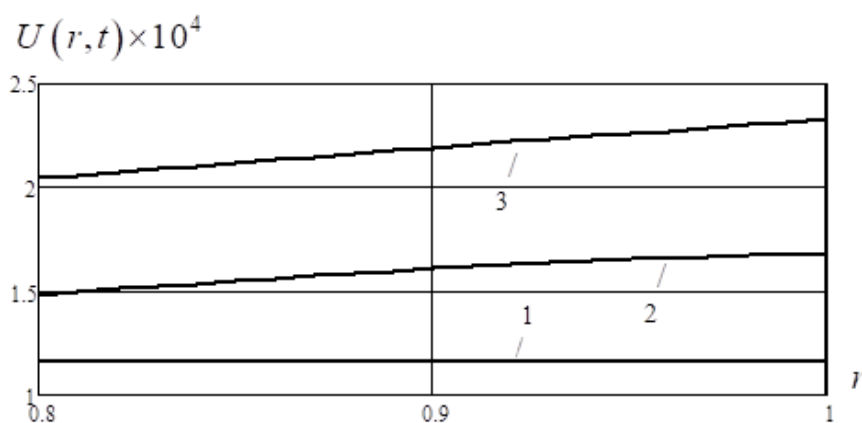
$$\begin{aligned} \Theta^*(r, t_*) = & (1-R)^{-1} \left\{ (1-r) \omega_1^*(t) H(3t_{\max}^* - t_*) + \right. \\ & + \left[(1-r) \omega_1^*(3t_{\max}^*) + (r-R) \Theta^*(1, t_*) \right] \left[H(100t_{\max}^* - t_*) - H(3t_{\max}^* - t_*) \right] + \\ & \left. + \left[(1-r) \omega_1^*(3t_{\max}^*) + (r-R) \Theta^*(1, 100t_*) \right] H(t_* - 100t_{\max}^*) \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

При использовании зависимости изменения температуры в пьезокерамическом цилиндре (2.46) были получены численные результаты расчета задачи электроупругости.

На рисунках 2.6, 2.7 показаны графики изменения перемещений $U(r,t)$ и потенциала электрического поля $\phi(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени ($R = 0.8$). Цифрами 1–3 обозначены результаты справедливые при $t = t_{\max}, 30t_{\max}, 100t_{\max}$.

Анализ численных результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

- основное влияние на величину перемещений и потенциала оказывает коэффициент линейного температурного расширения α_t (таблица 2.1). Поэтому наибольшие численные значения функций $U(r,t), \phi(r,t)$ наблюдаются в пьезокерамическом цилиндре состава ПКР –35 (рисунки 2.6, 2.7);
- в течении времени за счет прогрева цилиндра наблюдается увеличение радиальных перемещений и потенциала на внешней цилиндрической поверхности;
- для всех составов пьезокерамики при действии температуры за счет расширения наблюдается увеличение толщины стенки цилиндра (рисунок 2.6);



а) PZT– 4

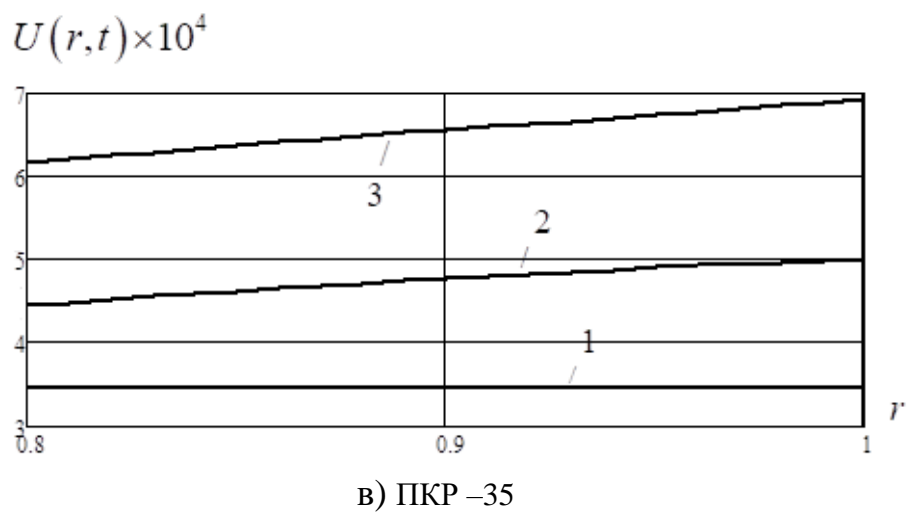
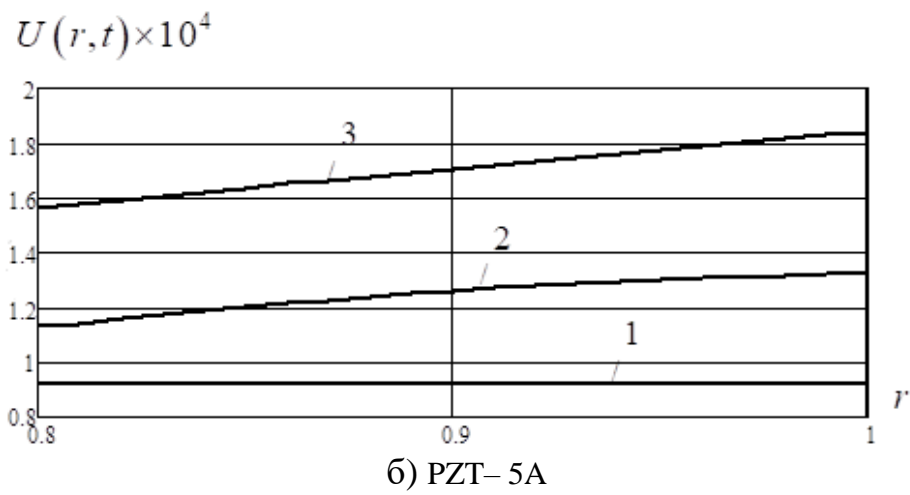
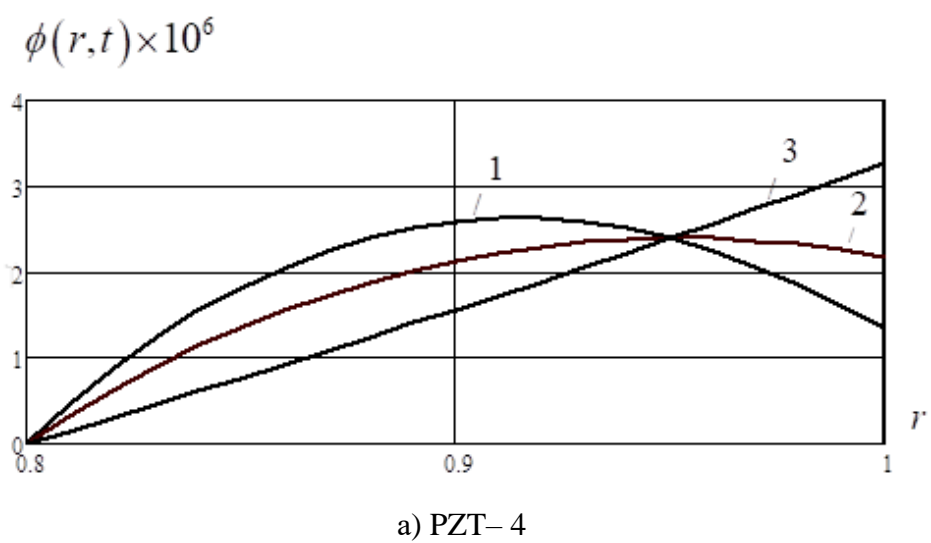
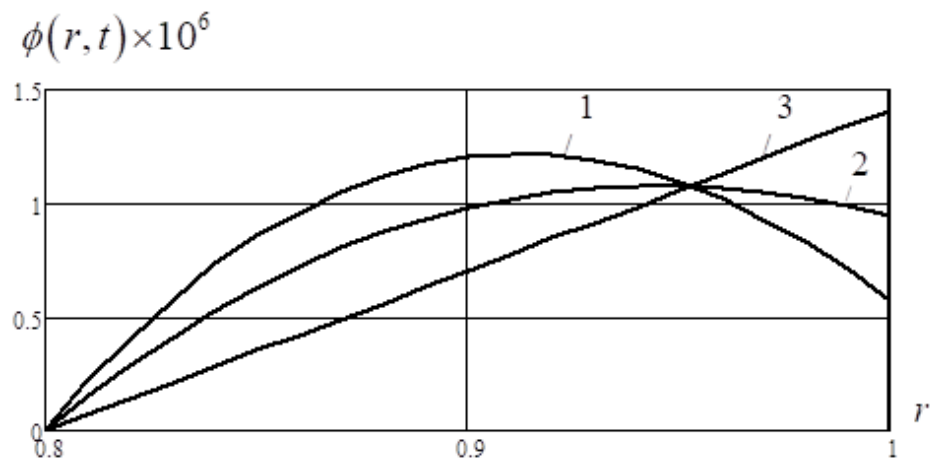
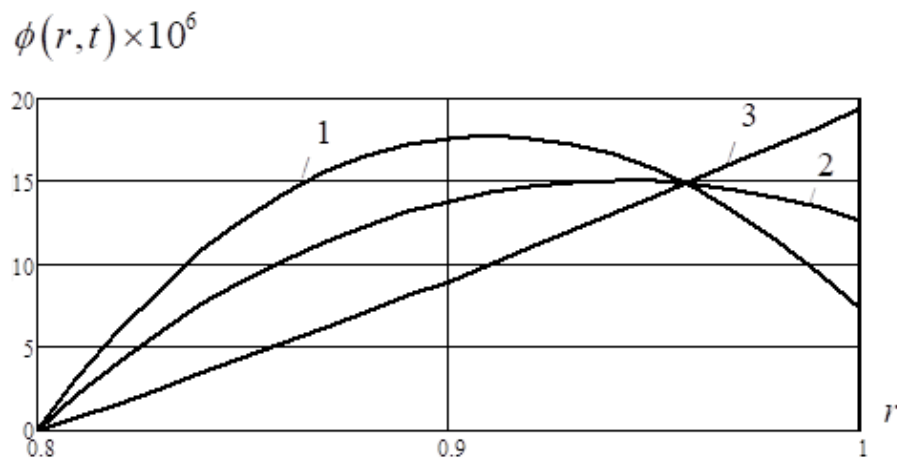


Рис. 2.6. Графики изменения $U(r,t)$ по радиальной координате r
 (1- $t = t_{\max}$, 2- $t = 30t_{\max}$, 3- $t = 100t_{\max}$)





б) PZT-5A



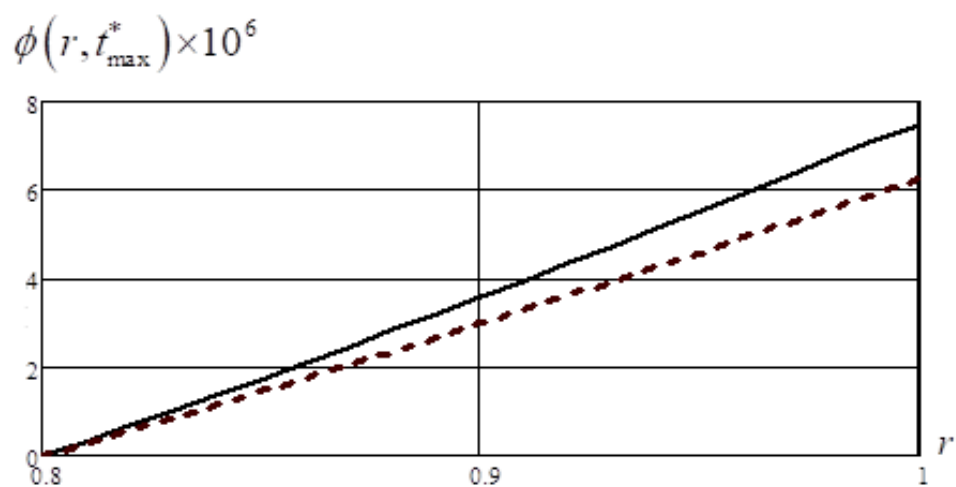
в) ПКР-35

Рис. 2.7. Графики изменения $\phi(r, t)$ по радиальной координате r
 (1- $t = t_{\max}$, 2- $t = 30t_{\max}$, 3- $t = 100t_{\max}$)

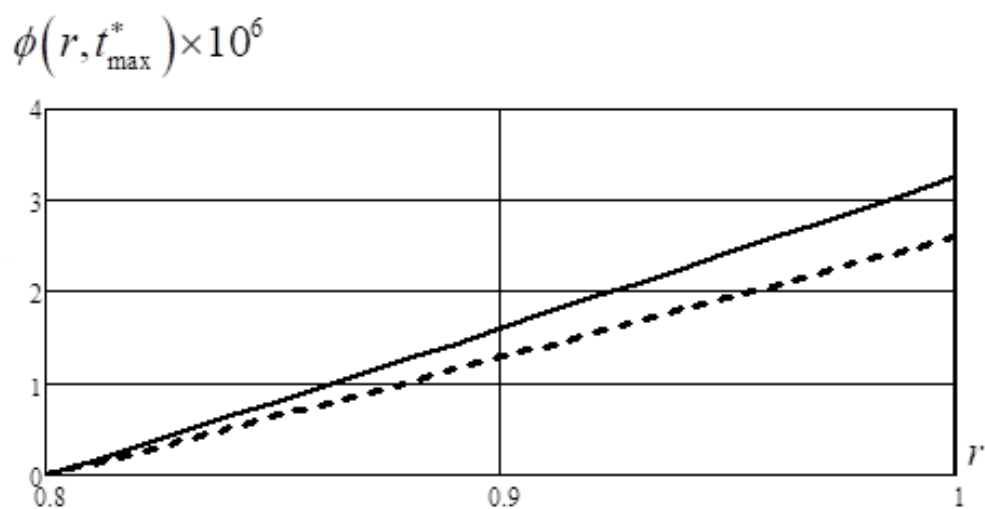
– для всех составов пьезокерамик характер изменения во времени потенциала электрического поля одинаков.

Для оценки влияния сил инерции упругой системы ($R = 0.8$) на напряженно-деформированное состояние и потенциала электрического поля на рисунке 2.8 представлены графики изменения $\phi(r, t_{\max}^*)$ по радиальной координате r . Сплошной и пунктирной линиями соответственно обозначены результаты, полученные с учетом и без учета инерционных характеристик пьезокерамического цилиндра.

Результаты расчета показывают, что разница в результатах будет существенна при высокоскоростном изменении температуры на внутренней поверхности цилиндра, когда $t_{\max}^* = 2 \times 10^{-5}$ (с).



а) PZT- 4



б) PZT- 5A

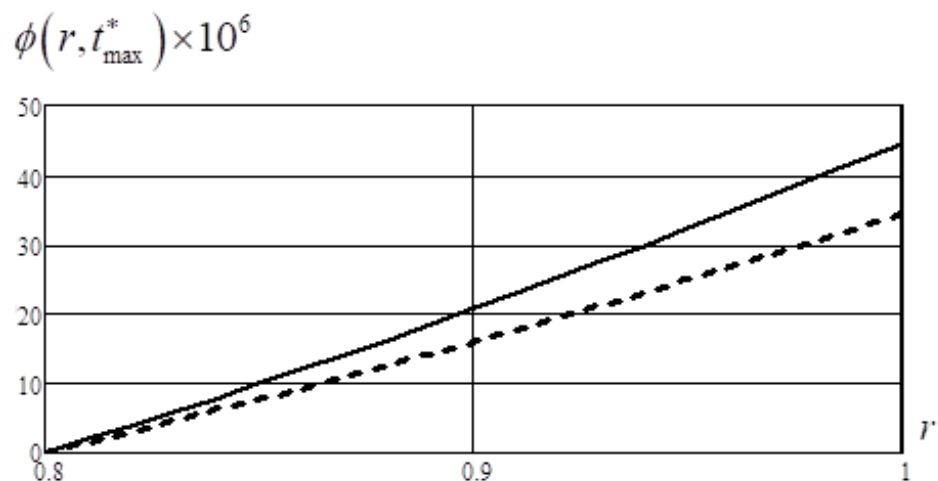


Рис. 2.8. Графики изменения $\phi(r, t_{\max}^*)$ по радиальной координате r

Для обобщения результатов на конструкции с различной толщиной стенки используется известный факт, что при гармоническом воздействии силами инерции можно пренебречь, когда частота вынужденных колебаний θ существенно меньше первой частоты собственных колебаний ψ .

Поскольку на первом этапе исследования температура $\omega_1^*(t_*)$ (2.45) изменяется по гармоническому закону, то принимаем за частоту вынужденных колебаний следующее выражение:

$$\theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}.$$

При этом первая частота собственных осесимметричных радиальных колебаний цилиндра ψ вычисляется с помощью следующего равенства:

$$\psi = \frac{\lambda_1}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}.$$

В таблице 2.2 приведены численные результаты расчета ψ для электроупругих цилиндров с различной относительной толщиной стенки ($b = 0.02$ м).

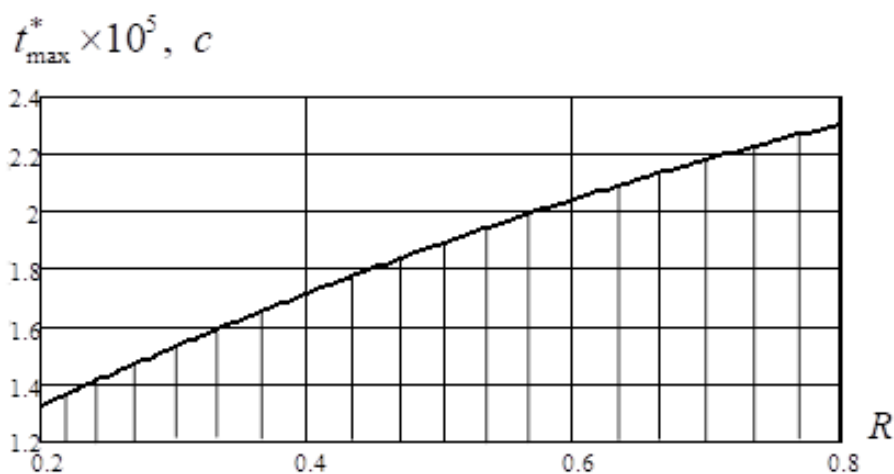
Таблица 2.2

R \ Составы	PZT–4 $\psi \times 10^{-5}, c^{-1}$	PZT–5A $\psi \times 10^{-5}, c^{-1}$	ПКР–35 $\psi \times 10^{-5}, c^{-1}$
0.8	2.238	1.852	3.301
0.6	2.572	2.131	3.725
0.4	3.091	2.57	4.283
0.2	3.948	3.296	5.004

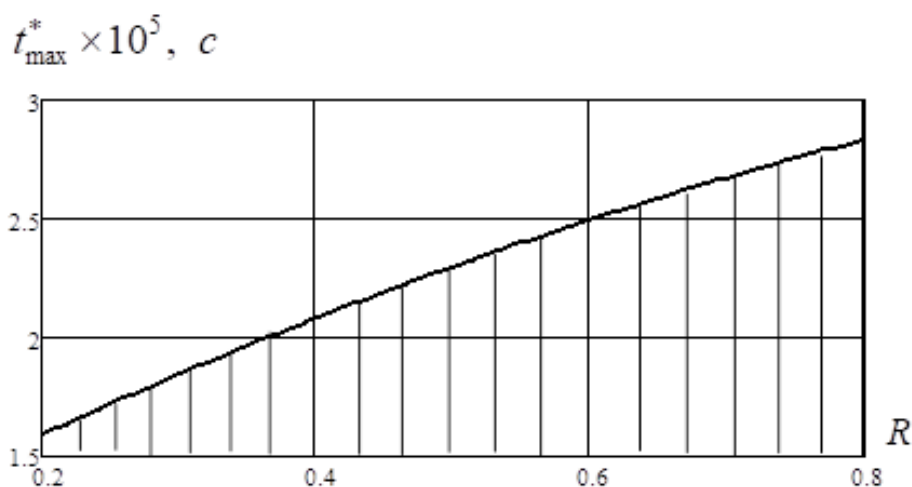
Анализ результатов расчета, приведенных на рисунке 2.8 и в таблице 2.2, позволяет сделать вывод, что инерционные характеристики электроупругой системы необходимо учитывать при следующем соотношении частот:

$$\theta \geq 0.3\psi .$$

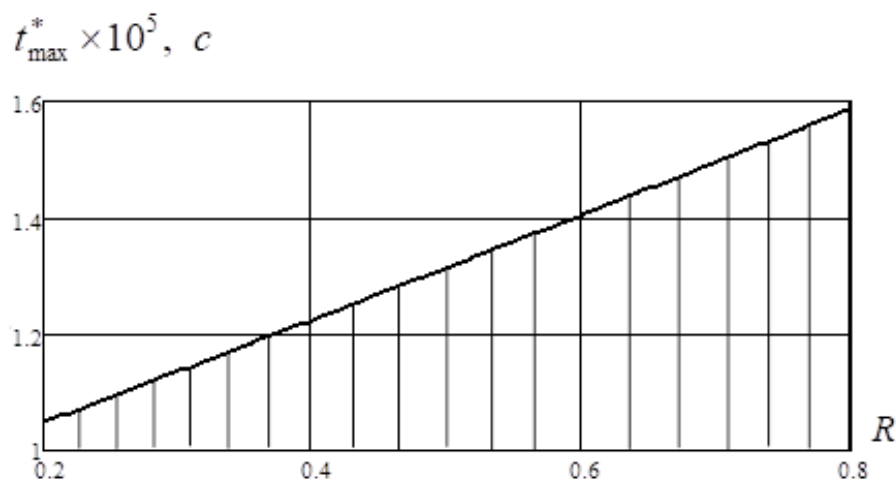
Распространяя данную зависимость на конструкции с различной толщиной стенки цилиндра получаем графики (рис.2.9), позволяющие определить время достижения нагрузки максимального значения t_{\max}^* ($T_{\max}^* = 373 \text{ K} (100 \text{ } ^\circ\text{C})$), когда в расчетах необходимо учитывать инерционные характеристики упругой системы (заштрихованная часть графика).



а) PZT-4



б) PZT-5A



в) ПКР–35

Рис. 2.9. Зависимость " $t_{\max}^* - R$ "

Анализ численных результатов расчета, приведенных на рисунке 2.9, позволяет в дальнейшем при соответствующих ограничениях по толщине стенки цилиндра и скорости изменения температурной нагрузки, в расчетах вместо уравнений движений использовать уравнения равновесия, существенно упрощающие исходные расчетные соотношения.

Полученные в настоящей главе результаты динамического несвязанного расчета позволяют определить напряженно–деформированное состояние, температурное и электрическое поля в бесконечно длинном пьезокерамическом цилиндре с произвольной толщиной стенки без ограничений по скорости изменения температурной нагрузки.

ГЛАВА 3

СВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИМЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМО- ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА (ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1–ГО РОДА)

В настоящей главе рассматривается связанная динамическая задача термоэлектродупругости для бесконечно длинного полого пьезокерамического цилиндра. В результате преобразования исходных расчетных соотношений удастся, в случае удовлетворения граничных условий теплопроводности 1–го рода, сформировать самосопряженную систему уравнений, интегрирование которой осуществляется методом неполного разделения переменных в виде обобщенного конечного интегрального преобразования [49].

3.1. Постановка задачи

Пусть длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область Ω : $\{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. На цилиндрических поверхностях задана температура в виде следующих нестационарных функций (граничные условия 1–го рода) – $\omega_1^*(t_*)(r_* = a)$, $\omega_2^*(t_*)(r_* = b)$. Внутренняя электродированная поверхность заземлена, а внешняя подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением.

Математическая формулировка рассматриваемой осесимметричной задачи в безразмерной форме включает дифференциальные уравнения термоэлектродупругости (2.4) и краевые условия:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(a_7 \Theta + a_8 \nabla U - a_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \Theta|_{r=1} = \omega_2, \quad (3.2)$$

$$\phi|_{r=R} = 0, \quad \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \Theta \right)|_{r=1} = 0;$$

$$t = 0 \quad U = \Theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0; \quad (3.3)$$

где $\{U, r, R\} = \{U^*, r_*, a\} / b$, $\phi = \frac{e_{33}}{C_{33}b} \phi^*$, $\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, \omega_1^* - T_0, \omega_2^* - T_0\}$,

$$\{t, \beta\} = \frac{\{t_*, \beta_{rel}\}}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\epsilon_{33}}, \quad a_5 = \frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\epsilon_{33}},$$

$$a_6 = \frac{g_3 e_{33}}{\epsilon_{33} \gamma_{33}}, \quad a_7 = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_8 = \frac{b \gamma_{33}^2 T_0}{\Lambda \sqrt{C_{33} \rho}}, \quad a_9 = \frac{b \gamma_{33} g_3 T_0}{e_{33} \Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_{10} = \frac{C_{13}}{C_{33}},$$

$$\dot{\Theta}_0 = \frac{d\omega_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} \delta(r-R) + \frac{d\omega_2(t)}{dt} \Big|_{t=0} \delta(r-1), \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

В случае заземления внутренней поверхности пьезокерамического элемента, электрическое напряжение $V(t_*)$ определяется потенциалом на его внешней поверхности:

$$V(t_*) = \phi(1, t_*). \quad (3.4)$$

3.2. Построение общего решения

На первом этапе исследования в результате интегрирования уравнения электростатики (второе уравнение (2.4)) определяется радиальная компонента вектора напряженности электрического поля:

$$E_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \Theta + \frac{D_1}{r}, \quad (3.5)$$

где D_1 – постоянная интегрирования.

Подстановка (3.5) в (3.1) – (3.3) позволяет сформулировать новую задачу относительно функций $U(r,t), \Theta(r,t)$:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - b_1 \frac{U}{r^2} + b_2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + b_3 \frac{\Theta}{r} - \frac{1}{(1+a_4)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_7 \Theta + a_8 \nabla U) = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + b_4 \frac{U}{r} + b_2 \Theta = 0, \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \Theta|_{r=1} = \omega_2; \quad (3.7)$$

$$t = 0 \quad U = \Theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0; \quad (3.8)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{a_1 + a_2 a_5}{1 + a_4}, \quad b_2 = \frac{a_6 - 1}{1 + a_4}, \quad b_3 = b_2 + \frac{a_3 - a_2 a_6}{1 + a_4}, \quad b_4 = \frac{(a_5 + a_{10})}{(1 + a_4)}.$$

В равенствах (3.6) принимается $D_1 = 0$, что позволяет удовлетворить условие подключения внешней электродированной поверхности к измерительному прибору с большим сопротивлением (последнее равенство (3.2)). Кроме того, в уравнении теплопроводности, вследствие различных скоростей распространения электрического и температурного полей, не учитывается влияние напряженности электрического поля $\left(E_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$ на функцию температуры $\Theta(r,t)$.

На следующем этапе решения краевые условия (3.7) приводятся к виду, позволяющему в дальнейшем использовать процедуру неполного разделения переменных методом конечных интегральных преобразований. Для этого вводятся новые функции $u(r,t), N(r,t)$, связанные с $U(r,t), \Theta(r,t)$ соотношениями:

$$U(r,t) = H_1(r,t) + u(r,t), \quad \Theta(r,t) = H_2(r,t) + N(r,t), \quad (3.9)$$

$$\text{где } H_1(r,t) = f_1(r)A(1,t) + f_2(r)A(R,t) + f_3(r)\omega_1(t) + f_4(r)\omega_2(t),$$

$$H_2(r,t) = f_5(r)\omega_1(t) + f_6(r)\omega_2(t), \quad f_1(r) \dots f_6(r) \text{ — дважды дифференцируемые функции, } A(r,t)|_{r=R,1} = (1 - b_4)U(r,t)/r.$$

Подстановка (3.9) в расчетные соотношения (3.6) – (3.8) при выполнении условий:

$$\nabla H_1 + b_2 H_2 = A(r, t)_{r=R,1}, \quad H_{2|r=R} = \omega_1, \quad H_{2|r=1} = \omega_2, \quad (3.10)$$

позволяет получить задачу относительно функции $u(r, t)$, $N(r, t)$:

$$\nabla \frac{\partial u}{\partial r} - b_1 \frac{u}{r^2} + b_2 \frac{\partial N}{\partial r} + b_3 \frac{N}{r} - \frac{1}{(1+a_4)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1, \quad (3.11)$$

$$\nabla \frac{\partial N}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_7 N + a_8 \nabla u) = F_2;$$

$$r = R, 1 \quad \nabla u = 0, \quad N = 0; \quad (3.12)$$

$$t = 0 \quad u = -H_1(r, 0), \quad N = -H_2(r, 0), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial H_1(r, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \dot{\Theta}_0 - \frac{\partial H_2(r, t)}{\partial t};$$

где $F_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + b_1 \frac{H_1}{r^2} - b_2 \frac{\partial H_2}{\partial r} - b_3 \frac{H_2}{r} + \frac{1}{(1+a_4)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2},$

$$F_2 = -\nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_7 H_2 + a_8 \nabla H_1).$$

Здесь следует отметить, что $A(r, t)$ является неизвестной функцией перемещений цилиндрических поверхностей цилиндра. Первоначально $A(r, t)$ приравняется к нулю, с последующим ее определением и уточнением H_1, F_1, F_2 .

Дальнейшие преобразования расчетных соотношений (3.11) – (3.13) связаны с использованием следующих допущений: $b_1 = 1$, $b_3 = 0$ и введения термоупругого потенциала:

$$N = \nabla B. \quad (3.14)$$

Условие $b_1 = 1$ можно принять без большой погрешности, поскольку для пьезокерамических материалов $b_1 = 0.94 \div 0.98$, а зависимость $b_3 = 0$ выполняется в случае равенства компонент тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = \gamma_{33}$) и отсутствие влияния температуры на электрическое поле ($g_3 = 0$).

В результате формируется следующая самосопряженная краевая задача относительно функций $u(r,t), B(r,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla u + b_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla B - \frac{1}{(1+a_4)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla B - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_7 B + a_8 u) = F_3;$$

$$r = R, 1 \quad \nabla u = \nabla B = 0; \quad (3.16)$$

$$t = 0 \quad u = -H_1(r, 0), \quad \nabla B = -H_2(r, 0), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial H_1(r, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla B = \dot{\Theta}_0 - \frac{\partial H_2(r, t)}{\partial t};$$

где $F_3 = -\frac{\partial H_2}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_7 H_3 + a_8 H_1)$, $\nabla H_3 = f_5(r) \omega_1(t) + f_6(r) \omega_2(t)$.

Начально–краевую задачу (3.15)–(3.17) решаем, используя структурный алгоритм обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [49]. При этом для данной задачи удастся использовать однокомпонентное неизвестное ядро преобразований $K(\lambda_i, r)$:

$$\{G_1(\lambda_i, t), G_2(\lambda_i, t)\} = \int_R^1 \{u(r, t), B(r, t)\} K(\lambda_i, r) r dr, \quad (3.18)$$

$$\{u(r, t), B(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{G_1(\lambda_i, t), G_2(\lambda_i, t)\} K(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}, \quad (3.19)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

где λ_i – собственные значения, образующие счетное множество.

В результате использования алгоритма КИП [49] получаем задачи относительно ядра преобразований $K(\lambda_i, r)$:

$$\frac{d^2 K(\lambda_i, r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK(\lambda_i, r)}{dr} + \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) K(\lambda_i, r) = 0, \quad (3.20)$$

$$r = R, 1 \quad \nabla K(\lambda_i, r) = 0, \quad (3.21)$$

и трансформант $G_1(\lambda_i, t), G_2(\lambda_i, t)$:

$$-\lambda_i^2 G_{1i} + \frac{\lambda_i^2}{(1+a_4)} G_{2i} - \frac{1}{(1+a_4)} \frac{d^2 G_{1i}}{dt^2} = F_{1H}, \quad (3.22)$$

$$-\lambda_i^2 G_{2i} - \left(\frac{d}{dt} + \beta \frac{d^2}{dt^2} \right) (a_7 G_{2i} + a_8 G_{1i}) = F_{2H};$$

$$t=0 \quad G_{1i} = G_{1i0}, \quad \frac{dG_{1i}}{dt} = \dot{G}_{1i0}, \quad G_{2i} = G_{2i0}, \quad \frac{dG_{2i}}{dt} = \dot{G}_{2i0}; \quad (3.23)$$

$$\text{где } \{F_{1H}, F_{2H}\} = \int_R^1 \{F_1, F_3\} K(\lambda_i, r) r dr, \quad \{G_{1i0}, G_{2i0}\} = - \int_R^1 \{H_1(r, 0), H_2(r, 0)\} K(\lambda_i, r) r dr,$$

$$\{\dot{G}_{1i0}, \dot{G}_{2i0}\} = \int_R^1 \left\{ -\frac{\partial H_1(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \left(\dot{\Theta}_0 - \frac{\partial H_2(r, t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \right\} K(\lambda_i, r) r dr.$$

Общее решение задачи (3.20), (3.21) имеет следующий вид:

$$K(\lambda_i, r) = Y_0(\lambda_i) J_1(\lambda_i r) - J_0(\lambda_i) Y_1(\lambda_i r). \quad (3.24)$$

Здесь собственные значения λ_i определяются с помощью следующего трансцендентного уравнения:

$$Y_0(\lambda_i) J_0(\lambda_i R) - J_0(\lambda_i) Y_0(\lambda_i R) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений (3.22) приводится к следующему разрешающему уравнению 4-го порядка относительно $G_1(\lambda_i, t)$:

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + b_5 \frac{d^3}{dt^3} + b_{6i} \frac{d^2}{dt^2} + b_{7i} \frac{d}{dt} + b_{8i} \right) G_{1i} = F_H, \quad (3.25)$$

$$\text{где } F_H = -b_5 \left[\frac{\lambda_i^2}{a_7} [F_{2H} + (1+a_4)F_{1H}] + (1+a_4) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F_{1H} \right],$$

$$b_5 = \frac{1}{\beta}, \quad b_{6i} = \lambda_i^2 \left(1 + a_4 + \frac{a_8}{a_7} + \frac{b_5}{a_7} \right), \quad b_{7i} = b_5 \lambda_i^2 \left(1 + a_4 + \frac{a_8}{a_7} \right), \quad b_{8i} = b_5 \lambda_i^4 \frac{(1+a_4)}{a_7}.$$

Поскольку характеристическое уравнение

$$k^4 + b_5 k^3 + b_{6i} k^2 + b_{7i} k + b_{8i} = 0,$$

соответствующее равенству (3.25), будет действительное, то оно из условия осциллирующего решения для $G_1(\lambda_i, t)$ имеет два действительных корня (k_{1i}, k_{2i}) и два комплексно – сопряженных корня ($k_{3i} = \sigma + i\omega$, $k_{4i} = \sigma - i\omega$).

В этом случае общее решение уравнения (3.25) имеет вид:

$$G_1(\lambda_i, t) = D_{2i} \exp(k_{1i}t) + D_{3i} \exp(k_{2i}t) + (D_{4i} + D_{5i}) \cos(\omega t) + \\ + i(D_{4i} - D_{5i}) \sin(\omega t) + b_{9i} \int_0^t F_H(\tau) \{ \exp[k_{1i}(t-\tau)] - \exp[k_{2i}(t-\tau)] \} d\tau + \quad (3.26) \\ + b_{10i} \int_0^t F_H(\tau) \exp[\sigma(t-\tau)] \{ b_{11i} \sin(\omega t - \omega\tau) - b_{12i} \cos(\omega t + \omega\tau) \} d\tau,$$

где $b_{9i} = \left\{ (k_{1i} - k_{2i}) \left[(k_{1i} - \sigma)^2 + \omega^2 \right] \right\}^{-1}$, $b_{10i} = \left[\omega (b_{11i}^2 + b_{12i}^2) \right]^{-1}$, $\sigma = \frac{k_{3i} + k_{4i}}{2}$,
 $b_{11i} = k_{1i}k_{2i} - (k_{1i} + k_{2i})\sigma + \sigma^2 - \omega^2$, $b_{12i} = \omega(2\sigma - k_{1i} - k_{2i})$, $\omega = \left| \frac{k_{3i} - k_{4i}}{2i} \right|$.

Функция $G_2(\lambda_i, t)$ определяется из первого уравнения системы (3.22):

$$G_{2i} = \lambda_i^{-2} \frac{d^2 G_{1i}}{dt^2} + (1 + a_4) G_{1i} + \lambda_i^{-2} (1 + a_4) F_{1H}. \quad (3.27)$$

Подстановка выражений для трансформант (3.26), (3.27) в начальные условия (3.23) позволяет определить постоянные интегрирования $D_{2i} \dots D_{5i}$. При этом замечаем, что постоянные D_{4i}, D_{5i} являются комплексно – сопряженных числами.

В результате выражения для функций $U(r, t), \Theta(r, t)$ на основании равенств (3.9), (3.14), (3.19) имеют вид:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_1(\lambda_i, t) K(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}, \quad (3.28)$$

$$\Theta(r, t) = H_2(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) \nabla K(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}.$$

На заключительном этапе исследования функции $H_1(r, t), H_2(r, t)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - b_1 \frac{H_1}{r^2} + b_2 \frac{\partial H_2}{\partial r} + b_3 \frac{H_2}{r} = 0, \quad \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} = 0, \quad (3.29)$$

что позволяет существенно упростить правые части (F_1, F_2) расчетных соотношений (3.11).

Подстановка H_1, H_2 (3.9) в (3.29) позволяет сформировать уравнения относительно функций $f_1(r) \dots f_6(r)$, которые определяются при удовлетворении условий (3.10):

$$f_1(r) = b_{14} \left[(1+m)R^{m-1}r^{-m} - (1-m)R^{-m-1}r^m \right], \quad f_2(r) = b_{14} \left[(1+m)r^{-m} - (1-m)r^m \right],$$

$$f_3(r) = N_1 r^m + N_2 r^{-m} + \frac{2b_3 + (m^2 - 1)[b_2 + b_3 \ln(r)]}{\ln(R)(m^2 - 1)^2} r,$$

$$f_4(r) = N_3 r^m + N_4 r^{-m} - \left\{ \frac{2b_3 + (m^2 - 1)[b_2 + b_3 \ln(r)]}{\ln(R)(m^2 - 1)} + b_3 \right\} \frac{r}{(m^2 - 1)},$$

$$f_5(r) = \frac{\ln(r)}{\ln(R)}, \quad f_6(r) = 1 - \frac{\ln(r)}{\ln(R)},$$

где $m = \sqrt{b_1}$, $b_{13} = \left[(1+m)(R^{-m-1} - R^{m-1}) \right]^{-1}$, $b_{14} = b_{13}(1-m)^{-1}$,

$$V_1(r) = -\frac{r^{1-m}}{2m(1-m)\ln(R)} \left[b_2 + b_3 \ln(r) - \frac{b_3}{(1-m)} \right], \quad V_3(r) = -V_1(r) - \frac{b_3}{2m(1-m)} r^{1-m},$$

$$V_2(r) = \frac{r^{1+m}}{2m(1+m)\ln(R)} \left[b_2 + b_3 \ln(r) - \frac{b_3}{(1+m)} \right], \quad V_4(r) = -V_2(r) + \frac{b_3}{2m(1+m)} r^{1+m},$$

$$N_1 = b_{13} \left\{ (1+m)(V_1(R)R^{m-1} - V_1(1)R^{-m-1}) + (1-m)[V_2(R) - V_2(1)]R^{-m-1} + b_2 \right\},$$

$$N_3 = b_{13} \left\{ (1+m)(V_3(R)R^{m-1} - V_3(1)R^{-m-1}) + (1-m)[V_4(R) - V_4(1)]R^{-m-1} + b_2 \right\},$$

$$\{N_2, N_4\} = -\left[\{V_1(1), V_3(1)\} + \{N_1, N_3\} \right] \frac{(1+m)}{(1-m)} - \{V_2(1), V_4(1)\}.$$

Потенциал электрического поля пьезокерамического цилиндра определяется в результате интегрирования равенства (3.5) и удовлетворение предпоследнего граничного условия (3.2):

$$\begin{aligned} \phi = & \int \left[a_4 \frac{\partial H_1(r,t)}{\partial r} + a_5 \frac{H_1(r,t)}{r} + a_6 H_2(r,t) \right] dr + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} G_1(\lambda_i, t) B_1(\lambda_i) \|K_i\|^{-2} + a_6 \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) B_2(\lambda_i) \|K_i\|^{-2} + D_6(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

где
$$D_6(t) = - \left[\int \left[a_4 \frac{\partial H_1(r,t)}{\partial r} + a_5 \frac{H_1(r,t)}{r} + a_6 H_2(r,t) \right] dr + \sum_{i=1}^{\infty} G_1(\lambda_i, t) B_1(\lambda_i) \|K_i\|^{-2} + \right. \\ \left. + a_6 \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) B_2(\lambda_i) \|K_i\|^{-2} \right]_{r=R}, \quad B_1(\lambda_i) = \int \left[a_4 \frac{\partial K(\lambda_i, r)}{\partial r} + a_5 \frac{K(\lambda_i, r)}{r} \right] dr, \\ B_2(\lambda_i) = \int \nabla K(\lambda_i, r) dr.$$

Полученные расчетные соотношений (3.28), (3.30) удовлетворяют дифференциальные уравнения (3.1) и краевые условия (3.2), (3.3), т.е. представляют замкнутое решение рассматриваемой связанной задачи термоэлектроупругости.

3.3. Численный анализ

В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ($b = 0.02$ м, $R = 0.8$).

На внутренней поверхности ($r_* = a$) пьезокерамического цилиндра задана температура:

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_* \right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \omega_2^*(t_*) = 0, \quad (3.31)$$

где $H(\tilde{t})$ единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t}) = 1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t}) = 0$ при $\tilde{t} < 0$), $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, T_{\max}^* , t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373$ К (100 °С), $T_0 = 293$ К (20 °С), $t_{\max}^* = 1$ с).

На рисунках 3.1–3.4 представлены графики изменения функций $\Theta^*(r, t)$, $U(r, t)$, $E_r(r, t)$, $\phi(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты вре-

мени t . Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты, полученные при следующих значениях времени: $t = t_{\max}, 4t_{\max}, 15t_{\max}$ ($t_{\max} = \frac{\Lambda_*}{kb^2} t_{\max}^*$).

Анализ результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

– достаточно большая величина коэффициента линейного температурного расширения α_t пьезокерамического материала, приводит к быстрому прогреву цилиндра (рис. 3.1);

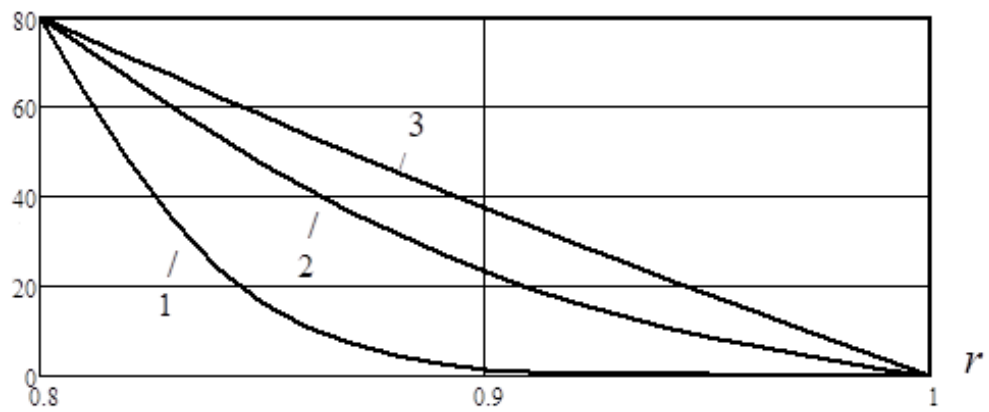
– время, соответствующее установившемуся температурному режиму при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода (рис. 3.1), существенно меньше, чем в случае учета конвекционного теплообмена (граничное условие 3 – рода) внешней цилиндрической поверхности с окружающей средой (рис. 2.3);

– более высокий коэффициент температуропроводности $\eta = \frac{\Lambda}{k}$ для пьезокерамики состава ПКР–35 приводит к некоторому, незначительному, росту скорости изменения температуры в цилиндре (рис. 3.1, графики 1,2);

– физико–механические характеристики пьезокерамик различных составов влияют не только количественно на величину перемещений, но также на характер деформирования электроупругого цилиндра. В конструкции изготовленного из состава PZT–4 в процессе деформирования наблюдается увеличение внутреннего и внешнего радиуса, а также толщины ее стенки. Однако в элементе состава PZT–5А наблюдается обратная картина, когда рост толщины стенки сопровождается уменьшением геометрических размеров конструкции. В элементе состава ПКР–35 в течение времени его внутренний радиус уменьшается, а внешний – увеличивается;

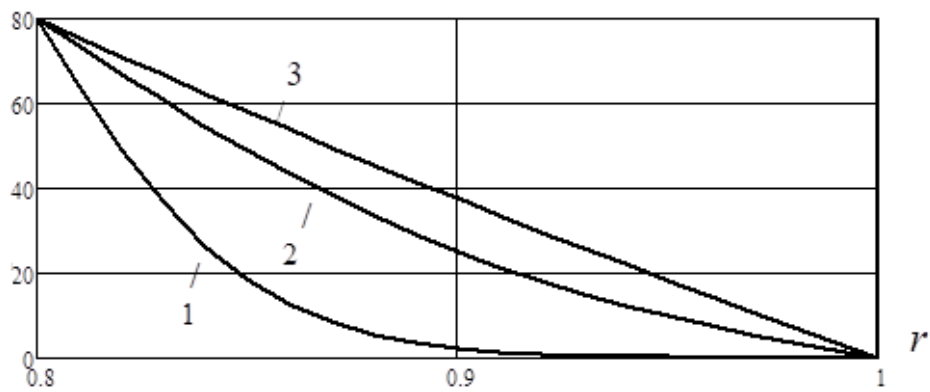
– наибольшее увеличение толщины стенки в результате нагрева наблюдаются в цилиндре изготовленного из пьезокерамики ПКР–35, обладающим высоким коэффициентом линейного температурного расширения;

$$\Theta^*(r,t), ^\circ C$$



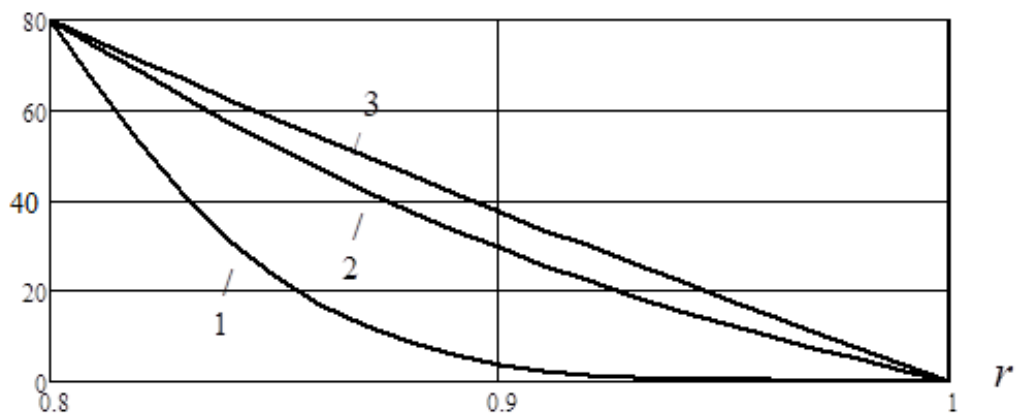
а) PZT-4

$$\Theta^*(r,t), ^\circ C$$



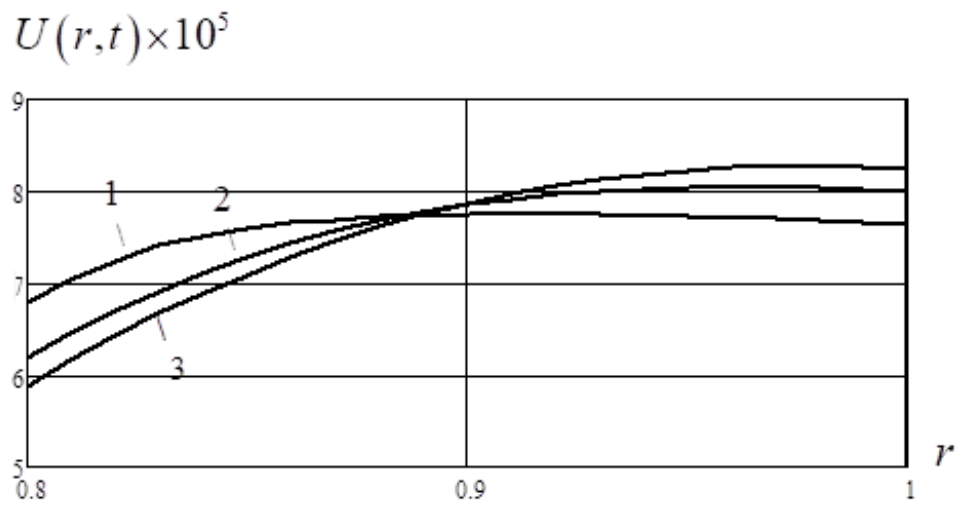
б) PZT-5A

$$\Theta^*(r,t), ^\circ C$$

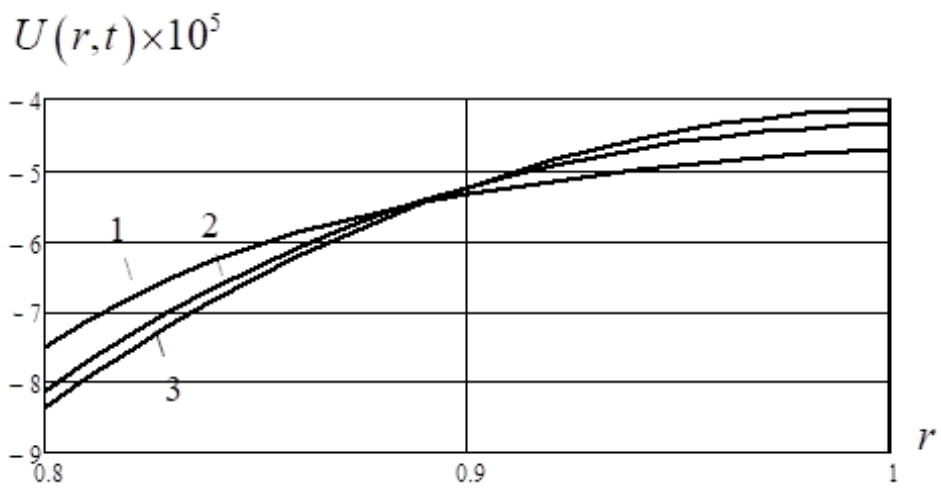


в) ПКР-35

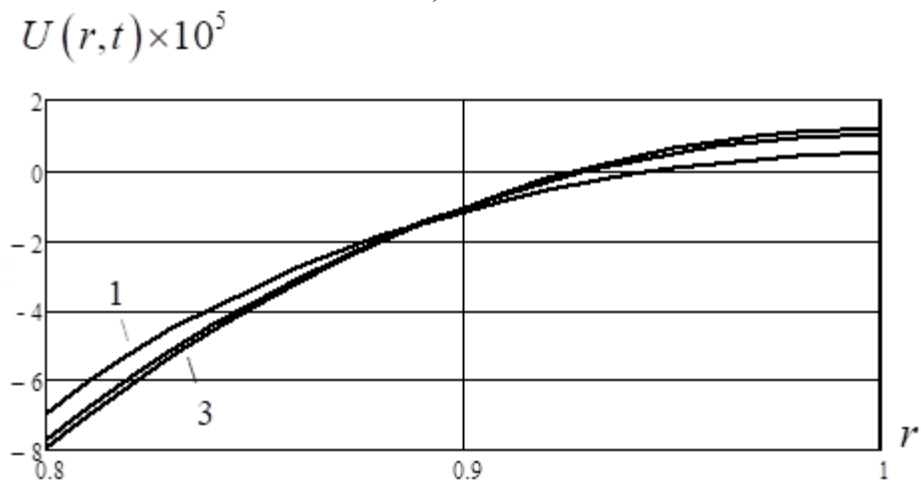
Рис. 3.1. Графики изменения $\Theta^*(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t (1- t_{\max} , 2- $4t_{\max}$, 3- $15t_{\max}$)



а) PZT-4



б) PZT-5A

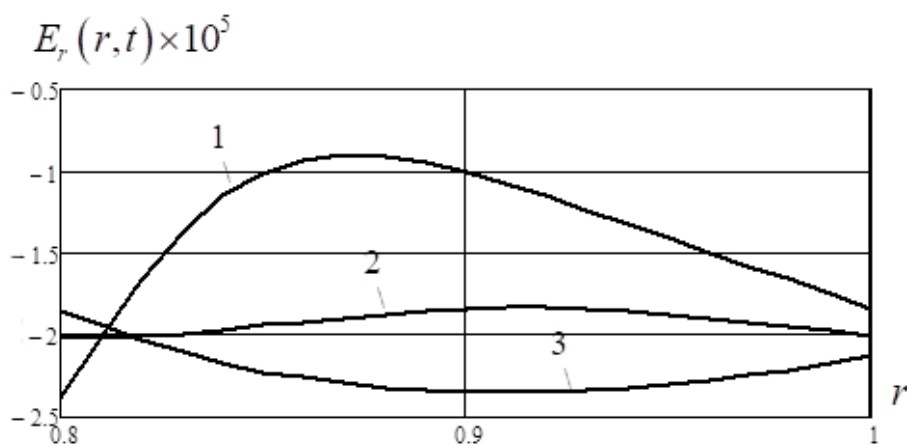


в) ПКР-35

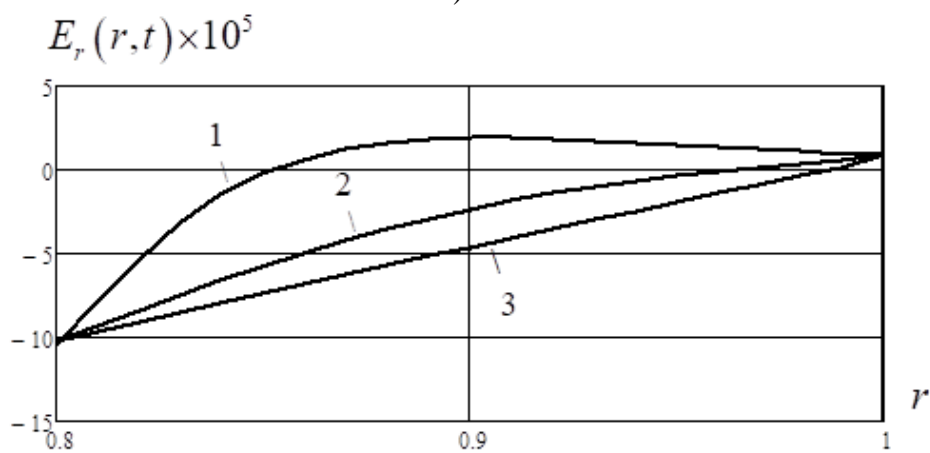
Рис. 3.2. Графики изменения $U(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t ($1-t_{\max}$, $2-4t_{\max}$, $3-15t_{\max}$)

– радиальная компонента напряженности электрического поля $E_r(r, t)$ при $t = t_{\max}$ имеет наибольшее значение на участке $0.85 < r < 0.9$. При этом в цилиндре индуцируется неоднородное электрическое поле;

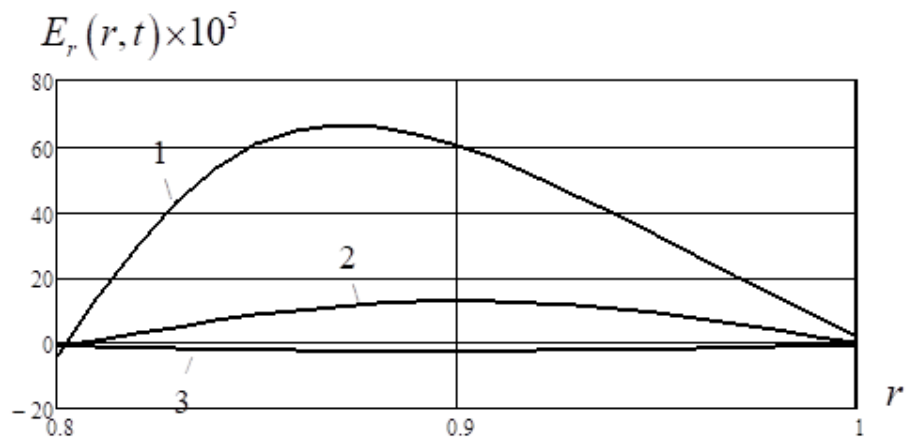
– потенциал электрического поля $\phi(r, t)$, а также электрическое напряжение $V(t)$ вследствие более равномерного прогрева конструкции и роста перемещений в течение времени увеличивается по абсолютной величине для конструкции составов PZT–4, PZT–5A. Обратная картина наблюдается для электроупругой системы из составов ПКР–35;



а) PZT–4

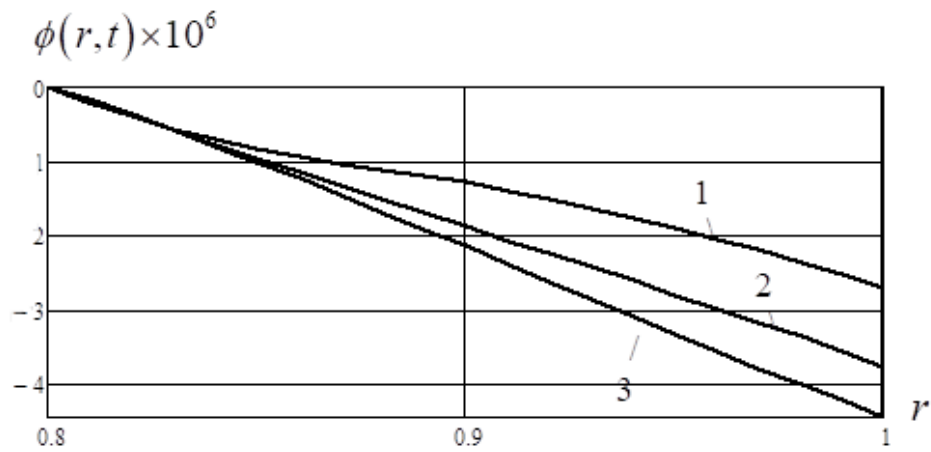


б) PZT–5A

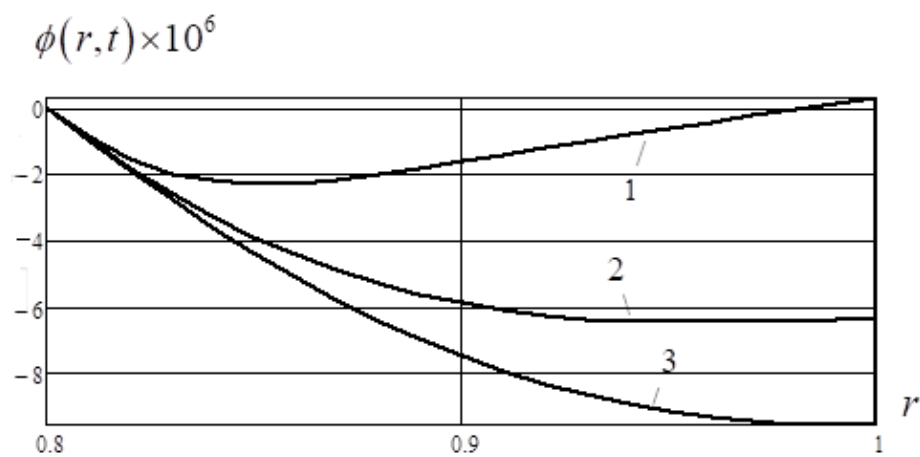


в) ПКР-35

Рис. 3.3. Графики изменения $E_r(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t (1- t_{\max} , 2- $4t_{\max}$, 3- $15t_{\max}$)



а) PZT-4



б) PZT-5A

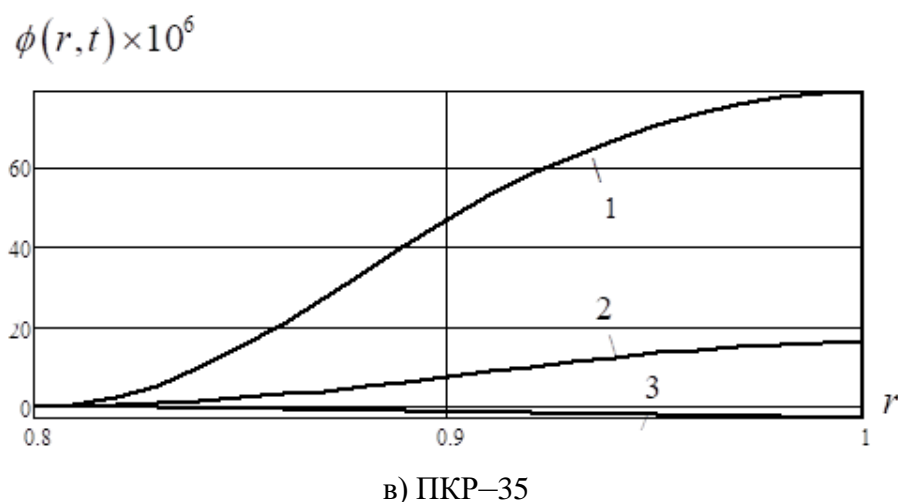
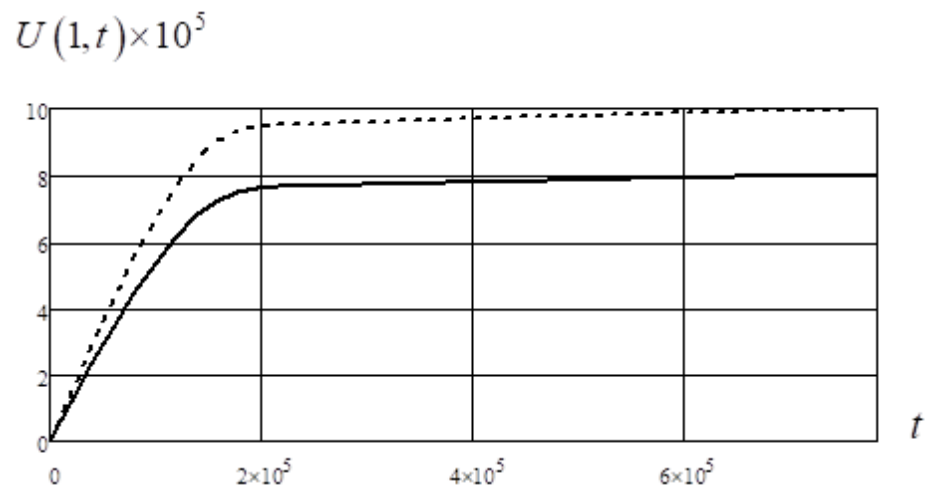


Рис. 3.4. Графики изменения $\phi(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t ($1-t_{\max}$, $2-4t_{\max}$, $3-15t_{\max}$)

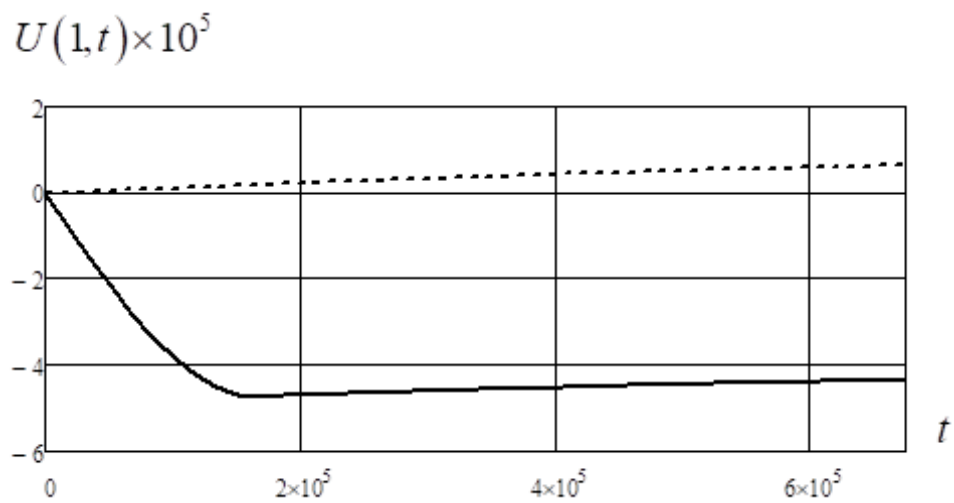
– компоненты электрического поля (рис.3.3, 3.4) при использовании пьезокерамики составов PZT–4, PZT–5A имеют один «знак», а для состава ПКР–35 противоположный.

Связанность термоэлектростатических полей наиболее удобно проанализировать с помощью коэффициента $b_{7i} = \frac{\lambda^2}{\beta} \left(1 + a_4 + \frac{a_8}{a_7} \right)$ равенства (3.25). Здесь a_4 определяет связанность электростатических полей, а $\frac{a_8}{a_7}$ – влияние скорости изменения объема тела на его температурное поле.

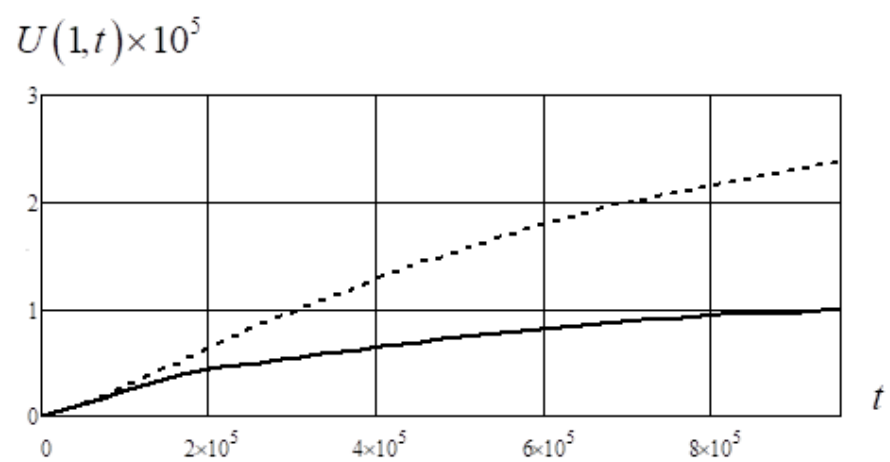
На рисунке 3.5 представлены графики изменения перемещений $U(1, t)$ по времени t с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) наведенного электрического поля.



а) PZT-4



б) PZT-5A



в) ПКР-35

Рис. 3.5. Графики изменения $U(1,t)$ пьезокерамического цилиндра по времени

(сплошная линия – с учетом поляризации, пунктирная – без учета электрического поля)

Следует отметить, что предварительная поляризация пьезокерамики приводит к образованию более «жесткого» материала (PZT-4 – $a_4 = 0.353$, PZT-5A – $a_4 = 0.175$, ПКР-35 – $a_4 = 2.098$). Это приводит при использовании составов PZT-4, ПКР-35 к уменьшению перемещений (рис.3.5, а, в), а при применении состава PZT-5A к качественному изменению картины деформирования (рис. 3.5, б).

Влиянием электроупругого поля на температуру в пьезокерамическом цилиндре в рассматриваемой задаче можно пренебречь за счет малого значения

$$\frac{a_8}{a_7} = 1.8 \times 10^{-4} \ll 1.$$

Преимущество представленного алгоритма расчета связанной задачи заключается в том, что в отличие от несвязанной постановки задачи отпадает необходимость аппроксимации функции температуры при исследовании уравнения движения и электростатики. При этом действительно влиянием скорости изменения объема пьезокерамического тела на его температурное поле можно пренебречь.

Таким образом, можно сделать вывод, что построенное решение о радиальных колебаниях длинного цилиндра при использовании граничных условий, не зависящих от аксиальной координаты, справедливо при произвольном закреплении торцевых поверхностей рассматриваемого элемента.

ГЛАВА 4

СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА (ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1 – ГО И 3 – ГО РОДА)

Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной задачи термоэластостатики для длинного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра. Рассматривается случай, когда задана температура внутренней цилиндрической поверхности при известном законе конвекционного теплообмена на внешней лицевой стенке (граничные условия теплопроводности 1–го и 3–го родов). Электродированные поверхности цилиндра подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением.

Исследуется задача, в которой скорость изменения температурной нагрузки не оказывает влияние на инерционные характеристики упругой системы, что позволяет включить в исходные линейные расчетные соотношения уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности относительно радиальной компоненты вектора перемещений, электрического потенциала, а также функции изменения температурного поля.

Решение задачи осуществляется с помощью обобщенного метода биортогонального конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор–функций двух однородных краевых задач. Структурный алгоритм данного подхода позволяет выделить сопряженный оператор, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно–деформированное состояние, термоэлектрические поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном внешнем

воздействии. Подключение электроупругой системы к измерительному прибору позволяет измерить электрическое напряжение.

4.1. Постановка задачи

Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область $\Omega: \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. Температура на его внутренней ($r_* = a$) цилиндрической поверхности задана с помощью функции $\omega_1^*(t_*)$ (граничное условие 1-го рода), а на внешней ($r_* = b$) лицевой поверхности задан закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3-го рода) и известна температура окружающей среды \mathcal{G}^* .

Внутренняя электродированная поверхность заземлена, а внешняя подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением.

В общем случае система дифференциальных уравнений термоэлектроупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} = 0, \quad (4.1)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Theta + a_7 \nabla U - a_8 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi_{|r=R} = 0, \quad \Theta_{|r=R} = \omega_1, \quad (4.2)$$

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \Theta \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{10} \Theta \right)_{|r=1} = a_{10} \mathcal{G};$$

$$t = 0 \quad U = \phi = \Theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0; \quad (4.3)$$

где $\{U, r, R\} = \{U^*, r_*, a\} / b$, $\{\Theta, \omega_1, \mathcal{G}\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\mathcal{G}^* - T_0)\}$,

$$\phi = \frac{e_{33}}{C_{33}b} \phi^*, \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\epsilon_{33}},$$

$$a_5 = \frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\epsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3 e_{33}}{\epsilon_{33}\gamma_{33}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}^2 T_0}{C_{33}k}, \quad a_8 = \frac{\gamma_{33}g_3 T_0}{e_{33}k}, \quad a_9 = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad a_{10} = \alpha \frac{b}{\Lambda},$$

$$\beta = \beta_{rel} \frac{\Lambda}{kb^2}, \quad \dot{\Theta}_0 = \frac{d\omega_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} \delta(r-R), \quad \alpha - \text{коэффициент теплоотдачи.}$$

Расчетные соотношения (4.2) учитывают отсутствие механических напряжений на цилиндрических поверхностях, заземление внутренней ($r = R$) и подключение к измерительному прибору внешней ($r = 1$) электродированных поверхностей, а также граничные условия теплопроводности.

Принимая во внимание заземление металлической подложки, напряжение холостого хода $V(t_*)$ определяется потенциалом электрического поля на внешней поверхности цилиндра:

$$V(t_*) = \phi(1, t_*). \quad (4.4)$$

Расчетные соотношения (4.1) – (4.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой задачи.

4.2. Построение общего решения

На первом этапе решения выполняется процедура приведения расчетных соотношений (4.1) – (4.3) к виду, позволяющему в дальнейшем использовать метод конечных биортогональных интегральных преобразований [48]. Для этого вводятся новые функции $u(r, t)$, $\chi(r, t)$, $\psi(r, t)$ связанные с $U(r, t)$, $\phi(r, t)$, $\Theta(r, t)$ следующими соотношениями:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + u(r, t), \quad \phi(r, t) = H_2(r, t) + \chi(r, t), \quad (4.5)$$

$$\Theta(r, t) = H_3(r, t) + \psi(r, t),$$

где $\{H_1, H_2, H_3\} = \{f_1(r), f_2(r), f_3(r)\} \omega_1(t) + \{f_4(r), f_5(r), f_6(r)\} \mathcal{G}$,

Подстановка (4.5) в (4.1) – (4.3) при удовлетворении условий

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_9 \frac{H_1}{r} + \frac{\partial H_2}{\partial r} - H_3 = 0, \quad H_{2|r=R} = 0 \quad H_{3|r=R} = \omega_1, \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{H_1}{r} - a_6 H_3 \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial H_3}{\partial r} + a_{10} H_3 \right)_{|r=1} = a_{10} \mathcal{G},$$

позволяет получить краевую задачу относительно функций $u(r, t)$, $\chi(r, t)$, $\psi(r, t)$ с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial u}{\partial r} - a_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \nabla \psi + a_3 \frac{\psi}{r} = R_1, \quad (4.7)$$

$$-\nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + a_6 \nabla \psi = R_2,$$

$$\nabla \frac{\partial \psi}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\psi + a_7 \nabla u - a_8 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = R_3 ;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + a_9 \frac{u}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} - \psi = 0, \quad \chi_{|r=R} = 0, \quad \psi_{|r=R} = 0, \quad (4.8)$$

$$\left(-\frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{u}{r} + a_6 \psi \right)_{|r=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + a_{10} \psi \right)_{|r=1} = 0;$$

$$t = 0 \quad \{u, \chi, \psi\} = \{u_0, \chi_0, \psi_0\}, \quad \frac{\partial \{u, \chi, \psi\}}{\partial t} = \{\dot{u}_0, \dot{\chi}_0, \dot{\psi}_0\}; \quad (4.9)$$

$$\text{где } R_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \nabla H_3 - a_3 \frac{H_3}{r},$$

$$R_2 = \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_6 \nabla H_3,$$

$$R_3 = -\nabla \frac{\partial H_3}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(H_3 + a_7 \nabla H_1 - a_8 \frac{\partial H_2}{\partial r} \right),$$

$$\{u_0, \chi_0, \psi_0\} = -\{H_1, H_2, H_3\}, \quad \{\dot{u}_0, \dot{\chi}_0\} = -\frac{\partial \{H_1, H_2\}}{\partial t}, \quad \dot{\psi}_0 = \dot{\Theta}_0 - \frac{\partial H_3}{\partial t}.$$

Начально–краевую задачу (4.7)–(4.9) решаем, используя структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [48]. Для этого вводим на сегменте $[R, 1]$ КИП с неизвестными компонентами собственных вектор–функций ядер преобразований $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r)$, $N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$:

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 \left(\psi(r, t) + a_7 \nabla u(r, t) - a_8 \frac{\partial \chi(r, t)}{\partial r} \right) K_3(\lambda_i, r) r dr, \quad (4.10)$$

$$\{u(r,t), \chi(r,t), \psi(r,t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^{-2},$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K_3(\lambda_i, r) N_3(\mu_i, r) r dr,$$

где λ_i, μ_i – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_i, r)$ и инвариантных $N_k(\mu_i, r)$ компонент вектор–функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

Особенность данного преобразования заключается в том, что трансформанта и формулы обращения (4.10) содержат различные ядровые вектор–функции $K_k(\lambda_{in}, z)$, $N_k(\mu_{in}, z)$.

Согласно процедуре преобразования умножаем первое уравнение (4.7) на $rK_1(\lambda_i, r)$, второе и третье уравнения (4.7) соответственно $rK_2(\lambda_i, r)$, $rK_3(\lambda_i, r)$, а начальные условия (4.9), преобразованные согласно (4.10), на $rK_3(\lambda_i, r)$. Выполняя затем интегрирование в интервале $[R, 1]$ и складывая полученные уравнения имеем:

$$\Phi(u, \chi, \psi, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}) \Big|_R^1 + \int_R^1 (uL_1 + \chi L_2 + \psi L_3) dr - \frac{dG(\lambda_{in}, n, t)}{dt} - \beta \frac{d^2 G(\lambda_{in}, n, t)}{dt^2} = R_H, \quad (4.11)$$

$$t=0 \quad G(\lambda_i, 0) = G_0(\lambda_i), \quad \frac{\partial G(\lambda_i, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{G}_0(\lambda_i). \quad (4.12)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(\psi, u, \chi, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}) \Big|_R^1 = & r \frac{\partial u}{\partial r} K_{1i} - ur \frac{dK_{1i}}{dr} + r \frac{\partial \chi}{\partial r} K_{1i} - \\ & - \chi r \frac{dK_{1i}}{dr} - a_2 \chi K_{1i} - r \psi K_{1i} - r \frac{\partial \chi}{\partial r} K_{2i} + \chi r \frac{dK_{2i}}{dr} + a_4 r \frac{\partial u}{\partial r} K_{2i} - \\ & - a_4 ur \frac{dK_{2i}}{dr} + a_3 u K_{2i} + a_6 r \psi K_{2i} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} K_{3i} - \psi r \frac{dK_{3i}}{dr}, \end{aligned}$$

$$L_1 = r \frac{d^2 K_{1i}}{dr^2} + \frac{dK_{1i}}{dr} - a_1 \frac{K_{1i}}{r} + a_4 \left(r \frac{d^2 K_{2i}}{dr^2} + \frac{dK_{2i}}{dr} \right) - a_5 \frac{dK_{2i}}{dr},$$

$$L_2 = \frac{d^2 K_{1i}}{dr^2} + \frac{dK_{1i}}{dr} + a_2 \frac{dK_{1i}}{dr} - r \frac{d^2 K_{2i}}{dr^2} - \frac{dK_{2i}}{dr},$$

$$L_3 = a_3 K_{1i} + r \frac{dK_{1i}}{dr} - a_6 r \frac{dK_{2i}}{dr} + r \frac{d^2 K_{3i}}{dr^2} + \frac{dK_{3i}}{dr},$$

$$R_H(\lambda_i, t) = \int_R^1 (R_1 K_{1i} + R_2 K_{2i} + R_3 K_{3i}) r dr,$$

$$G_0 = \int_R^1 \left(\psi_0 + a_7 \nabla u_0 - a_8 \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \right) K_{3i} r dr, \quad \dot{G}_0 = \int_R^1 \left(\dot{\psi}_0 + a_7 \nabla \dot{u}_0 - a_8 \frac{\partial \dot{\chi}_0}{\partial r} \right) K_{3i} r dr.$$

Использование первого условия алгоритма решения в виде операционного свойства:

$$\begin{aligned} & \Phi(u, \chi, \psi, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}) \Big|_R^1 + \int_R^1 (uL_1 + \chi L_2 + \psi L_3) dr = \\ & = -\lambda_i^2 \int_R^1 \left(\psi + a_7 \nabla u - a_8 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) K_{3i} r dr \end{aligned} \quad (4.13)$$

позволяет получить счетное множество задач для трансформанты $G(\lambda_i, t)$:

$$\beta \frac{d^2 G_i}{dt^2} + \frac{dG_i}{dt} + \lambda_i^2 G_i = -R_H, \quad (4.14)$$

$$t=0 \quad G_{i|t=0} = G_0, \quad \frac{dG_i}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{G}_0; \quad (4.15)$$

решение которых имеет вид:

$$\begin{aligned} G(\lambda_i, t) = & (m_{1i} - m_{2i})^{-1} \left\{ (\dot{G}_0 - G_0 m_{2i}) \exp(m_{1i} t) - (\dot{G}_0 - G_0 m_{1i}) \exp(m_{2i} t) + \right. \\ & \left. + \beta^{-1} \int_0^t R_H(\lambda_i, \tau) \left[\exp(m_{2i}(t - \tau)) - \exp(m_{1i}(t - \tau)) \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где m_{1i}, m_{2i} – корни характеристического уравнения: $\beta m_i^2 + m_i + \lambda_i^2 = 0$.

Преобразование (4.13) к следующему виду:

$$\left[\Phi(u, \chi, \psi, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}) + \lambda_i (a_7 u - a_8 \chi) r K_{3i} \right]_R^1 + \int_R^1 (u L_1 + \chi L_2 + \psi L_3) dr = -\lambda_i^2 \int_R^1 \left(\psi K_{3i} - a_7 u \frac{dK_{3i}}{dr} + a_8 \chi \nabla K_{3i} \right) r dr,$$

при выполнении условия отсутствия внеинтегральных членов в данном равенстве

$$\left[\Phi(u, \chi, \psi, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}) + \lambda_i^2 (a_7 u - a_8 \chi) r K_{3i} \right]_R^1 = 0,$$

формирует однородную краевую задачу относительно неизвестных компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), K_3(\lambda_i, r)$:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dK_{1i}}{dr} - a_1 \frac{K_{1i}}{r^2} + a_4 \nabla \frac{dK_{2i}}{dr} - a_5 \frac{1}{r} \frac{dK_{2i}}{dr} - \lambda_i^2 a_7 \frac{dK_{3i}}{dr} &= 0, \\ -\nabla \frac{dK_{2i}}{dr} + \nabla \frac{dK_{1i}}{dr} + a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_{1i}}{dr} + \lambda_i^2 a_8 \nabla K_{3i} &= 0, \\ \nabla \frac{dK_{3i}}{dr} + \frac{dK_{1i}}{dr} + a_3 \frac{K_{1i}}{r} - a_6 \frac{dK_{2i}}{dr} + \lambda_i^2 K_{3i} &= 0; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} r = R, 1 \quad \frac{dK_{1i}}{dr} + a_9 \frac{K_{1i}}{r} + a_4 \frac{dK_{2i}}{dr} - \lambda_i^2 a_7 K_{3i} &= 0, \quad K_{2i|r=R} = K_{3i|r=R} = 0, \\ \left(-\frac{dK_{2i}}{dr} + \frac{dK_{1i}}{dr} + a_2 \frac{K_{1i}}{r} + \lambda_i^2 a_8 K_{3i} \right)_{|r=1} &= 0, \quad \left(\frac{dK_{3i}}{dr} + a_{10} K_{3i} \right)_{|r=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

По описанной выше процедуре применим к системе уравнений (4.17) КИП с неизвестными компонентами ядра $N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)$. Здесь также используются операционное свойство:

$$\begin{aligned} \Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}) \Big|_R^1 + \int_R^1 (K_{1i} L_4 + K_{2i} L_5 + K_{3i} L_6) r dr &= \\ = -\mu_i^2 \int_R^1 \left(N_{3i} + a_7 \nabla N_{1i} - a_8 \frac{dN_{2i}}{dr} \right) K_{3i} r dr, \end{aligned} \quad (4.19)$$

и равенства нулю внеинтегральных членов:

$$\Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}) \Big|_R^1 = 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
& \Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}) \Big|_R = r \frac{dK_{1i}}{dr} N_{1i} - K_{1i} r \frac{dN_{1i}}{dr} + \\
& + a_4 \left(r \frac{dK_{2i}}{dr} N_{1i} - K_{2i} r \frac{dN_{1i}}{dr} \right) - a_5 K_{2i} N_{1i} - \\
\text{где} & - r \frac{dK_{2i}}{dr} N_{2i} + K_{2i} r \frac{dN_{2i}}{dr} + r \frac{dK_{1i}}{dr} N_{2i} - K_{1i} r \frac{dN_{2i}}{dr} + a_2 K_{1i} N_{2i} + \\
& + r \frac{dK_{3i}}{dr} N_{3i} - K_{3i} r \frac{dN_{3i}}{dr} + K_{1i} r N_{3i} - a_6 K_{2i} r N_{3i} - \lambda_i^2 (a_7 N_{1i} - a_8 N_{2i}) r K_{3i}, \\
& L_4 = \nabla \frac{dN_{1i}}{dr} - a_1 \frac{N_{1i}}{r^2} + \nabla \frac{dN_{2i}}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{dN_{2i}}{dr} - \nabla N_{3i} + a_3 \frac{N_{3i}}{r}, \\
& L_5 = -\nabla \frac{dN_{2i}}{dr} + a_4 \nabla \frac{dN_{1i}}{dr} + a_5 \frac{1}{r} \frac{dN_{1i}}{dr} + a_6 \nabla N_{3i}, \quad L_6 = \nabla \frac{dN_{3i}}{dr}.
\end{aligned}$$

Условия (4.19), (4.20) позволяют получить однородную краевую задачу относительно компонент ядра $N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)$:

$$\begin{aligned}
& \nabla \frac{dN_{1i}}{dr} - a_1 \frac{N_{1i}}{r^2} + \nabla \frac{dN_{2i}}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{dN_{2i}}{dr} - \nabla N_{3i} + a_3 \frac{N_{3i}}{r} = 0, \quad (4.21) \\
& -\nabla \frac{dN_{2i}}{dr} + a_4 \nabla \frac{dN_{1i}}{dr} + a_5 \frac{1}{r} \frac{dN_{1i}}{dr} + a_6 \nabla N_{3i} = 0, \\
& \nabla \frac{dN_{3i}}{dr} + \mu_i^2 \left(N_{3i} + a_7 \nabla N_{1i} - a_8 \frac{dN_{2i}}{dr} \right) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r = R, 1 \quad & \frac{dN_{1i}}{dr} + a_9 \frac{N_{1i}}{r} + \frac{dN_{2i}}{dr} - N_{3i} = 0, \quad N_{2i|_{r=R}} = 0, \quad N_{3i|_{r=R}} = 0, \quad (4.22) \\
& \left(-\frac{dN_{2i}}{dr} + a_4 \frac{dN_{1i}}{dr} + a_5 \frac{N_{1i}}{r} + a_6 N_{3i} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad \left(\frac{dN_{3i}}{dr} + a_{10} N_{3i} \right) \Big|_{r=1} = 0.
\end{aligned}$$

В уравнении теплопроводности (4.7) перераспределение тепла в теле при малых значениях коэффициентов a_7, a_8 происходит за счет учета скоростей изменения его объема и напряженности электрического поля. Это позволяет сделать вывод, что связанность термоупругих полей в большей степени оказывает влияние на трансформанту нагрузки $G(\lambda_i, t)$ и незначительно на форму функций $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$ [67, 68]. Учитывая данный факт при решении систем (4.17), (4.21) принимаем значения $a_7 = a_8 = 0$ и в результате получаем следующие выражения функций $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$:

$$K_1(\lambda_i, r) = D_{1i} + D_{2i}r^A + D_{3i}r^{-A}, \quad (4.22)$$

$$K_2(\lambda_i, r) = D_{1i}a_{11} \ln(r) + D_{2i}a_{12}r^A + D_{3i}a_{13}r^{-A} + D_{6i},$$

$$K_3(\lambda_i, r) = D_{1i}a_{14}Q_{0,0}(\lambda_i r) + D_{2i}a_{15}Q_{0,A}(\lambda_i r) + D_{3i}a_{16}Q_{0,-A}(\lambda_i r) + D_{4i}J_0(\lambda_i r) + D_{5i}Y_0(\lambda_i r),$$

$$N_1(\mu_i, r) = E_{1i}r^A + E_{2i}r^{-A} + E_{3i}V_{i,1}(r) + E_{4i}V_{i,2}(r) + E_{5i}a_{17},$$

$$N_2(\mu_i, r) = E_{1i}a_{18}r^A + E_{2i}a_{19}r^{-A} + E_{3i}V_{i,3}(r) + E_{4i}V_{i,4}(r) + E_{5i}a_{20} \ln(r) + E_{6i},$$

$$N_3(\mu_i, r) = E_3J_0(\mu_i r) + E_4Y_0(\mu_i r),$$

где
$$V_{i,m}(r) = \frac{1}{2A} \left[r^A \int F_{i,m}(r) r^{-A} dr - r^{-A} \int F_{i,m}(r) r^A dr \right] \quad (m=1,2),$$

$$V_{i,3}(r) = \int \left[a_4 \frac{dV_{i,1}(r)}{dr} + a_5 r^{-1} V_{i,1}(r) + a_6 J_0(\mu_i r) \right] dr,$$

$$V_{i,4}(r) = \int \left[a_4 \frac{dV_{i,2}(r)}{dr} + a_5 r^{-1} V_{i,2}(r) + a_6 Y_0(\mu_i r) \right] dr,$$

$$F_{i,m} = (1+a_4)^{-1} \left[(1-a_6 + a_2 a_6 - a_3) \frac{Z_0(\mu_i r)}{r} + (1-a_6) \frac{dZ_0(\mu_i r)}{dr} \right],$$

$$m=1 \quad Z_0(\mu_i r) = J_0(\mu_i r), \quad m=2 \quad Z_0(\mu_i r) = Y_0(\mu_i r),$$

$$A^2 = (a_1 + a_2 a_5)(1+a_4)^{-1}, \quad a_{11} = -a_1 a_5^{-1}, \quad a_{12} = a_2 A^{-1} + 1, \quad a_{13} = a_2 A^{-1} - 1,$$

$$a_{14} = -(a_1 a_6 a_5^{-1} + a_3), \quad a_{15} = a_2 a_6 - a_3 + A(a_6 - 1), \quad a_{16} = a_2 a_6 - a_3 - A(a_6 - 1),$$

$$a_{17} = a_2 \left[(1-A^2)(1+a_4) \right]^{-1}, \quad a_{18} = a_5 A^{-1} + a_4, \quad a_{19} = a_5 A^{-1} - a_4, \quad a_{20} = 1 + a_5 a_{17}.$$

В равенствах (4.22) $J_0(\dots), Y_0(\dots)$ – обыкновенные функции Бесселя 1–го и 2–го родов нулевого порядка, $Q_{0,\chi}(\dots)$ – неэлементарные функции Ломмеля ($\chi = -A, 0, A$) [28], $D_{1i} \dots D_{6i}, E_{1i} \dots E_{6i}$ – постоянные интегрирования.

Подстановка $K_1(\lambda_i, r) \dots K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r) \dots N_3(\mu_i, r)$ в соответствующие граничные условия (4.18), (4.22) формирует две системы алгебраических уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования $D_{1i} \dots D_{6i}, E_{1i} \dots E_{6i}$ и собственные значения λ_i, μ_i .

Окончательные выражения функций $U(r,t)$, $\phi(r,t)$, $\Theta(r,t)$ получим, применяя к трансформанте (4.16) формулы обращения (4.10). В результате, с учетом (4.5), имеем:

$$U(r,t) = H_1(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_i,t)N_1(\mu_i,r)}{\|K_i\|^2}, \quad (4.23)$$

$$\phi(r,t) = H_2(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_i,t)N_2(\mu_i,r)}{\|K_i\|^2},$$

$$\Theta(r,t) = H_3(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_i,t)N_3(\mu_i,r)}{\|K_i\|^2}.$$

Полученные выражения являются сходящимися в силу полноты систем функций $[K_m(\lambda_i,r), N_m(\mu_i,r)]_{i=1}^{\infty}$ на интервале $z \in [R,1]$.

Функции $H_1(r,t) \dots H_3(r,t)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений

$$-\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \nabla H_3 - a_3 \frac{H_3}{r} = 0, \quad (4.24)$$

$$\nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_6 \nabla H_3 = 0, \quad \nabla \frac{\partial H_3}{\partial r} = 0.$$

что позволяет существенно упростить правые части расчетных соотношений (4.7). В результате подстановки выражений $H_1 \dots H_3$ в (4.24) формируются две системы уравнений относительно $f_1(r) \dots f_3(r)$ и $f_4(r) \dots f_6(r)$. Их решение, при удовлетворении условий (4.6), позволяет определить функции $H_1 \dots H_3$.

4.3. Численный анализ результатов

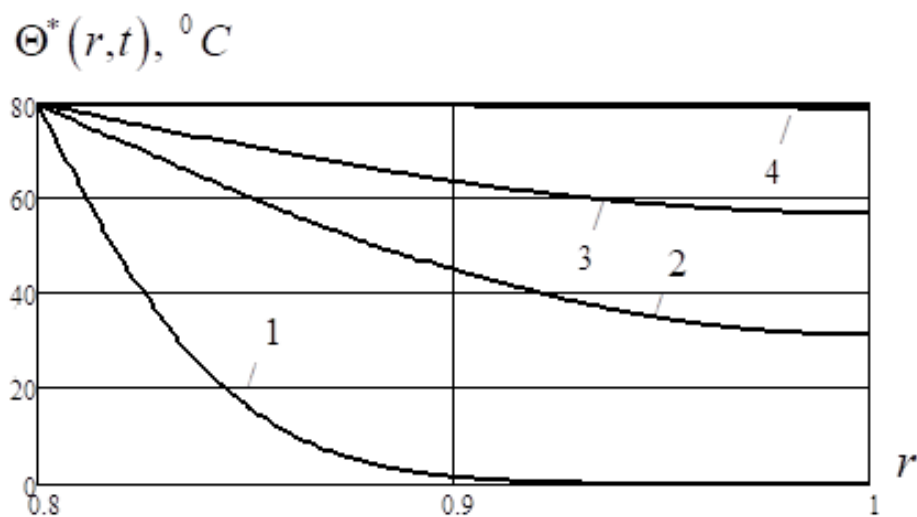
В качестве примера рассматривается случай действия на внутренней поверхности ($r_* = a$) цилиндра ($b = 0.02$ м, $R = 0.8$), выполненного из пьезокерамического материала различных составов (таблица 1.1), температурной нагрузки в виде:

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[\sin(\theta t_*) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad (4.25)$$

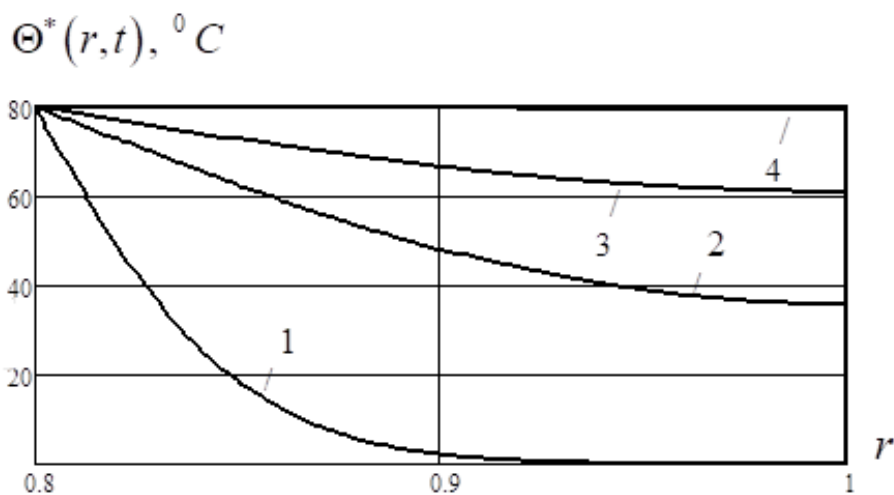
где $H(\tilde{t})$ – единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t})=1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t})=0$ при $\tilde{t} < 0$), $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, T_{\max}^*, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373 \text{ K}$ ($100 \text{ } ^\circ\text{C}$), $T_0 = 293 \text{ K}$ ($20 \text{ } ^\circ\text{C}$), $t_{\max}^* = 1 \text{ с}$), $\theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}$.

На рисунке 4.1 представлены графики изменения функций $\Theta^*(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t . Цифрами 1–4 соответственно обозначены результаты, полученные при следующих значениях времени:

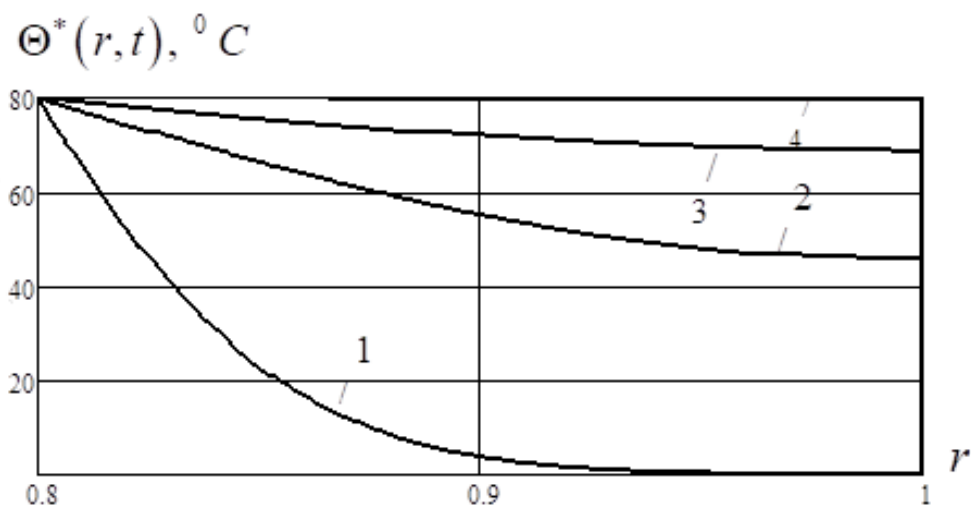
$$t = t_{\max}, 10t_{\max}, 20t_{\max}, 100t_{\max} \quad (t_{\max} = \frac{\Lambda_*}{kb^2} t_{\max}^*).$$



а) PZT–4



б) PZT-5A



в) ПКР-35

Рис. 4.1. Изменение температурного поля цилиндра ($R = 0.8$) в различные моменты времени:

$$t = t_{\max}, 10t_{\max}, 20t_{\max}, 100t_{\max} \quad (t_{\max} = \frac{\Lambda_*}{kb^2} t_{\max}^*)$$

Анализ численных результатов расчета приращения температуры в несвязанной (глава 2) и связанной постановке позволяет сделать вывод, что скорость изменения объема тела и напряженности электрического поля не оказывают влияние на изменение температурного поля в пьезокерамическом цилиндре (рисунки 4.1, 2.2). Для определения данной функции можно использовать решение несвязанной задачи.

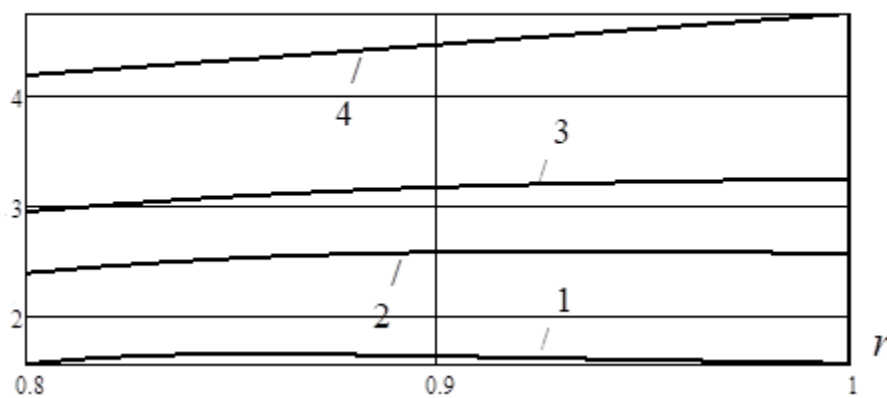
На рисунках 4.2 – 4.6 показаны графики изменения функций $U(r,t)$, $\phi(r,t)$, $\sigma_{rr}(r,t)$, $\sigma_{\theta\theta}(r,t)$, $E_r(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты

ты времени t . Цифрами 1–4 соответственно обозначены результаты, полученные при следующих значениях времени: $t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$.

Численный анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

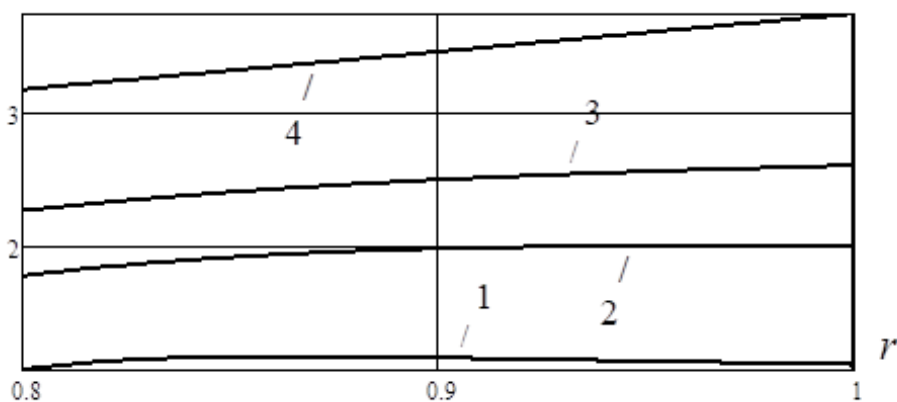
- изменение температурного поля в течение времени за счет линейного температурного расширения материала приводит к росту перемещений и увеличению толщины стенки цилиндра;
- радиальные перемещения цилиндра состава ПКР –35 существенно больше по сравнению с другими пьезокерамическими элементами (PZT– 4, PZT– 5A) за счет более высокого коэффициента линейного температурного расширения α_i ;

$$U^*(r,t) \times 10^6, \text{ м}$$

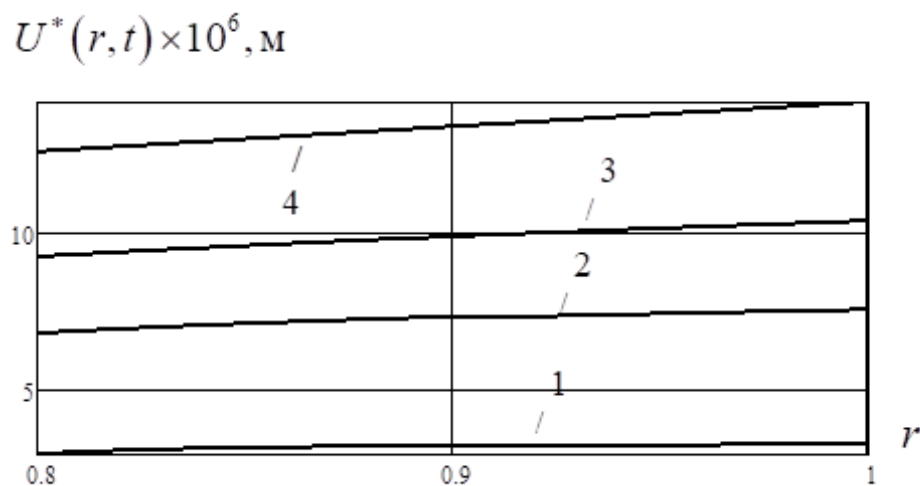


а) PZT– 4

$$U^*(r,t) \times 10^6, \text{ м}$$



б) PZT– 5A

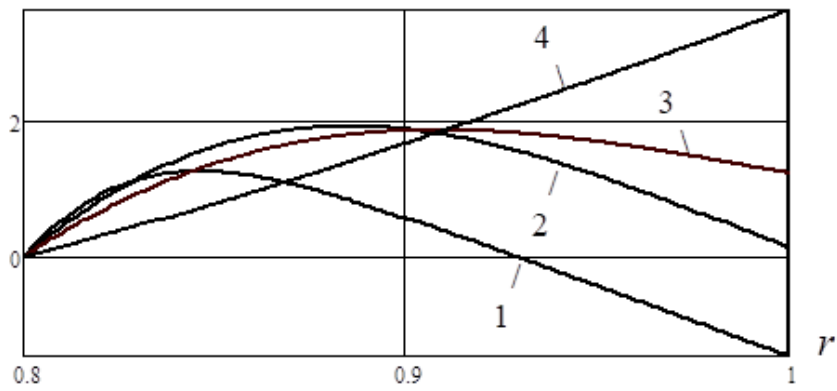


в) ПКР –35

Рис. 4.2. Графики изменения функций $U(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени: $t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$

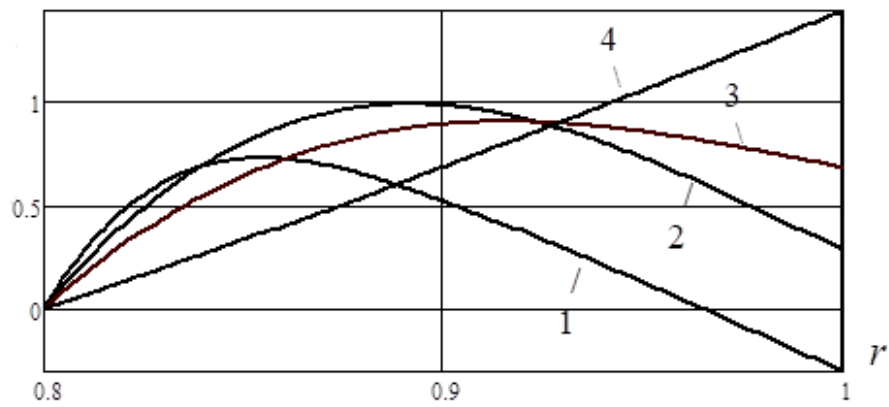
- более точное определение температурного поля позволяет, по сравнению с результатами расчета в несвязанной постановке (рис. 2.6), уточнить картину деформирования цилиндра (рис. 4.2) в течение времени. При установившемся режиме ($t = 100t_{\max}$) перемещения, вычисленные по данным подходам, совпадают;
- на первом этапе деформирования потенциал электрического поля $\phi(r, t)$ имеет наибольшее значение в области близкой к внутренней поверхности цилиндра за счет более неравномерного прогрева цилиндра и высокого градиента изменения перемещений $\frac{\partial U}{\partial r}$ (рисунок 4.3). В течение времени, за счет равномерного прогрева численные значения $\phi(r, t)$ принимают наибольшее значения на внешней электродированной поверхности;
- высокое значение коэффициента линейного температурного расширения α_t приводит к образованию более высокого потенциала электрического поля в пьезокерамике состава ПКР –35 по сравнению с другими составами (рисунок 4.3);

$$\phi(r,t) \times 10^6$$



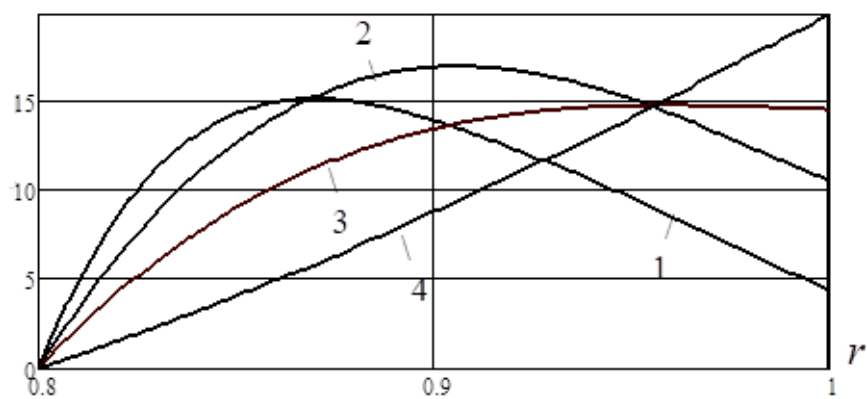
а) PZT-4

$$\phi(r,t) \times 10^6$$



б) PZT-5A

$$\phi(r,t) \times 10^6$$



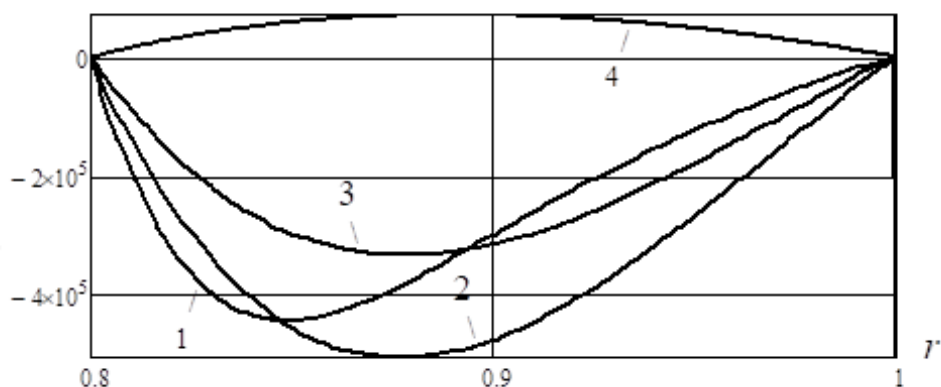
в) ПКР-35

Рис. 4.3. Графики изменения функций $\phi(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени: $t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$

– механические нормальные напряжения $\sigma_{rr}(r, t)$ принимают максимальные значения при $t = t_{\max}$ в области, смещенной к внутренней лицевой поверхности. В дальнейшем, вследствие уменьшения градиента перемещений $\frac{\partial U}{\partial r}$ численные значения $\sigma_{rr}(r, t)$ существенно снижаются и при полном прогреве цилиндра ($t = 100t_{\max}$) меняют знак (рисунок 4.4);

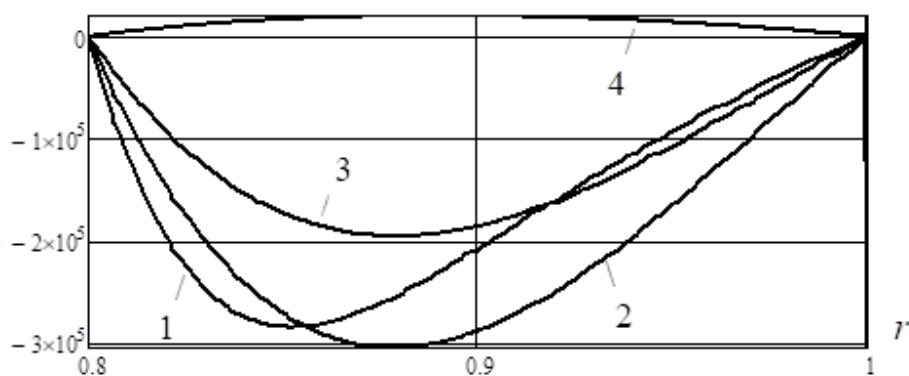
– напряжения $\sigma_{rr}(r, t)$ в цилиндре, выполненного из средне жесткой пьезокерамики состава PZT– 4, существенно выше элемента, изготовленного из мягкой пьезокерамики PZT– 5A. При этом высокие значения $\sigma_{rr}(r, t)$ в пьезокерамике ПКР – 35 объясняются большей степенью деформирования за счет высокой теплопроводности материала (рис. 4.4);

$\sigma_{rr}(r, t), \text{ Па}$

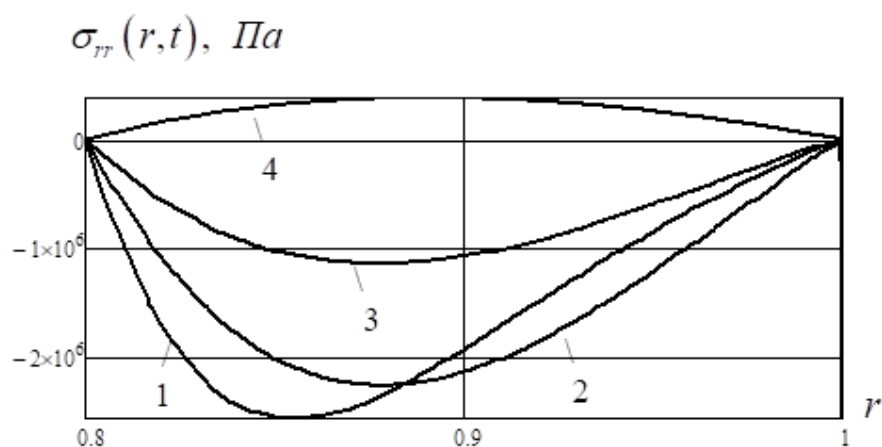


а) PZT– 4

$\sigma_{rr}(r, t), \text{ Па}$



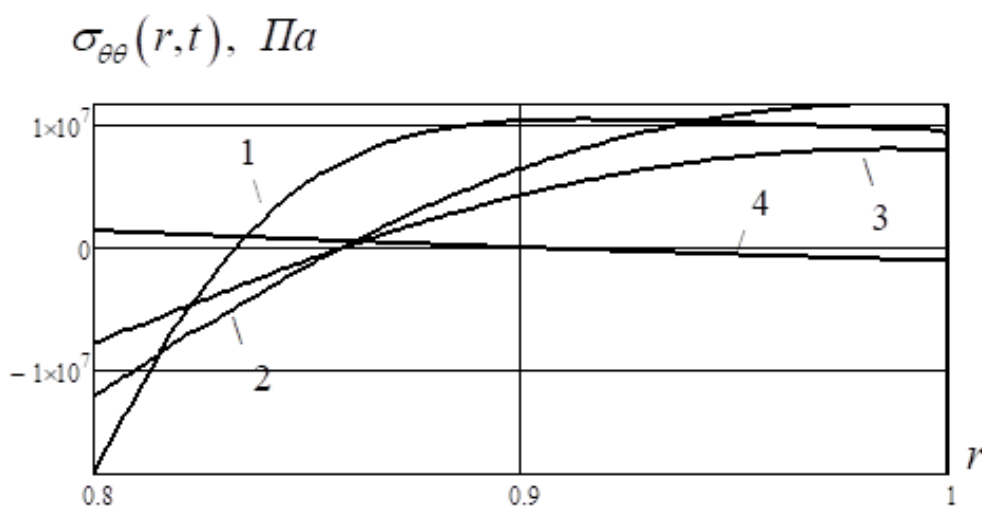
б) PZT– 5A



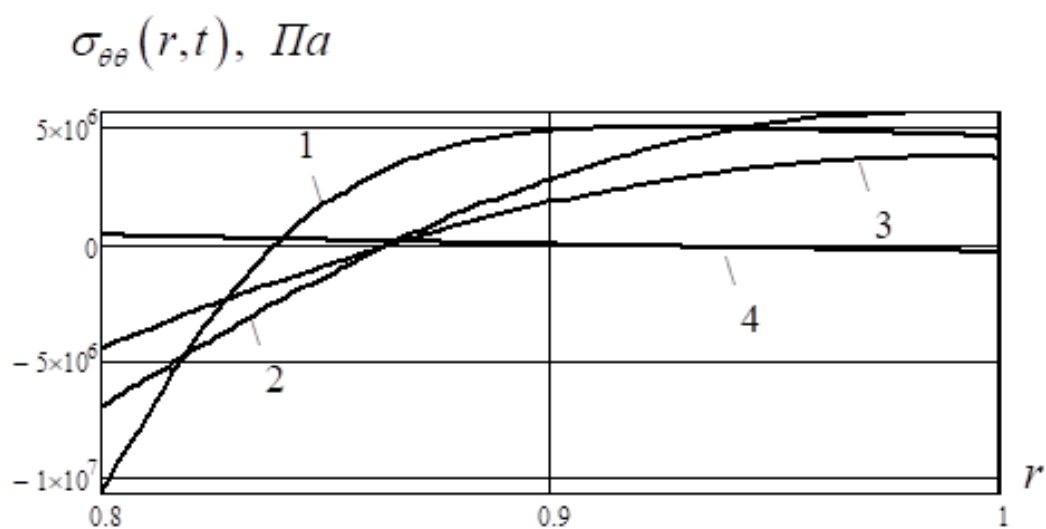
в) ПКР –35

Рис. 4.4. Графики изменения $\sigma_{rr}(r,t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени: $t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$

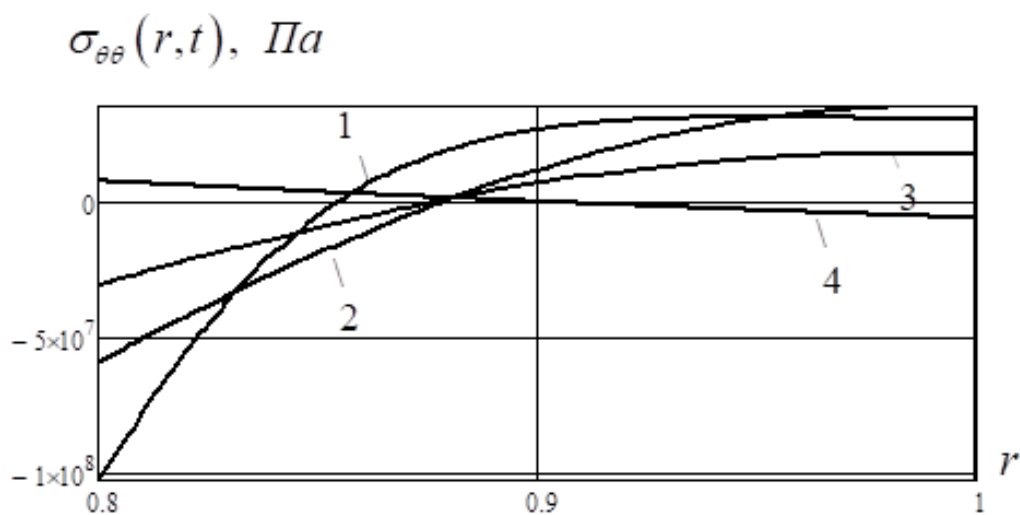
- равенство нулю численных значений нормальные напряжения $\sigma_{rr}(r,t)$ при $r = R, 1$ означает удовлетворение соответствующих граничных условий;
- сложный характер деформирования пьезокерамического цилиндра приводит первоначально при $t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}$ к его сжатию (рис. 4.5) в окружном направлении (нормальные напряжения $\sigma_{\theta\theta}(r,t)$ отрицательны) внутренней части элемента и растяжению ее внешней области. Однако в дальнейшем при $t = 100t_{\max}$ происходит обратная картина и напряжения $\sigma_{\theta\theta}(r,t)$ снижаются;



а) PZT– 4



б) PZT-5A

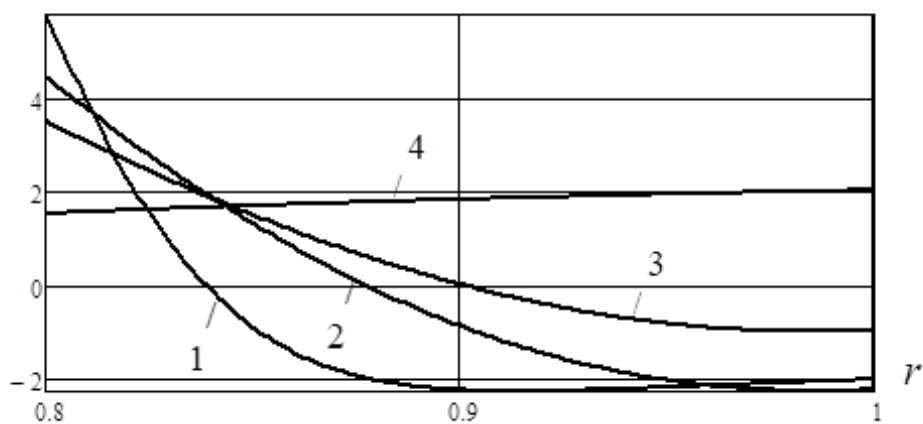


в) ПКР-35

Рис. 4.5. Графики изменения $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени: $t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$

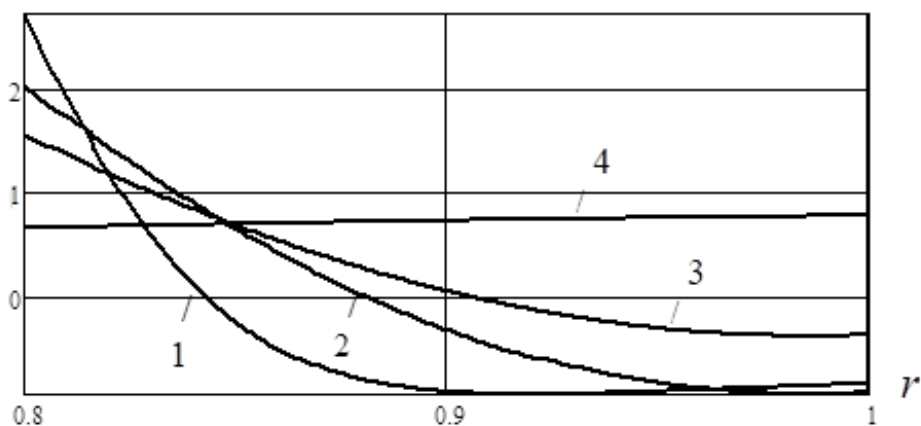
- нормальная компонента тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ на порядок выше по сравнению с $\sigma_{rr}(r, t)$;
- радиальная составляющая электрического поля $E_r(r, t)$ неоднородна по толщине пластины в процессе деформирования конструкции. При этом в случае установившегося температурного режима $t = 100t_{\max}$ без большой погрешности можно принять постоянным значением функцию $E_r(r, t) = E_r$;

$$E_r(r,t)$$



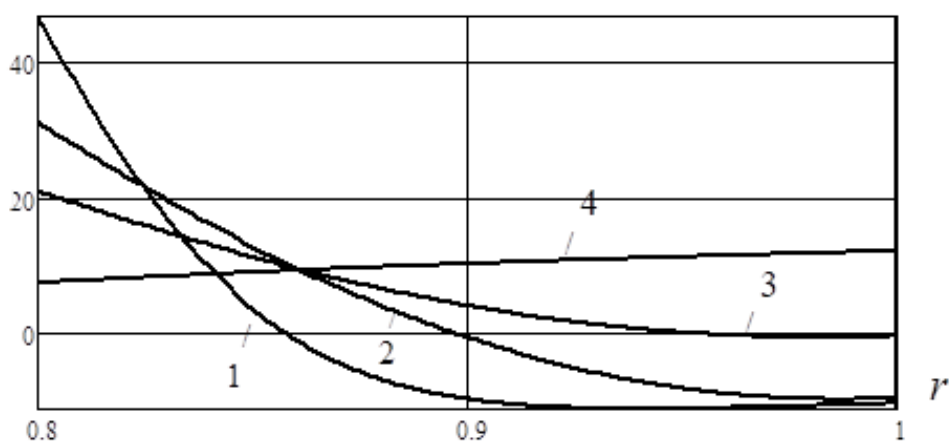
а) PZT-4

$$E_r(r,t)$$



б) PZT-5A

$$E_r(r,t)$$



в) ПКР-35

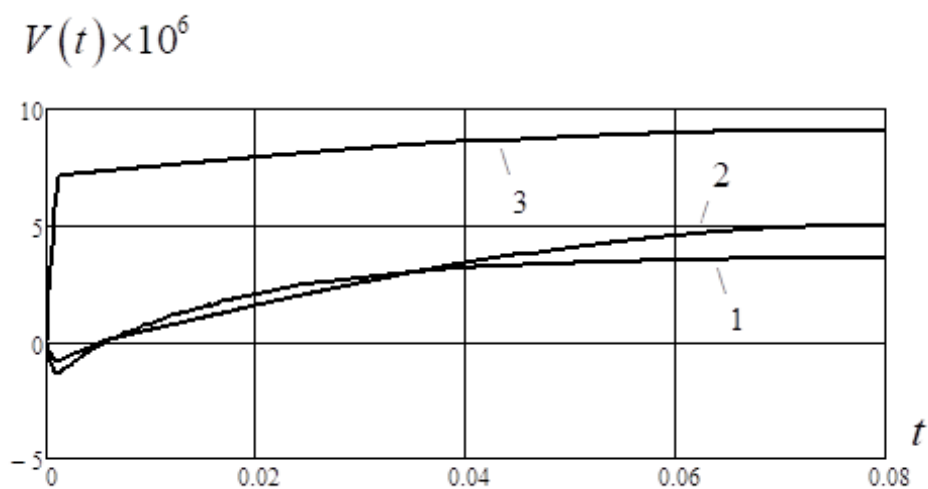
Рис. 4.6. Графики изменения напряженности электрического поля в безразмерной форме

$(E_r(r,t) = \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial r})$ по радиальной координате в различные моменты времени:

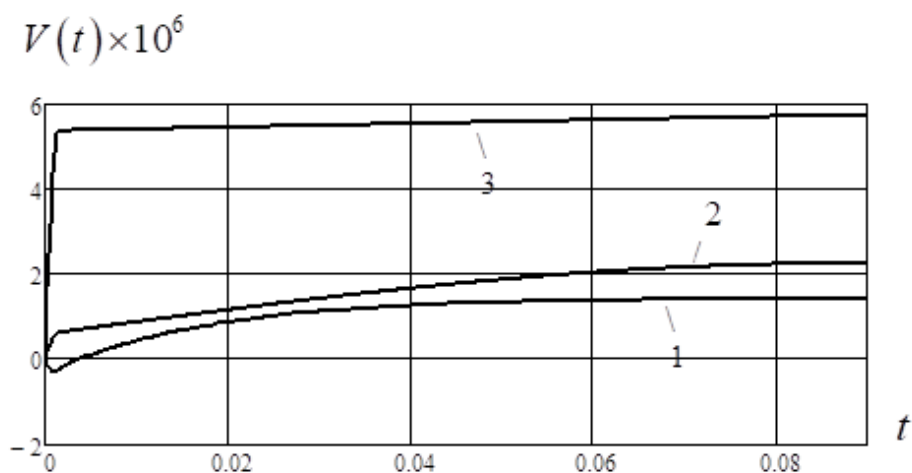
$$t = t_{\max}, 5t_{\max}, 10t_{\max}, 100t_{\max}$$

На рисунках 4.7 показаны графики изменения разности потенциалов $V(t)$ по времени для полого пьезокерамического цилиндра с различной толщиной стенки. Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты, полученные при следующих значениях $R = 0.8, 0.6, 0.4$.

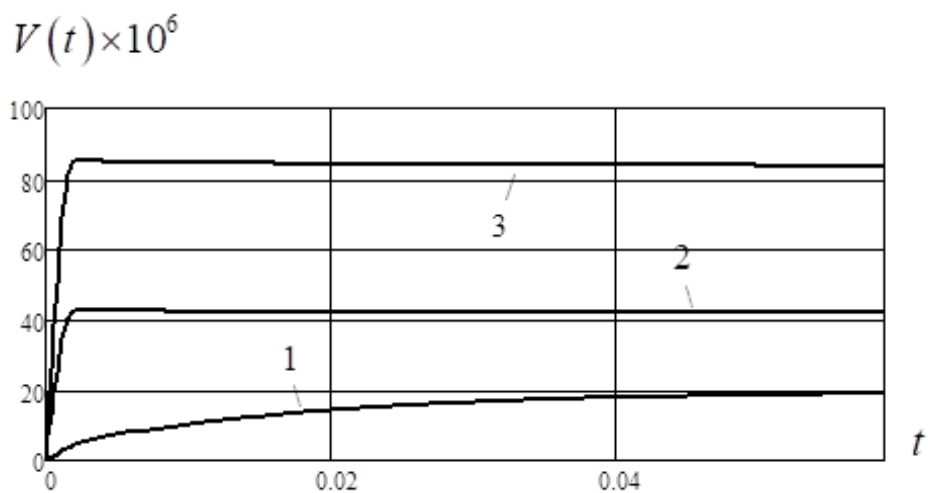
Полученные результаты позволяют сделать вывод, что увеличение толщины стенки приводит к росту численных значений $V(t)$:



а) PZT– 4



б) PZT– 5A

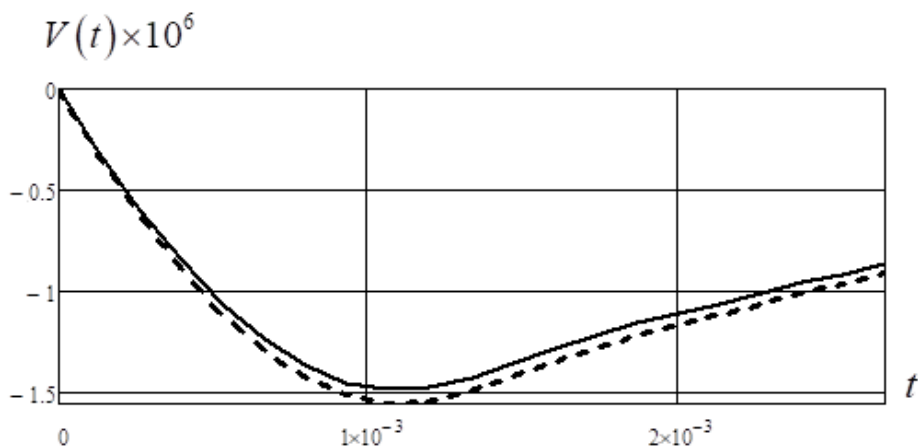


в) ПКР –35

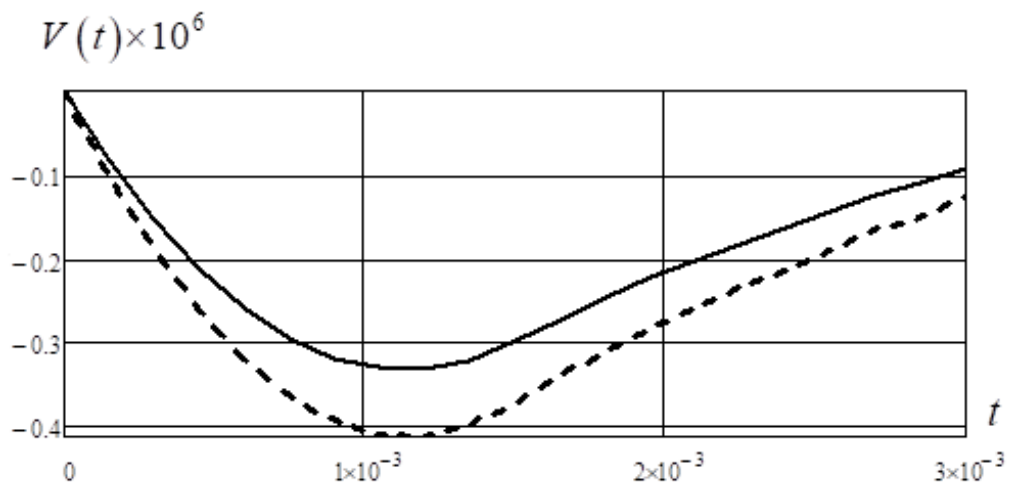
Рис. 4.8. Графики изменения $V(t)$ по времени t (1– $R = 0.8$, 2– $R = 0.6$, 3– $R = 0.4$)

Для оценки влияния пирокoeffициента g_3 на электрическое поле на рисунке 4.9 показаны графики изменения разности потенциалов $V(t)$ по времени. Сплошной и пунктирной линией обозначены результаты соответственно с учетом и без учета пирокoeffициента.

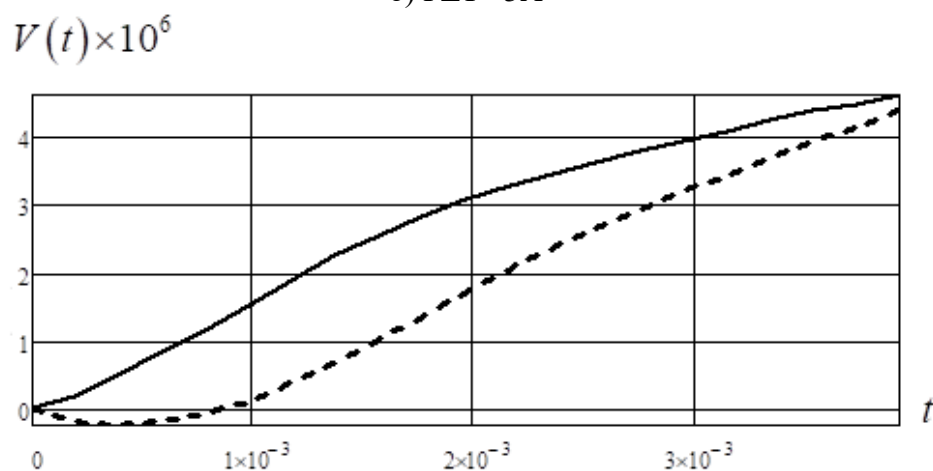
Результаты расчета показывают, что температурное поле оказывает влияние на электрическое поле.



а) PZT– 4



б) PZT-5A



в) ПКР-35

Рис. 4.9. Графики изменения $V(t)$ по времени t
(сплошная и пунктирная линии – с учетом и без учета пирокoeffициента g_3)

Представленные результаты связанной задачи термоэлектроупругости позволяют сделать следующие выводы:

- при расчете пьезокерамического цилиндра можно пренебречь влиянием скоростей изменения объема тела напряженности электрического поля на температурное поле;
- использование точной зависимости изменения температурного поля в процессе прогрева конструкции позволяют уточнить характер изменения электроупругого поля в пьезокерамическом цилиндре;
- увеличение толщины стенки цилиндра приводит к росту разницы потенциалов между его электродированными цилиндрическими поверхностями;

- использование пьезокерамических материалов с более высоким значением коэффициента линейного температурного расширения α , приводит также к образованию более высокого потенциала электрического поля;
- использование в расчетах пироккоэффициента g_3 позволяет уточнить электрическое поле в пьезокерамическом элементе.

4.4. Сравнительный анализ замкнутого и численного решения

Представленные в настоящей работе теоретические результаты сравниваются с аналогичными данными, полученные численным методом с помощью программного комплекса ANSYS.

Геометрическая модель длинного цилиндра при условии плоско-напряженного состояния была разбита на упорядоченную четырехугольную сетку (рис. 4.11). Для определения температурного поля использовался конечный элемент PLANE77, а для вычисления напряженно-деформированного состояния и электрического поля конечный элемент PLANE223.

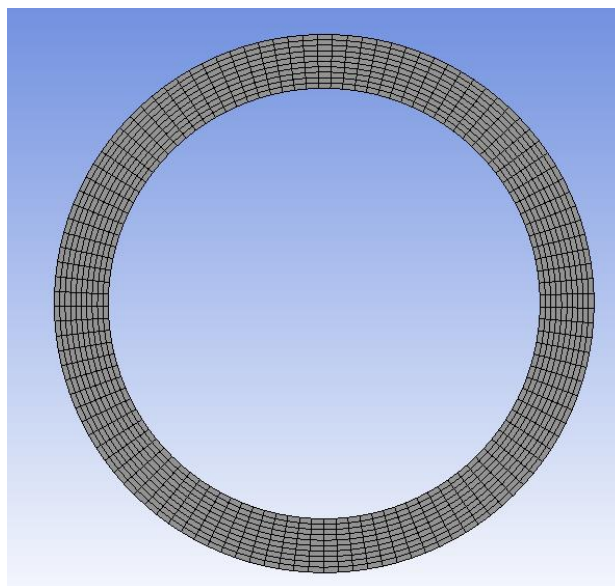


Рис. 4.11. Конечно-элементная модель

На первом этапе проводится нестационарный расчет цилиндра ($b = 0.02$ м, $R = 0.8$), связанный с определением его температурного поля, изготовленного из пьезокерами PZT-4 с учетом изменения температуры на внутренней поверхности (4.25).

Результатом расчета является тепловое поле в разные моменты времени, представленное на рисунках 4.12, 4.13. Красным, зеленым, синим и фиолетовым цветами на обобщенном рисунке 4.13 обозначены графики изменения температуры по радиальной координате при $t = t_{\max}$, $t = 10t_{\max}$, $t = 30t_{\max}$, $t = 90t_{\max}$.

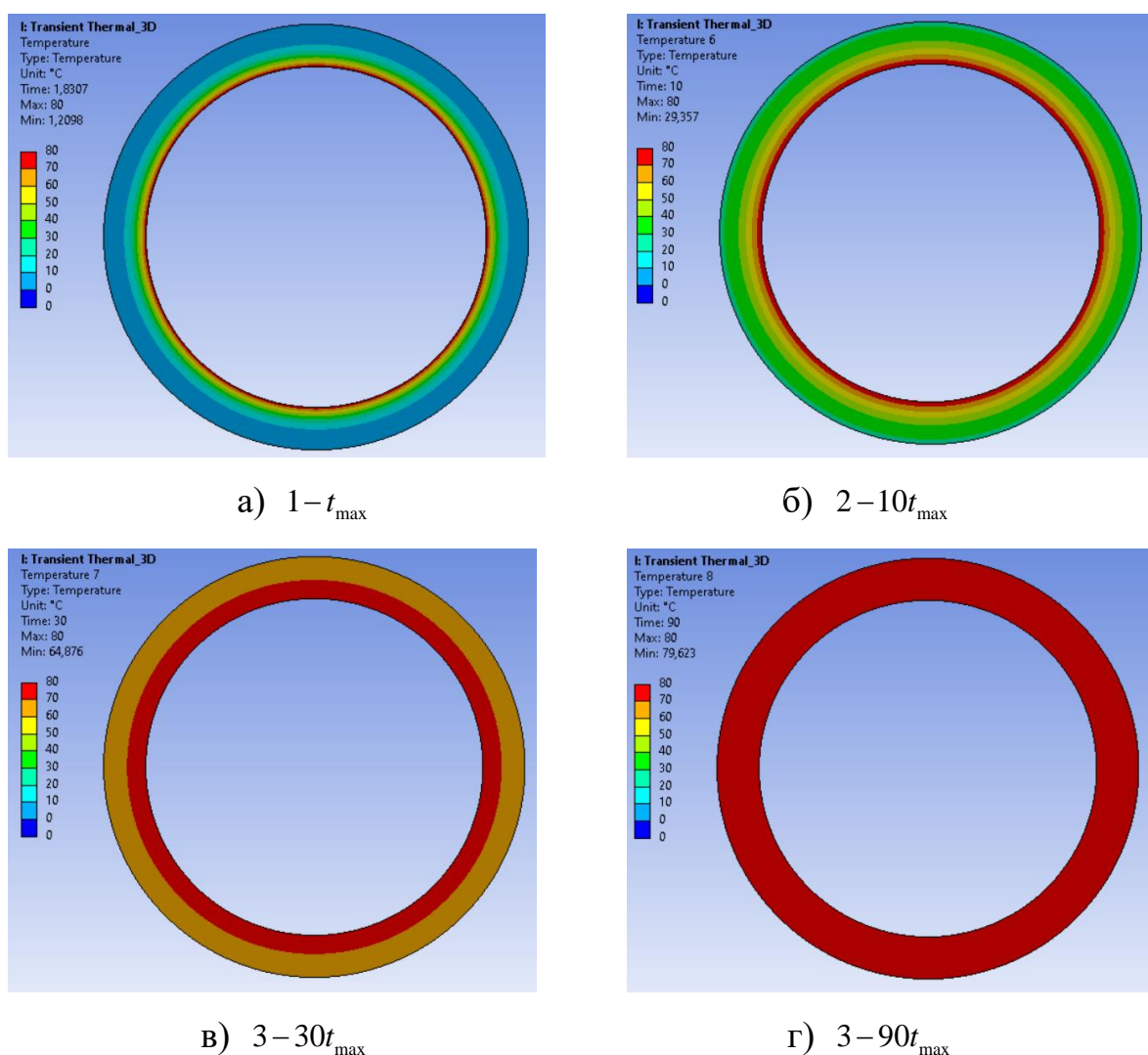


Рис. 4.12. Графики изменения температурного поля в различные моменты времени

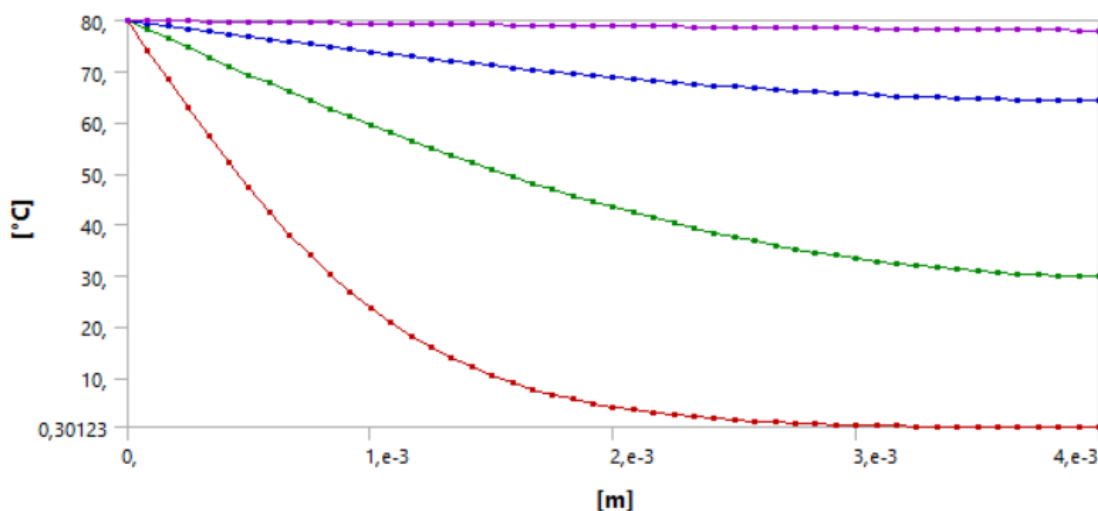
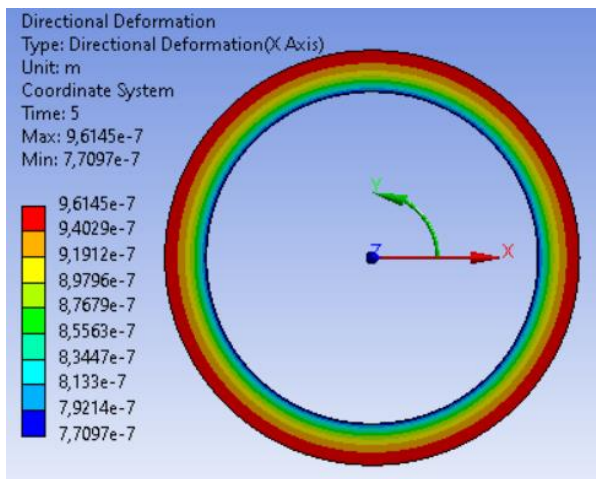


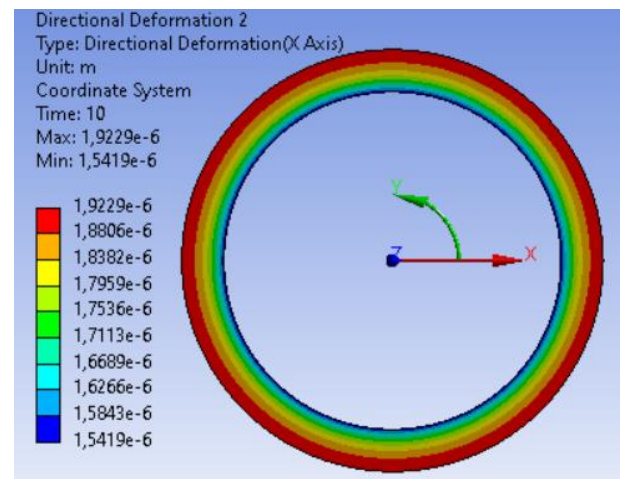
Рис. 4.13. Обобщенный график изменения температурного поля

Результаты, представленные на рисунках 4.12, 4.13, совпадают с результатами расчета изменения температуры по радиальной координате, полученные с помощью разработанного в работе алгоритма расчета (рис.4.1,а). При этом время, соответствующее установившемуся температурному режиму, полученное численным ($t = 90t_{\max}$) и аналитическим ($t = 100t_{\max}$) методом, имеет разное значение. В промежуток времени $90t_{\max} < t < 100t_{\max}$ происходит несущественное изменение температурного поля. В частности, на внешней поверхности цилиндра температура увеличивается на $0.2 \text{ } ^\circ\text{C}$ (0.3 %).

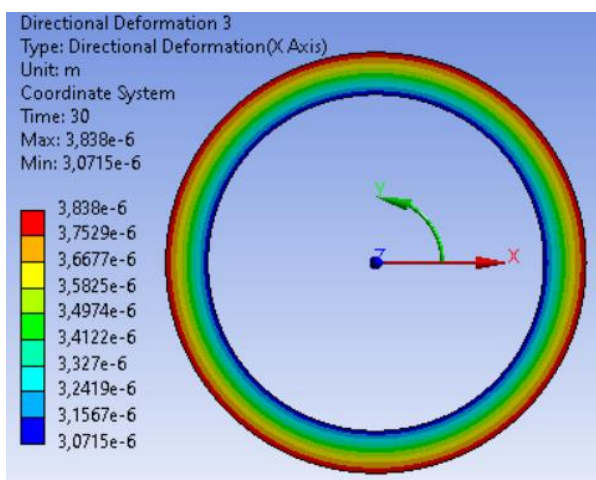
Температурное поле цилиндра (рис. 4.13) является нагрузкой при исследовании его напряженно-деформированного состояния. На рисунках 4.14 – 4.16 показаны поля радиальных перемещений $U^*(r_*, t_*)$ и компонент тензора напряжений $\sigma_{rr}(r_*, t_*)$, $\sigma_{\theta\theta}(r_*, t_*)$ в различные моменты времени: $t = t_{\max}$, $t = 10t_{\max}$, $t = 30t_{\max}$, $t = 90t_{\max}$, а на рисунке 4.17 представлены графики обобщающие данные результаты.



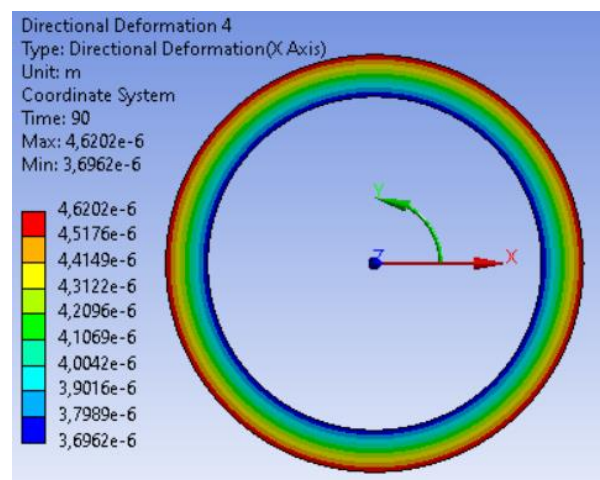
a) $1-t_{\max}$



б) $2-10t_{\max}$

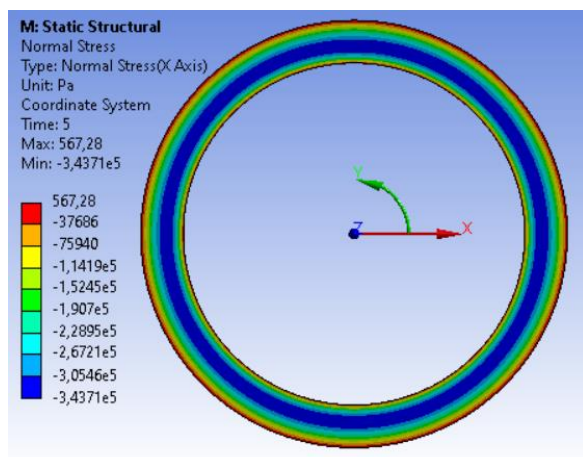


в) $3-30t_{\max}$

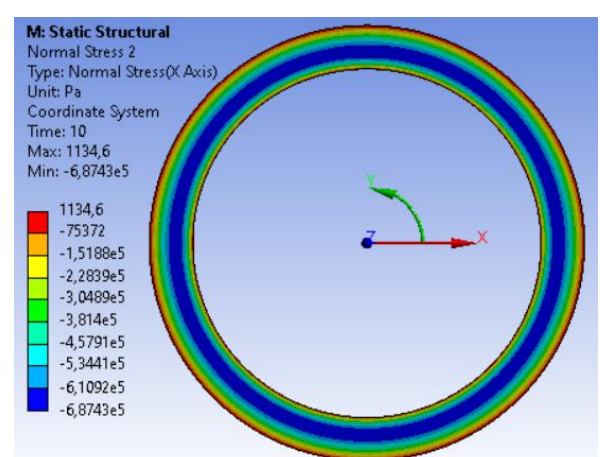


г) $3-90t_{\max}$

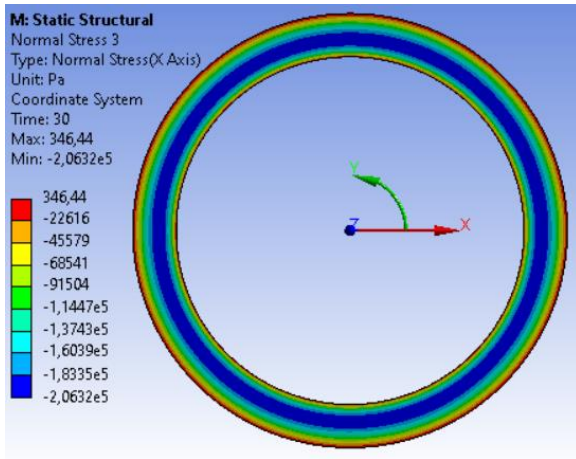
Рис. 4.14. Изменение перемещений $U^*(r_*, t_*)$ по радиальной координате



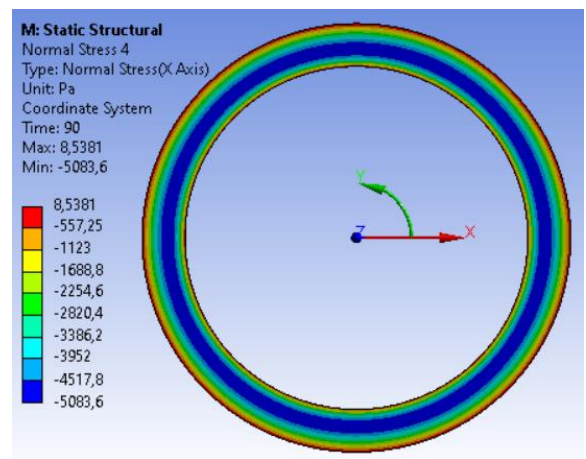
a) $1-t_{\max}$



б) $2-10t_{\max}$

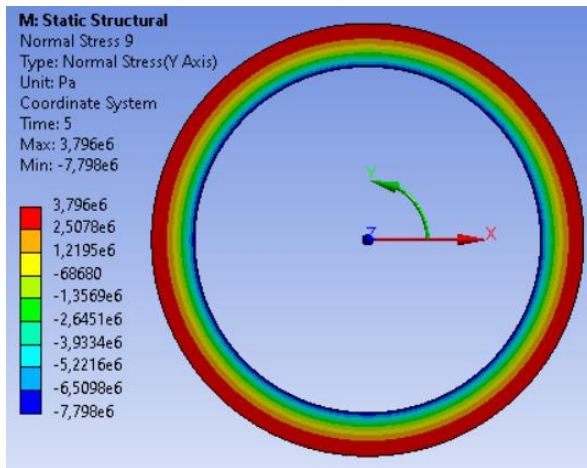


в) $3-30t_{\max}$

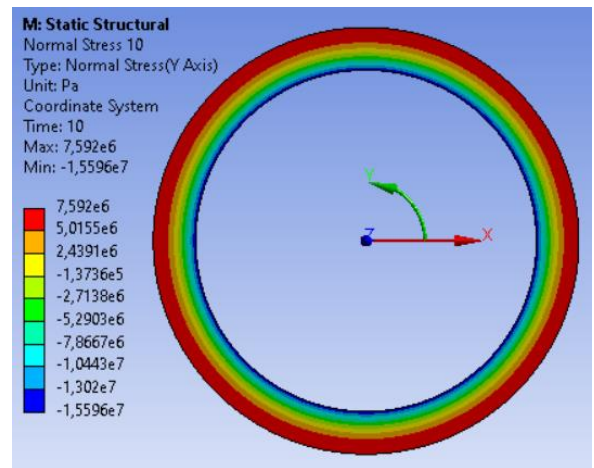


г) $3-90t_{\max}$

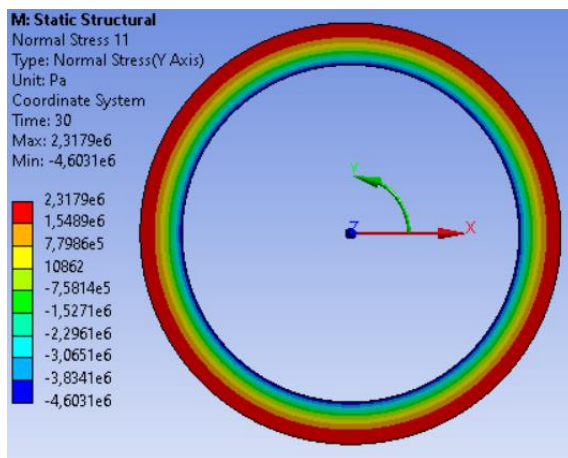
Рис. 4.15. Изменение $\sigma_{rr}(r_*, t_*)$ по радиальной координате



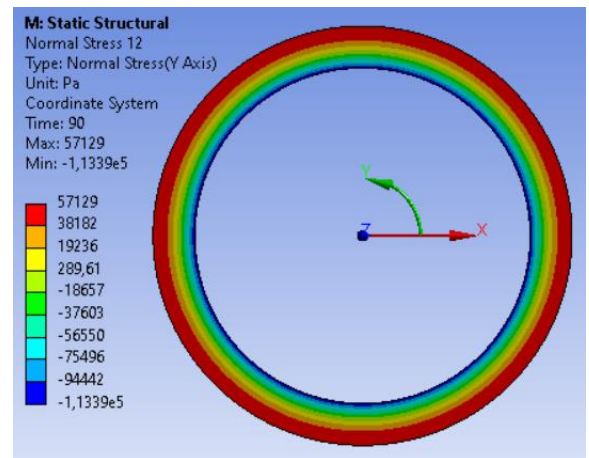
а) $1-t_{\max}$



б) $2-10t_{\max}$

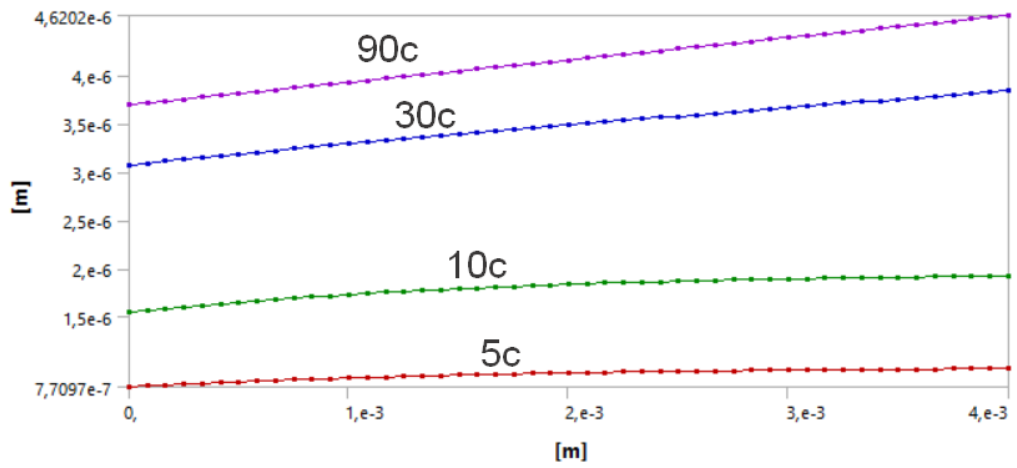


в) $3-30t_{\max}$

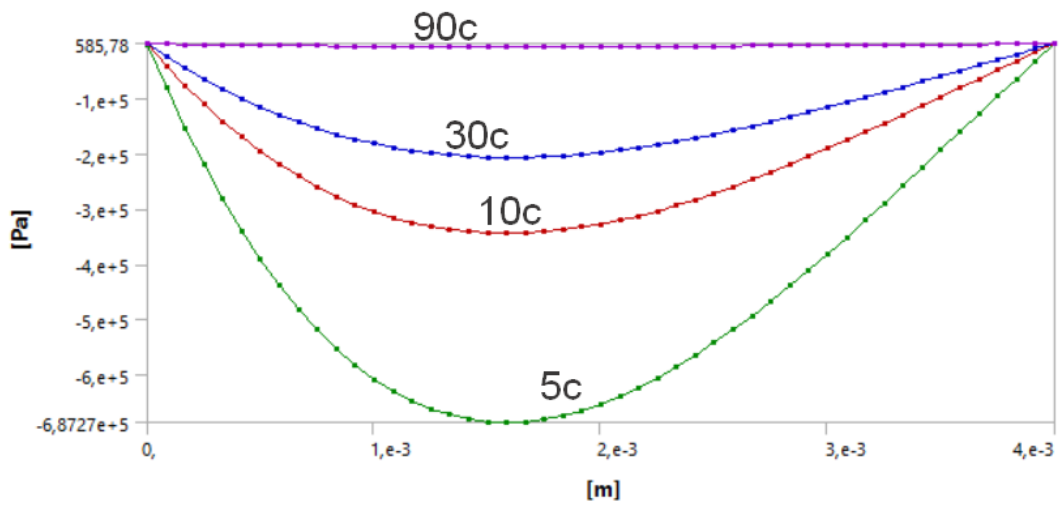


г) $3-90t_{\max}$

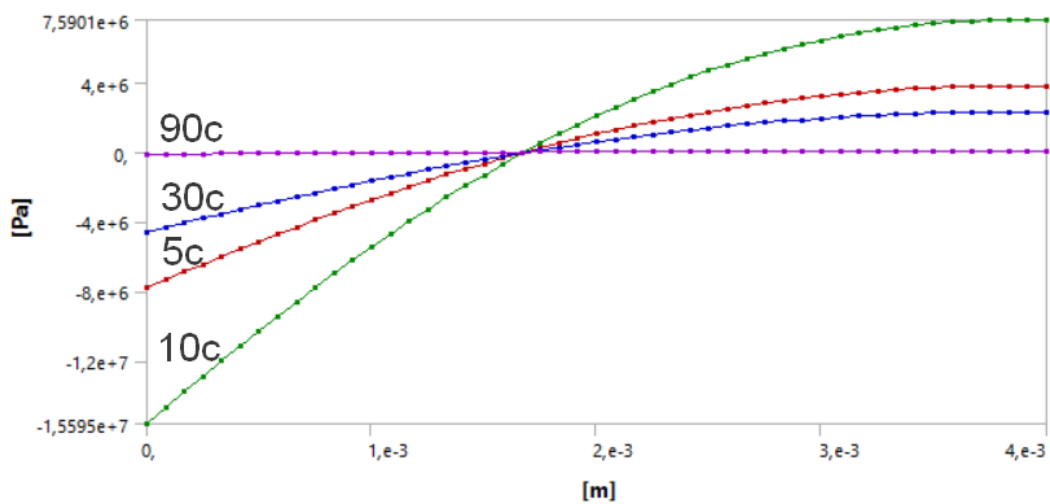
Рис. 4.16. Изменение $\sigma_{\theta\theta}(r_*, t_*)$ по радиальной координате



а) $U^*(r^*, t_*) - r^*$



б) $\sigma_{rr}(r_*, t_*) - r_*$



в) $\sigma_{\theta\theta}(r_*, t_*) - r_*$

Рис. 4.17. Обобщенные графики изменения перемещений и напряжений по радиальной координате

Сравнение результатов расчета, полученных с помощью разработанного алгоритма расчета и численного метода, позволяют сделать выводы:

- при установившемся в цилиндре температурном режиме ($t = 90t_{\max}$ – численный расчет, рис.4.17, а; $t = 100t_{\max}$ – аналитический расчет, рис. 4.2, а) отмечается хорошее совпадение результатов (разница составляет 2%) на внешней цилиндрической поверхности. При этом на внутренней поверхности разница в результатах составляет 13%;
- при нестационарном режиме ($t \leq 10t_{\max}$) численный приближенный метод дает существенно большее значение перемещений (практически на 30%) по сравнению с результатами аналитического решения;
- качественный и количественный характер изменения радиальных нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r, t)$ вычисленных с помощью двух методов (рис.4,4, а, 4.15, 4.17, б) практически совпадает;
- качественная картина распределения напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ повторяется. Однако численный метод по сравнению с аналитическим решением дает существенно меньшие значения $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ в процессе прогрева цилиндра.

В общем, при сравнении численных результатов, полученных с помощью различных методов, можно сделать вывод, что численный метод конечного элемента (МКЭ) достаточно точно позволяет описать работу нерезонансных преобразователей энергии только при действии стационарного температурного поля. **При этом практическая ценность построенного замкнутого алгоритма заключается также в использовании результатов расчета в качестве тестовых при модернизации численного метода в случае исследования нестационарного процесса.**

ГЛАВА 5

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Построено новое замкнутое решение динамической задачи обратного пьезоэффекта для длинного пьезокерамического термоупругого цилиндра. Рассматривается случай действия на его лицевых поверхностях нестационарной электрической нагрузки в виде разности потенциалов. Задана температура окружающей среды и закон конвекционного теплообмена (граничное условие 3– рода).

Построенное решение позволяет определить напряженно–деформированное состояние и электрическое поле в пьезокерамическом цилиндре с учетом связанности электроупругих полей, а также проанализировать с помощью гиперболической LS–теории теплопроводности влияние вынужденных колебаний на температурное поле рассматриваемой системы.

5.1. Постановка задачи

Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область $\Omega: \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. Рассматривается случай действия на лицевых электродированных поверхностях нестационарной нагрузки в виде разности потенциалов $2V^*(t_*)$, являющейся произвольной функцией времени t_* .

В этом случае дифференциальные уравнения термоэлектроупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(a_7 \Theta + a_8 \nabla U - a_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi = \pm V, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{11} \Theta = a_{11} \mathcal{G}; \quad (5.2)$$

$$t = 0 \quad U = \phi = \Theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{U, \phi, \Theta\} = \{\dot{U}_0, \dot{\phi}_0, \dot{\Theta}_0\}; \quad (5.3)$$

где $\{U, \dot{U}_0, r, R\} = \{U^*, \dot{U}_0^*, r_*, a\} / b$, $\{\Theta, \dot{\Theta}_0, \mathcal{G}\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, \dot{\Theta}_0^*, (\mathcal{G}^* - T_0)\}$,

$$\{\phi, \dot{\phi}_0, V\} = \frac{e_{33}}{C_{33} b} \{\phi^*, \dot{\phi}_0^*, V^*\}, \quad t = \frac{t_*}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}},$$

$$a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33} \varepsilon_{33}}, \quad a_5 = \frac{e_{31} e_{33}}{C_{33} \varepsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3 e_{33}}{\varepsilon_{33} \gamma_{33}}, \quad a_7 = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_8 = \frac{b \gamma_{33}^2 T_0}{\Lambda \sqrt{C_{33} \rho}},$$

$$a_9 = \frac{b \gamma_{33} g_3 T_0}{e_{33} \Lambda} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad a_{10} = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad a_{11} = \alpha \frac{b}{\Lambda}, \quad \beta = \frac{\beta_{rel}}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$\dot{U}_0, \dot{\phi}_0, \dot{\Theta}_0$ – известное в начальный момент времени скорости изменения перемещений, потенциала электрического поля и приращение температуры.

Проблема решения несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (5.1) приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается задача электроупругости с соответствующими краевыми условиями без учета изменения температуры тела ($\Theta = 0$)

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (5.4)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_{10} \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi = \pm V; \quad (5.5)$$

$$t = 0 \quad U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \dot{U}_0; \quad (5.6)$$

На следующем этапе рассматривается задача теплопроводности с учетом известных радиальной компоненты вектора перемещений U и потенциала электрического поля ϕ :

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - a_7 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(a_8 \nabla U - a_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right); \quad (5.7)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{11} \Theta = a_{11} \mathcal{G}; \quad (5.8)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \dot{\Theta}_0; \quad (5.9)$$

5.2. Общее решение задачи электроупругости

Первоначально выполняется процедура приведения расчетных соотношений (5.4) – (5.6) к виду, позволяющему в дальнейшем использовать метод конечных интегральных преобразований. Для этого вводятся новые функции $u(r, t)$, $\chi(r, t)$, связанные с $U(r, t)$, $\phi(r, t)$ следующими соотношениями:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + u(r, t), \quad \phi(r, t) = H_2(r, t) + \chi(r, t), \quad (5.10)$$

где $\{H_1(r, t), H_2(r, t)\} = \{f_1(r), f_2(r)\}V(t)$.

Подстановка (5.10) в (5.4) – (5.6), при удовлетворении условий

$$r = R, 1 \quad \frac{dH_1(r)}{dr} + a_{10} \frac{H_1(r)}{r} + \frac{dH_2(r)}{dr} = 0, \quad H_2(r) = \pm V; \quad (5.11)$$

позволяет получить краевую задачу относительно функций $u(r, t)$, $\chi(r, t)$ с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial u}{\partial r} - a_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R_1, \quad (5.12)$$

$$-\nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = R_2;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + a_{10} \frac{u}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0, \quad \chi = 0; \quad (5.13)$$

$$t=0 \quad u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0; \quad (5.14)$$

где $R_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}$, $R_2 = \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r}$
, $u_0 = -H_1$, $\dot{u}_0 = \dot{U}_0 - \frac{\partial H_1}{\partial t}$.

Начально–краевую задачу (5.12)–(5.14) решаем, используя структурный алгоритм вырожденного обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [48]. Для этого вводим на сегменте $[R, 1]$ КИП с неизвестными компонентами вектор–функции ядра преобразований $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$ и весовым коэффициентом α :

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 u(r, t) \alpha K_1(\lambda_i, r) r dr, \quad (5.15)$$

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) K_1(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}, \quad \chi(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) K_2(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2},$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 \alpha K_1(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

где λ_i – собственные значения.

В результате использования алгоритма КИП получаем задачи для трансформанты $G(\lambda_i, t)$:

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \lambda_i^2 G = F_H, \quad (5.16)$$

$$t=0 \quad G_{i|t=0} = G_0, \quad \frac{dG_i}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{G}_0; \quad (5.17)$$

и компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dK_1}{r} - a_1 \frac{K_1}{r^2} + \nabla \frac{dK_2}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_2}{dr} + \lambda_i^2 K_1 &= 0, \\ -\nabla \frac{dK_2}{dr} + a_4 \nabla \frac{dK_1}{dr} + a_5 \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} &= 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dK_1}{dr} + a_{10} \frac{K_1}{r} + \frac{dK_2}{dr} = 0, \quad K_{2|r=R} = 0; \quad (5.19)$$

$$\text{где } F_H = -\int_R^1 (a_4 R_1 K_1 + R_2 K_2) r dr, \quad G_0 = a_4 \int_R^1 u_0 K_1 r dr, \quad \dot{G}_0 = a_4 \int_R^1 \dot{u}_0 K_1 r dr.$$

В соотношениях (5.16) – (5.19) из условия инвариантности исходной (5.12) и преобразованной (5.18) систем уравнений определяется весовой коэффициент:

$$\alpha = a_4.$$

Общие интегралы задач (5.16), (5.18) представлены во второй главе диссертации в виде расчетных соотношений (2.39), (2.41), (2.42).

Подстановка $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r)$ в граничные условия (5.19) формирует систему алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить постоянные интегрирования $D_{1i} \dots D_{4i}$ и собственные значения λ_i .

Окончательные выражения функций $U(r, t), \phi(r, t)$ получим, применяя к трансформанте $G(\lambda_i, t)$ формулы обращения (5.15). В результате, с учетом (5.10), имеем:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) K_1(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}, \quad (5.20)$$

$$\phi(r, t) = H_2(r, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) K_2(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2}.$$

Функции $f_1(r), f_2(r)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений

$$\nabla \frac{df_1(r)}{dr} - a_1 \frac{f_1(r)}{r^2} + \nabla \frac{df_2(r)}{dr} - a_2 \frac{1}{r} \frac{df_2(r)}{dr} = 0, \quad (5.21)$$

$$\nabla \frac{df_2(r)}{dr} - a_4 \nabla \frac{df_1(r)}{dr} - a_5 \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} = 0.$$

В результате решения (5.21), при удовлетворении граничных условий (5.11), получаем:

$$f_1(r) = -E_1 + E_2 r^A + E_3 r^{-A} \quad ,$$

$$f_2(r) = E_1 \ln(r) + E_2 \frac{(a_4 A + a_5)}{A} r^A + E_3 \frac{(a_4 A - a_5)}{A} r^{-A} + E_4 \quad ,$$

$$A^2 = \frac{(a_1 + a_2 a_5)}{(1 + a_4)} \quad , \quad E_1 = 2b_1 b_2 b_5^{-1} (R^A + 1) \quad , \quad E_2 = -2b_2 b_5^{-1} \quad , \quad E_3 = -2b_1 b_5^{-1} R^A \quad ,$$

$$E_4 = -1 - E_2 b_3 - E_3 b_4 \quad , \quad b_1 = A(1 + a_4) + a_5 + a_{10} \quad , \quad b_2 = -A(1 + a_4) + a_5 + a_{10} \quad ,$$

$$b_3 = \frac{(a_4 A + a_5)}{A} \quad , \quad b_4 = \frac{(a_4 A - a_5)}{A} \quad , \quad b_5 = (R^A - 1)(b_1 b_4 - b_2 b_3) + (R^A + 1)b_1 b_2 \ln(R)$$

5.3. Общее решение задачи теплопроводности

Для решения начально–краевой задачи (5.7) – (5.9) необходимо выполнить процедуру стандартизации граничных условий (5.8), которая выполняется с помощью замены $\Theta(r, t)$ новой функцией $L(r, t)$:

$$\Theta(r, t) = \mathcal{G} + L(r, t) \quad , \quad (5.22)$$

Подстановка (5.22) в (5.7) – (5.9) позволяет получить краевую задачу относительно функций $L(r, t)$ с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial L}{\partial r} - a_7 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) L = R_3 \quad ; \quad (5.23)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial L}{\partial r} + a_{11} L = 0 \quad ; \quad (5.24)$$

$$t = 0 \quad L = -\mathcal{G} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{\Theta}_0 \quad ; \quad (5.25)$$

$$\text{где } R_3 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(a_8 \nabla U - a_9 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) .$$

Использование обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП) [49] путем введения неизвестной функции ядра преобразований $N(\mu_i, r)$:

$$Y(\mu_i, t) = \int_R^1 L(r, t) N(\mu_i, r) r dr, \quad (5.26)$$

$$L(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y(\mu_i, t) N(\mu_i, r) \|N_i\|^{-2}, \quad \|N_i\|^2 = \int_R^1 N(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

позволяет получить задачи для трансформанты $Y(\mu_i, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Y_i + \frac{\mu_i^2}{a_7} Y_i = F_H, \quad (5.27)$$

$$t=0 \quad Y_{0i} = -\mathcal{G} \int_R^1 N_i r dr, \quad \frac{\partial Y_{0i}}{\partial t} = \int_R^1 \dot{\Theta}_0 r N_i dr; \quad (5.28)$$

и функции ядра преобразований

$$\frac{d^2 N_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dN_i}{dr} + \mu_i^2 N_i = 0, \quad (5.29)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial N_i}{\partial r} + a_{11} N_i = 0; \quad (5.30)$$

где $F_H = -\frac{1}{a_7} \int_R^1 R_3 r N_i dr$, μ_i – собственные значения.

Общий интеграл уравнения (5.27), с учетом начальных условий (5.28), имеет вид:

$$Y(\mu_i, t) = (p_{1i} - p_{2i})^{-1} \left\{ \frac{\partial Y_{0i}}{\partial t} (\exp p_{2i} t - \exp p_{1i} t) + \int_0^t F_H(\tau) [\exp p_{1i}(t - \tau) - \exp p_{2i}(t - \tau)] d\tau \right\}, \quad (5.31)$$

а решение равенства (5.29) записывается следующим образом:

$$N(\mu_i, r) = E_{1i} J_0(\mu_i r) + E_{2i} Y_0(\mu_i r), \quad (5.32)$$

где $p_{1i, 2i} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\mu_i^2 \beta a_7^{-1}}}{2\beta}$.

Подстановка (5.32) в граничные условия (5.30) формирует выражения для постоянных интегрирования E_{1i}, E_{2i} :

$$E_{1i} = a_{11}Y_0(\mu_i R) - \mu_i Y_1(\mu_i R), \quad E_{2i} = \mu_i J_1(\mu_i R) - a_{11}J_0(\mu_i R),$$

и трансцендентное уравнение для определения μ_i :

$$E_{1i} [a_{11}J_0(\mu_i) - \mu_i J_1(\mu_i)] + E_{2i} [a_{11}Y_0(\mu_i) - \mu_i Y_1(\mu_i)] = 0.$$

Окончательные выражения функции $\Theta(r, t)$ получим, применяя к трансформанте (5.31) формулу обращения (5.26). В результате, с учетом (5.22), имеем:

$$\Theta(r, t) = \mathcal{G} + \sum_{i=1}^{\infty} Y(\mu_i, t) N(\mu_i, r) \|N_i\|^{-2}. \quad (5.33)$$

Расчетное соотношение (5.33) представляет замкнутое решение рассматриваемой осесимметричной задачи теплопроводности.

5.4. Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ($R = 0.8$, $b = 0.02$ м). Рассматривается случай действия гармонической электрической нагрузки на поверхностях цилиндра:

$$V(t) = V_0 \sin \theta t,$$

где V_0, θ – амплитудное значение потенциала и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме.

На рисунках 5.1, 5.2 представлены графики изменения перемещений $U(r, t)$ по времени t , а также потенциала $\phi(r, t)$ (кривая 1) и напряженности $E_r(r, t)$ (кривая 2) электрического поля по радиальной координате r ($\theta = 0.9\lambda_1$). Пунктирной линией обозначена осциллограмма внешней электрической нагрузки.

Анализ представленных графиков позволяет сделать следующие выводы:

- 1) При высокочастотном внешнем воздействии ($\theta = 0.9\lambda_1$) вследствие наложения волн деформирования в электроупругой системе наблюдается сложная зависимость изменения перемещений во времени (рисунок 5.1). Поэтому обычно применяемое, при исследовании подобных задач, допущение об установившемся ре-

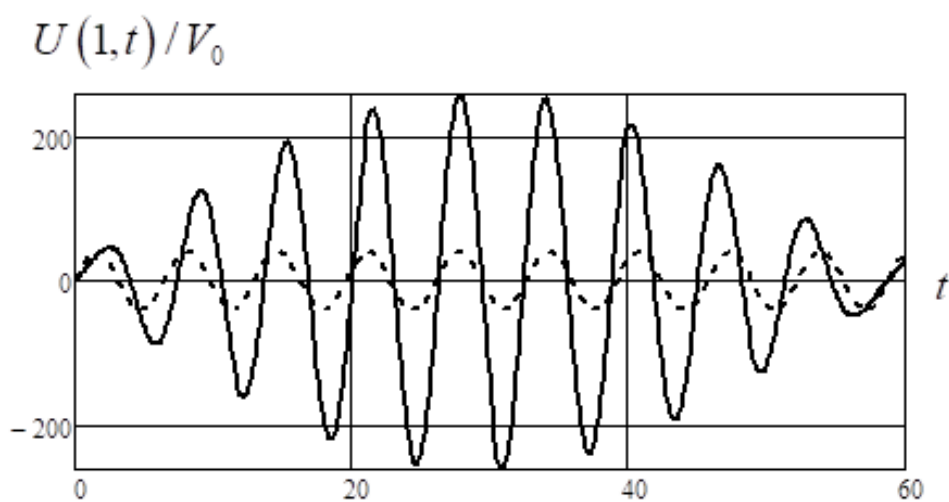
жиме вынужденных колебаний можно использовать только при решении задач, когда $\theta < 0.5\lambda_1$ на собственные значения;

2) Использование гипотез о линейной зависимости потенциала $\phi(r, t)$ и постоянном значении напряженности

$$E_r(r, t) = \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r}$$

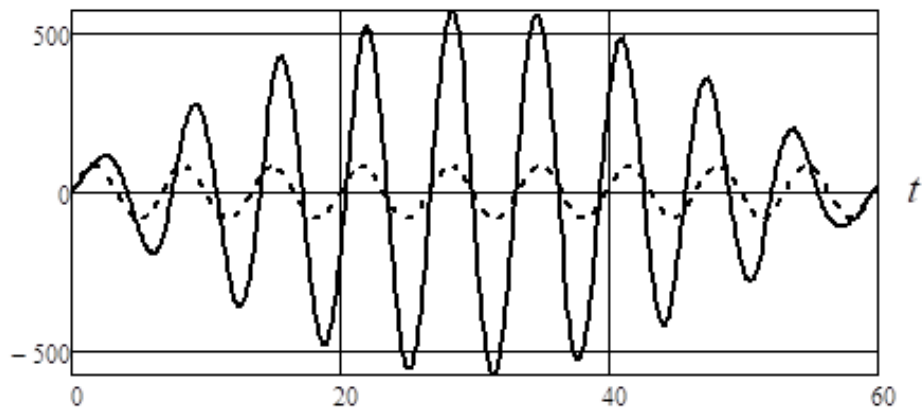
электрического поля при исследовании задач обратного пьезоэффекта с помощью прикладных теорий не находят свое подтверждение при решении динамических задач для цилиндра изготовленного из пьезокерамики составов PZT-4, PZT-5A (рисунок 5.2, а, б). Данное предположение можно использовать только при исследовании электроупругих элементов состава ПКЗ-35 (рисунок 5.2, в).

3) Амплитудные значения перемещений $U(1, t)$ в пьезокерамическом элементе состава PZT-4 ниже по сравнению электроупругим элементом состава PZT-5A за счет более высоких упругих характеристик материала, а перемещения $U(1, t)$ в пьезокерамическом элементе состава ПКР-35 меньше по сравнению электроупругим элементом состава PZT-4 за счет более низкой диэлектрической проницаемости материала (таблица 2.1).



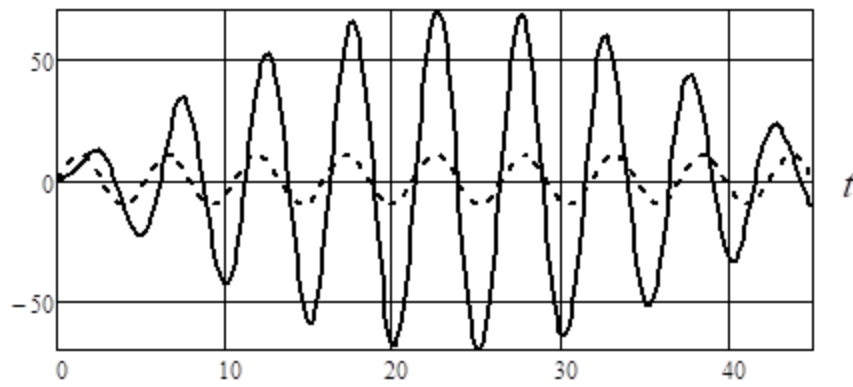
а) PZT-4

$$U(1,t)/V_0$$



б) PZT-5A

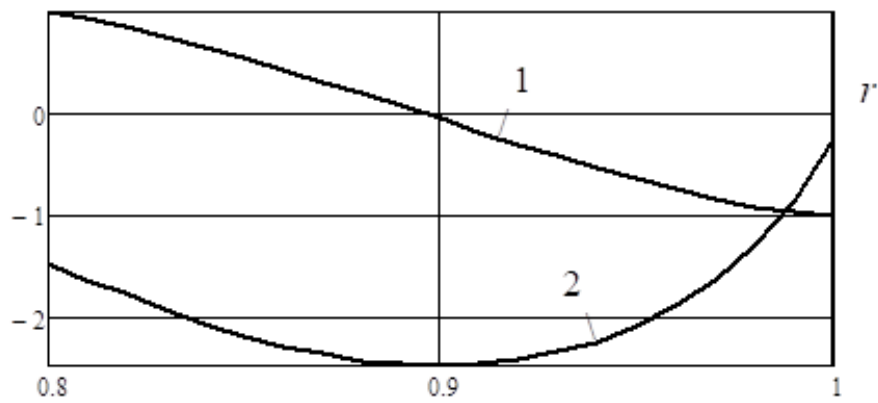
$$U(1,t)/V_0$$



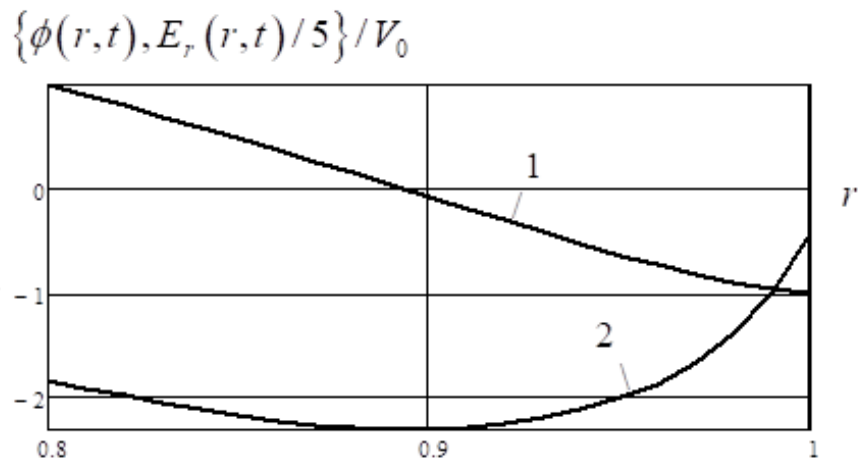
в) ПКР-35

Рис. 5.1. График изменения перемещений $U(1,t)$ по времени t

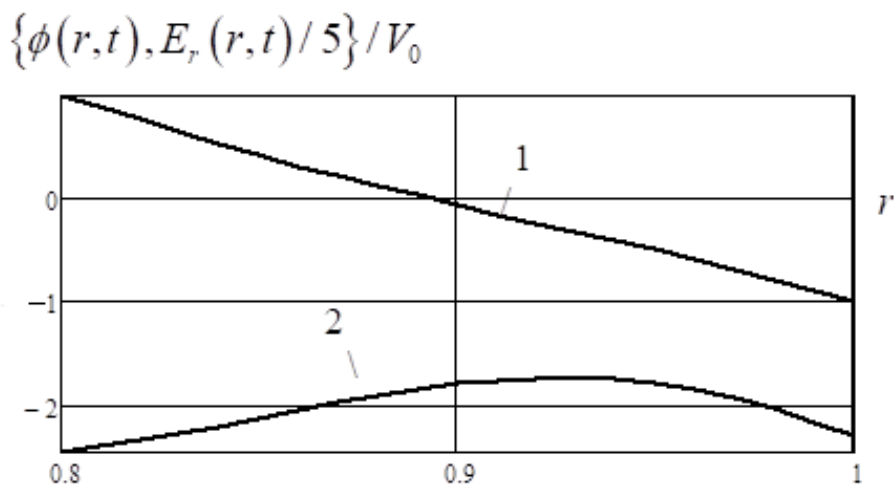
$$\{\phi(r,t), E_r(r,t)/5\}/V_0$$



а) PZT-4



б) PZT-5A



в) ПКР-35

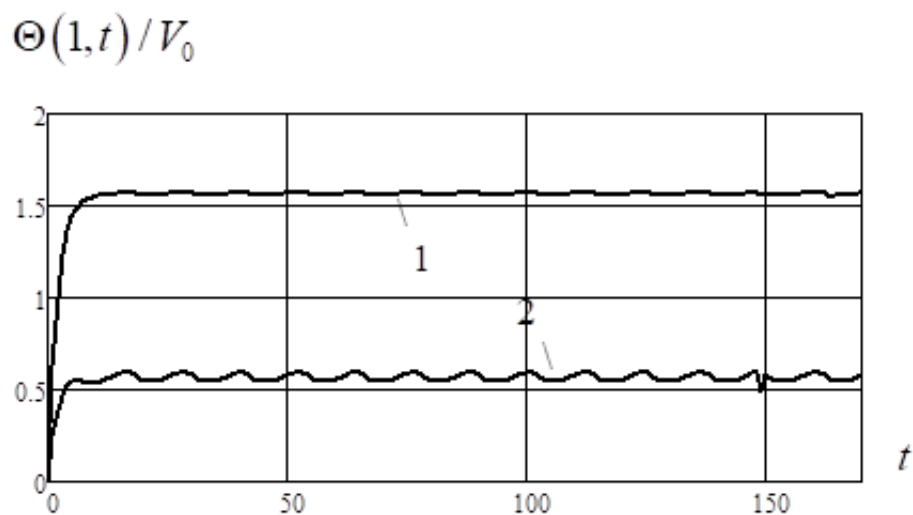
Рис. 5.2. Графики изменения амплитудных значений потенциала $\phi(r,t)$ (кривая 1) и напряженности $E_r(r,t)$ (кривая 2) электрического поля по радиальной координате r

При решении задачи теплопроводности на первом этапе решается задача, связанная с определением скорости изменения температуры $\dot{\Theta}_0(r) = \dot{\Theta}_0$ в начальный момент времени. Величина $\dot{\Theta}_0$ определялась из условия, что в случае действия гармонической нагрузки при установившемся режиме в исследуемом элементе наблюдается постоянное температурное поле.

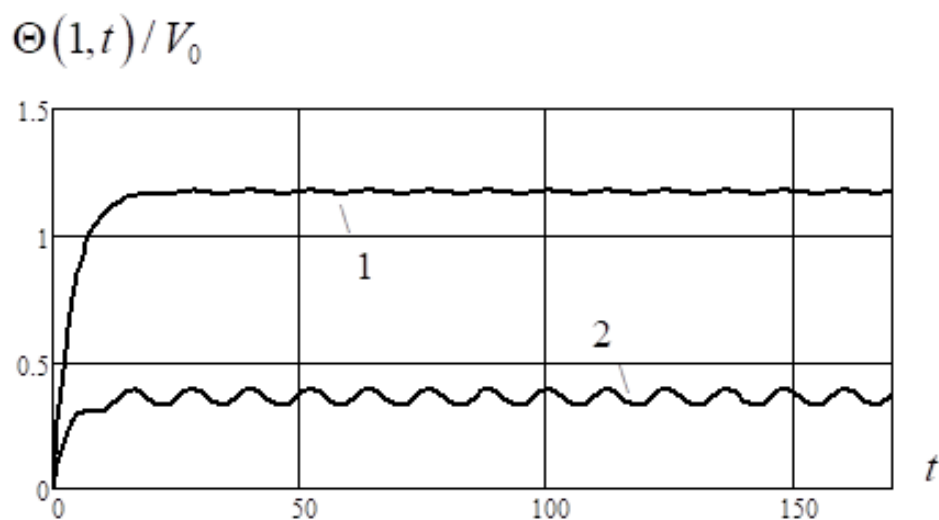
На рисунке 5.3 представлены графики изменения температуры $\Theta^*(1,t)$ во времени t пьезокерамического цилиндра состава PZT-4 с различной толщиной

стенки. Очевидно, что условие $\frac{\partial \Theta^*(1,t)}{\partial t} = 0$ выполняется для элементов с внешним радиусом $b = 0.02, 0.01, 0.002$ (м) соответственно при $\dot{\Theta}_0 = 0.8/V_0, 0.3/V_0, 0.2/V_0$. (рисунок 5.3, графики 1).

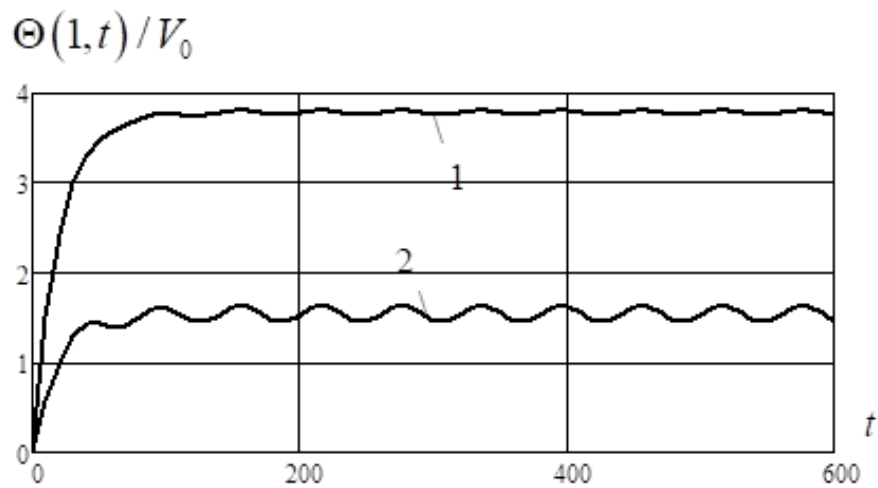
Здесь следует отметить, что полученные качественные результаты можно получить только при использовании гиперболической теории теплопроводности.



а) $b = 0.02$ м, 1- $\dot{\Theta}_0 = 0.8/V_0$, 2- $\dot{\Theta}_0 = 0.3/V_0$



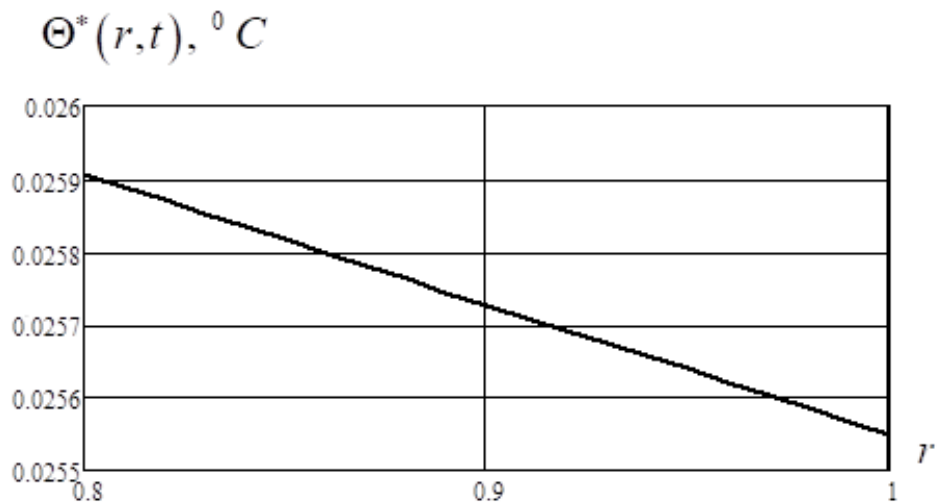
б) $b = 0.01$ м, 1- $\dot{\Theta}_0 = 0.3/V_0$, 2- $\dot{\Theta}_0 = 0.1/V_0$



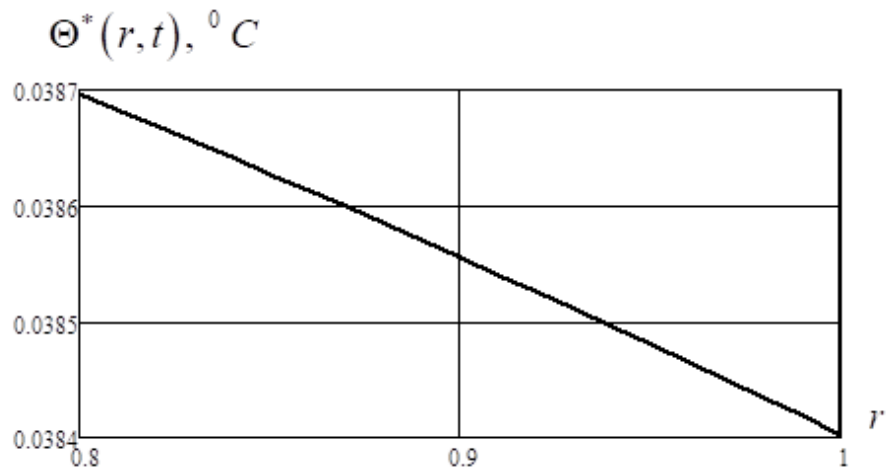
в) $b = 0.002 \text{ м}$, 1- $\dot{\Theta}_0 = 0.2/V_0$, 2- $\dot{\Theta}_0 = 0.1/V_0$

Рис. 5.3. Графики изменения температуры $\Theta(1,t)$ по времени t ($R = 0.8$)

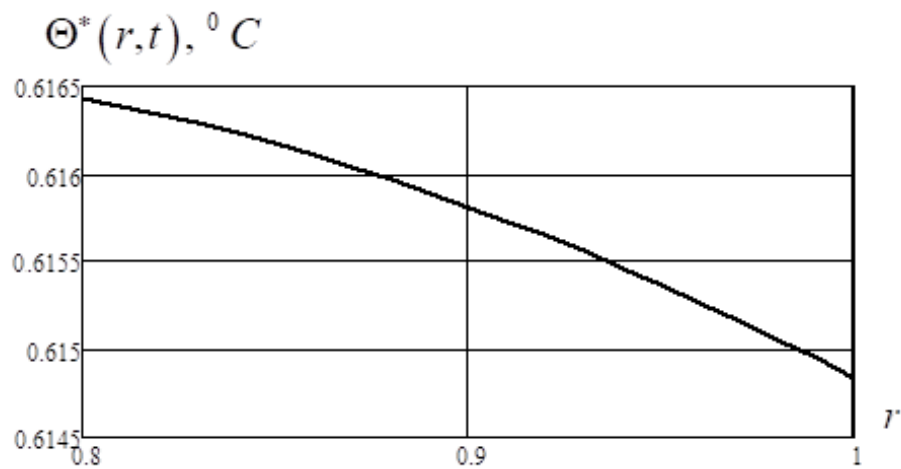
Принимая $T_0 = 295 \text{ К}$ ($22 \text{ }^\circ\text{C}$), $V_0^* = 10 \text{ В}$, получаем следующую картину изменения амплитудного значения температурного поля по радиальной координате в цилиндре с различной толщиной стенки (рисунок 5.4).



а) $b = 0.02 \text{ м}$



б) $b = 0.01 \text{ м}$



в) $b = 0.002 \text{ м}$

Рис. 5.4. Графики изменения температуры $\Theta^*(r,t)$ по радиальной координате r

Был выполнен натурный эксперимент, где измерения температуры проводились с помощью прибора Center 301. Результаты показали, что температура на лицевых поверхностях исследуемого элемента ($b = 0.01 \text{ м}, R = 0.8$) при внешнем электрического воздействия повысилась на $0.1 \text{ } ^\circ\text{C}$, что практически повторяет результаты теоретических расчетов (рисунок 5.3,5.4).

Для оценки влияния температуры на электроупругое поле правые части дифференциальных уравнений R_1, R_2 (5.12) записываются следующим образом:

$$R_1 = \nabla\Theta - a_3 \frac{\Theta}{r} - \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2},$$

$$R_2 = -a_6 \nabla\Theta + \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} - a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r}.$$

На рисунке 5.5 представлены зависимости " $U(1,t) - t$ " с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) влияния температуры на радиальные перемещения. Численный анализ результатов показывает, что температурное поле цилиндра состава PZT-4 ($b = 0.02 \text{ м}, R = 0.8$) практически не влияет на величину $U(1,t)$, т.е. в задачах обратного пьезоэффекта можно пренебречь потерями энергии на нагрев электроупругой системы.

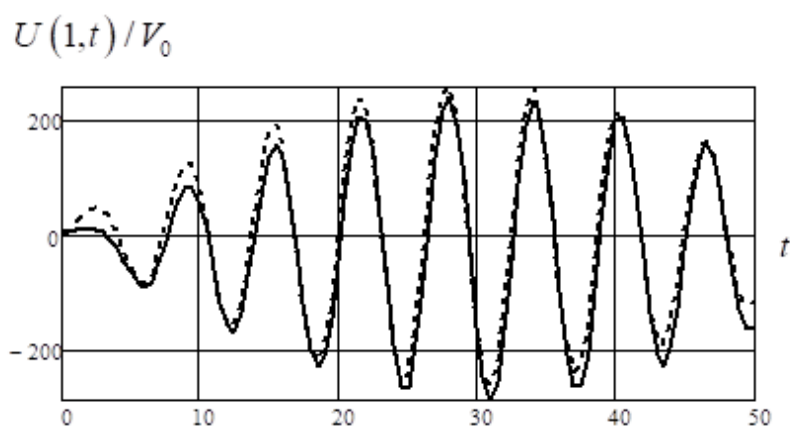


Рис. 5.5. Графики изменения температуры $U(1,t)$ по времени t (сплошная и пунктирная линии – с учетом и без учета влияния температурного поля)

В заключении следует отметить, что при решении динамических задач прямого и обратного пьезоэффекта пьезокерамические элементы можно рассматривать, как консервативные системы, т.е. пренебрегать потерями энергии на их нагрев.

5.5. Анализ работы пьезоактюатора

В настоящее время в различных технических устройствах применяются пьезоэлектрические актюаторы, которые позволяют улучшить их эксплуатационные характеристики. В данных пьезокерамических конструкциях, выполненных из пьезокерамики, используется их способность изменять геометрические размеры при действии внешнего электрического поля для генерирования перемещений в микрометровом диапазоне (явление обратного пьезоэффекта).

Использование пьезоактюаторов позволяет проектировать управляющие системы способные создавать перемещения любой формы с высокой скоростью реагирования на управляющий электрический сигнал. В частности, одним из перспективных направлений является создание пьезокерамических быстродействующих клапанов для топливной системы двигателей внутреннего сгорания. Их использование позволяет наиболее эффективно управлять рабочими характеристиками двигателя путем контроля формы и длительности впрыска топлива.

Проектным отделом ООО «СамараГазСтрой» выполняются работы, связанные с оптимизацией работы системы впрыска топлива в камеру розжига котлов различного назначения. Для реализации данной задачи возникла необходимость проведения исследования, связанного с анализом влияния температуры на работу пьезоактюатора в виде длинного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра в случае действия электрической нагрузки в виде разности потенциалов. При этом внутренняя цилиндрическая поверхность данного преобразователя жестко закреплена с металлическим заземленным сердечником (рис.5.6).

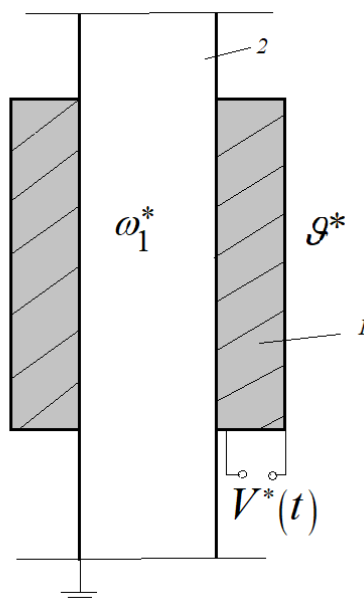


Рис. 5.6. Расчетная схема преобразователя:

1 – пьезокерамический цилиндр, 2 – сердечник.

Были рассмотрены две линейные задачи: статическая задача термоэлектроупругости при заданной температуре внутренней цилиндрической поверхности

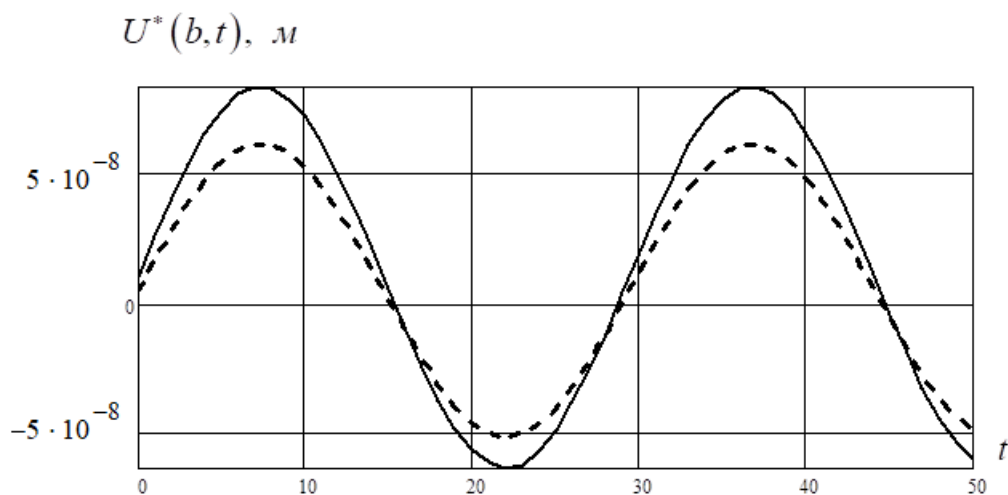
цилиндра (глава 3) и нестационарная задача обратного пьезоэффекта (глава 4). Использование принципа суперпозиций позволяет обобщить полученные решения. При этом внутренняя поверхность цилиндра жестко закреплена в радиальной плоскости.

На рисунке 5.7 приведены графики изменения перемещений $U(1,t)$ во времени t для цилиндра, изготовленного из различных составов пьезокерамики и различной толщиной стенки ($b = 0.02$ м). Сплошной и пунктирными линиями соответственно обозначены результаты для $R = 0.8, 0.5$. Температура на внутренней поверхности пьезокерамического элемента $\omega_1^* = 100$ °C.

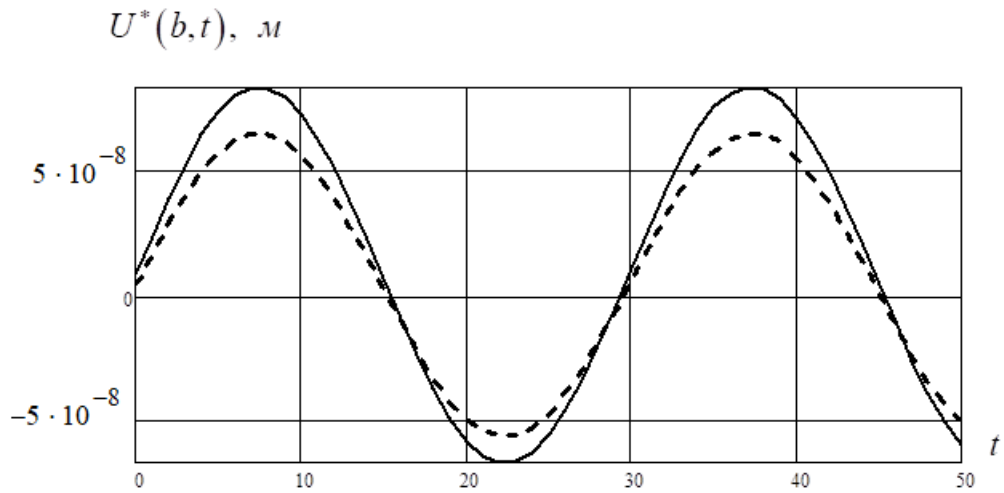
Рассматривается случай действия гармонической электрической нагрузки на электродированных поверхностях цилиндра:

$$V^*(t) = V_0^* \sin \theta^* t,$$

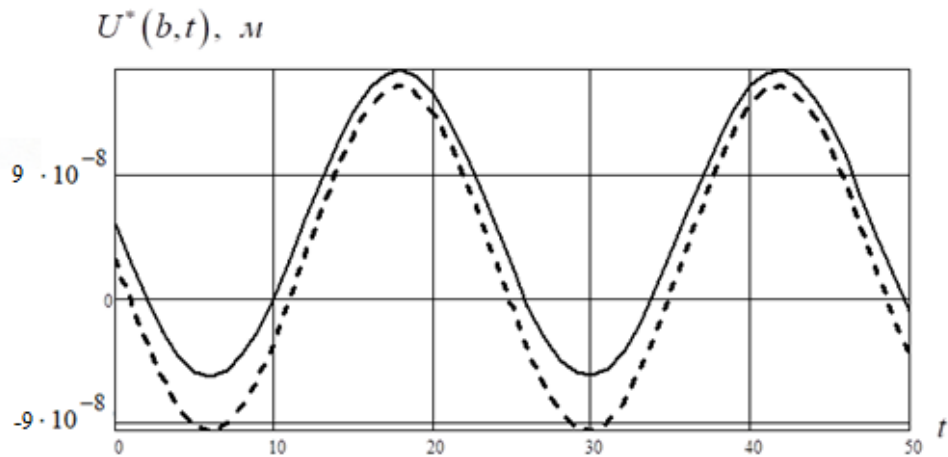
где $V_0^* = 10$ (В), $\theta^* = 0.2\lambda_1$, λ_1 – первая частота собственных осесимметричных колебаний.



a) PZT-4



б) PZT-5A



в) ПКР-35

Рис. 5.7. График изменения перемещений $U(1,t)$ по времени t : сплошная линия – $R = 0.8$,
пунктирная линия – $R = 0.5$

На основании полученных численных результатов были сделаны следующие рекомендации, связанные с проектированием пьезокерамического актюатора: – для контроля перемещений при описании радиальных колебаний необходимо использовать пьезокерамический материал с низким коэффициентом линейного расширения. При использовании пьезокерамик состава PZT-4, PZT-5A вклад температурных перемещений (перемещения при $t = 0$) составляют менее 10% от амплитудных перемещений. Использование пьезокерамики состава ПКР-35, имеющей существенно большее значение коэффициента линейного расшире-

ния, приводит к образованию температурных перемещений $U^*(b,0)$, величина которых составляет не менее 30% от амплитудных перемещений;

– в случае действия электрического импульса в виде одной полуволны при использовании пьезокерамики составов PZT–4, PZT–5A происходит увеличении радиуса стенки цилиндра, а при использовании состава ПКР–35– наблюдается обратная картина;

– увеличение толщины стенки пьезокерамического цилиндра приводят к уменьшению перемещений, связанных с увеличением внешнего радиуса цилиндра. При этом наиболее оптимальная относительная величина цилиндра, позволяющая наиболее эффективно преобразовать электрический сигнал составляет $R = 0.8$.

Полученные результаты расчета и рекомендации были использованы в работе проектного отдела ООО «СамараГазСтрой», что подтверждается актом внедрения результатов расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании выполненных исследований, для длинного полого пьезокерамического цилиндра, можно сформулировать основные достигнутые результаты и выводы:

1) Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода. Разработанный алгоритм позволяет определить напряженно–деформированное состояние, электрическое поле, а также температурное поле без учета скорости изменения объема и напряженности электроупругой системы;

2) Разработан алгоритм расчета и получено новое замкнутое решение связанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода.

3) Получено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости без учета сил инерции электроупругой системы при выполнении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода.

4) Разработан алгоритм расчета и получено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи обратного пьезоэффекта для термоупругого цилиндра.

5) Разработано программное обеспечение в системе Mathcad –15, позволяющее проводить анализ связанных и несвязанных термоэлектроупругих полей в незакрепленном пьезокерамическом цилиндре. Численные результаты расчета позволяют подобрать геометрические размеры электроупругой конструкции и состав пьезокерамического материала, позволяющие наиболее эффективно преобразовать температурное поле в электрический импульс.

6) Выполнено сравнение теоретических результатов расчета с численными данными, полученные с помощью вычислительного комплекса ANSYS, что позволило сделать вывод, что численные методики позволяют описать работу нере-

зonenных преобразователей энергии только при действии стационарного температурного поля.

7) Разработанные алгоритмы расчета используются ООО «СамараГазСтрой» при проектировании пьезокерамического актюатора. Кроме того, результаты данных исследований нашли применение в учебном процессе при подготовке магистрантов по направлению «Строительство» в СамГТУ по направлению «Строительство».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Магнитоупругие колебания электропроводящей ортотропной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле / С.А. Амбарцумян, С.В. Саркисян // Изв. Нац. АН Армении. Мех. – 1997 (50). № 3-4. – С. 3-16.
2. Афонин С.М. Пьезопреобразователи для приводов микроперемещений / С. М. Афонин // Приборы и системы управления. – 1998. – № 2. – С. 41– 42.
3. Барфут Дж. Полярные диэлектрики и их применение / Дж. Барфут, Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1981. – 526 с.
4. Белоконь А. В. Расчет некоторых типов задач термоэлектроупругости с использованием пакетов ANSYS и ASELAN / А. В.Белоконь, А. В. Наседкин // Изв. вузов, Северо-Кавказский регион, специальный выпуск. – 2004. – С. 52-55.
5. Белянкова Т.И., Калинин В.В. К моделированию преднапряженноготермоэлектроупругого полупространства с покрытием / Т.И. Белянкова, В.В. Калинин // Известия российской академии наук. механика твердого тела. – 2017. № 1. – С. 117-135.
6. Бобцов А.А. Исполнительные устройства и системы для микроперемещений / А.А. Бобцов, В.И. Бойков, С.В. Быстров, В.В. Григорьев. – СПб.: ГУ ИТМО, 2011. – 131 с.
7. Буш А.А. Пироэлектрический эффект и его применения. Учебное пособие / А.А. Буш // Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет). – М., 2005. – 212 с.
8. Васин Н.Н. Система измерения температуры вращающихся объектов / Н.Н. Васин // Приборы и техника эксперимента. – 1996. – № 5. – 167 с.
9. Ватульян А. О. О некоторых закономерностях поведения решений в термоэлектроупругости / А. О. Ватульян // Изв. вузов. Северо-Кавказский Регион. – 1999. – № 3. – С. 28 - 31.

10. Ватульян А. О. Об анализе движений в термоэластопластичности / А. О. Ватульян // Современн., пробл. мех. сплошной среды: Труды 4-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону. 27-28 окт. 1998 г. Т. 1. – Ростов н/д. 1998. – С. 79-83.
11. Ватульян А. О. Тепловы удар по термоэластопластичному слою / А. О. Ватульян // Вестник Донского государственного технического университета. – Ростов н/д. – 2001. – Т. 1. № 1(7). – С. 82-88.
12. Ватульян А.О. Вариационный принцип термоэластопластичности и его применение в задаче о колебаниях тонкостенного элемента / А.О. Ватульян, В.В. Ковалева // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 1. – С. 196 – 201.
13. Ватульян А.О. Динамическая задача термоэластопластичности для функционально-градиентного слоя / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т.10, № 2. – С. 117–126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
14. Ватульян А.О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэластопластичности / А. О. Ватульян, А. Ю. Кирютенко, А. В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – № 5, – С.135-142.
15. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике/ И.А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
16. ГОСТ Р 8.945–2018. Теплофизические характеристики пьезокерамик на основе ниобата лития в диапазоне температур от 300 К до 900 К. – М.: Стандартинформ, 2018. (www.docs.cntd.ru).
17. Глозман И.А. Пьезокерамика / И. А. Глозман. – М.: Энергия, 1972. –288 с.
18. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка,1989. – 279 с.
19. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы / В. И. Даниловская // ПММ. – Т. 14. Вып. 3. – С. 316-318.

20. Джагуров Р.Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления / Р.Г. Джагуров. – СПб.: Политехника, 1994. – 608 с.
21. Домаркас В.И. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи / В.И. Домаркас, Р-И.Ю. Кажис. – Вильнюс: Минтис, 1975. – 255 с.
22. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Сукиязов А.Г., Айзикович С.М. Индикация термо-упругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки / В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, А.Г. Сукиязов, С.М. Айзикович // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05
23. Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры / Б.П. Ионов, А.Б. Ионов // Датчики и системы. – 2009. – № 2. – С. 9–12.
24. Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры / А.А. Казарян // Датчики и системы. – 2016. – № 3(201). – С. 50–56.
25. Кальмова М.А. The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields / М.А. Кальмова // The Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. – 2015. – №3-4. – С.112-117.
26. Кальмова М.А., Шляхин Д.А. Использование пьезо- и пирозффектов в измерительных приборах / М.А. Кальмова, Д.А. Шляхин // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство и строительные технологии: сборник статей 79-ой Всероссийской научно-технической конференции под редакцией М.В. Шувалова, А.А. Пищулева, А.К. Стрелкова. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2022. – С. 849-855.
27. Кальмова М.А., Шляхин Д.А. Становление и развитие аналитических методов решения динамических задач термоэлектроупругости / М.А. Кальмова, Д.А. Шляхин // Математические модели техники, технологий и экономики:

материалы Всероссийской научно-практической студенческой конференции. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. – С. 6-11.

28. Кальмова М.А. Определение напряженно-деформированного состояния упругого элемента при действии температурной нагрузки / М.А. Кальмова // Научный альманах центрального Черноземья. –2022. – №4, ч.1 –С. 67-73.

29. Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэластостатики для цилиндрического тела, выполненного из пьезокерамики / М. А. Кальмова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12-14 декабря 2022 г. — Воронеж, 2023. — С. 1044-1049.

30. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

31. Кирилюк В. С. О напряженном состоянии пьезокерамического тела с плоской трещиной при симметричных нагрузках / В. С. Кирилюк // Приложение. Механика. – 2005. (41). – № 11. – С. 1263-1271.

32. Куликов Г.М. Вариационные уравнения термоэластостатики для многослойной композитной оболочки / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, В.П. Ярцев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 628-637.

33. Куликов М.Г. Расчет адаптивных многослойных тонкостенных конструкций, подверженных температурному воздействию / М.Г. Куликов, С.В. Плотникова // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2010. – № 2 (18). – С. 7-17.

34. Куликов Г.М. Точный 3D термоэластостатический анализ пьезоэлектрические пластины методом отбора проб поверхностей / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Мех. Adv. Матер. Структура. – 2015. № 22. – С. 33-43.

35. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.

36. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости / С.А. Лычев, А.В. Манжиров, С.В. Юбер // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 138–154.
37. Мак-Скимин Г. Ультразвуковые методы измерения механических характеристик жидкостей и твердых тел / Г. Мак-Скимин // Физич. акустика. – 1966. – Т.1, ч.А. – С. 327-397.
38. Методы и приборы ультразвуковых исследований / под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – 592 с.
39. Новожилов Ю.В. Электродинамика / Ю.В. Новожилов, Ю.А. Яппа. – М.: Наука, 1978,-352с.
40. Панич А.А. Кристаллические и керамические пьезоэлектрики / А.А. Панич, М.А. Мараховский, Д.В. Мотини // Инженерный вестник Дона. – 2011. – № 1 (www.indon.ru).
41. Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма / А.А. Паньков // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 2. – С. 72-82.
42. Партон В.З. Применение метода символического интегрирования в теории пьезокерамических оболочек/ В.З. Партон, Н.А. Сенник // ПММ. – 1983. – Т.47. – №2. – С. 257-262.
43. Партон, В.З. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел/ В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 470 с.
44. Пряхина О.Д. Учет связанности физических полей в динамических задачах для многослойных сред / О.Д. Пряхина, А.В. Смирнова, М.В. Самойлов, Р.Г. Маслов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 54-60.
45. Радаев Ю.Н. Волновые числа термо-упругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке / Ю.Н. Радаев, М.В. Таранова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2(23). – С. 53–61.

46. Ратманова О.В. Dynamic actions of a two-layer freely supported beam / О.В. Ратманова, М.А. Кальмова // *Lecture Notes in Civil Engineering*. – 2022. – Т. 189. – С. 3-9. (Scopus)
47. Савин В.Г. Преобразование электрических импульсов в акустические экранированной сферической пьезокерамической оболочкой / В.Г. Савин, И.О. Моргун // *Прикл. мех.* – 2007. – №2 (43). – С.133-142.
48. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики / Ю.Э. Сеницкий // *Известия вузов. Математика*. – 1996. – № 8. – С. 71–81.
49. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям / Ю.Э. Сеницкий // *Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Матем., механ., информатика*. – 2011. – № 3(1). – С. 61-89.
50. Сеницкий, Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики / Ю. Э. Сеницкий // *Известия вузов. Математика*. – 1991. – № 4. – С. 57–63.
51. Смажевская Е. Г., Фельдман Н. В. Пьезоэлектрическая керамика / Е. Г. Смажевская, Н. В. Фельдман. – М.: Советское радио, 1971. – 199 с.
52. Свердлин Г.М. Прикладная гидроакустика / Г.М. Свердлин. – Л.: Судостроение, 1976. – 280 с.
53. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье / И. Н. Снеддон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
54. Снеддон, И. Н. Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон., Д.С. Берри. – М.: ГИФиз.-мат. лит., – 1961. – 220 с.
55. Сыромятников П.В., Ратнер С.В. Интегральные представления термоупругих полей в многослойных средах с плоскими осесимметричными неоднородностями / П.В. Сыромятников, С.В. Ратнер // *Вестник Южного научного центра РАН*. – 2008. – Т. 4. – № 1. – С. 8-15.

56. Тимошкина Е. А. Электроупругие волны в пьезоматериалах с периодической структурой / Е. А. Тимошкина // Тр. 17 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН Украины, Киев, 19-22 мая, 1992. ч. 2 / Ин-т мех. АН Украины. 1992. – С. 153-157.
57. Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля под общ. ред. И.Н. Ермолова. – М.: Машиностроение, 1986. – 280 с.
58. Фирсанов В.В. Напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории / В.В. Фирсанов, Л.Х. Нгуен // Тепловые процессы в технике. – 2020. – Т. 12. – № 3. – С. 110-117.
59. Шарапов В.М. Пьезоэлектрические датчики / В.М. Шарапов, М.П. Мусиенко, Е.В. Шарапова. – Техносфера. – 2006. – 632 с.
60. Шарапов В.М. Пьезоэлектрические трансформаторы и датчики / В.М. Шарапов и др.; под ред. В.М. Шарапова. – Черкассы: Вертикаль, 2010. – 278 с.
61. Шляхин Д.А. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2022. – Т. 189. – С. 263-271.
62. Шляхин Д.А. Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для длинного пьезокерамического цилиндра, обладающего термоупругими свойствами / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство и строительные технологии: сборник статей 78-ой Всероссийской научно-технической конференции под редакцией М.В. Шувалова, А.А. Пищулева, А.К. Стрелкова. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2021. – С. 935-944.
63. Шляхин Д.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – №2. – С. 181-190 DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16
64. Шляхин Д.А. Нестационарная связанная задача термоупругости для изотропного длинного цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Традиции и ин-

- новации в строительстве и архитектуре: сборник статей под редакцией М.В. Шувалова. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – С. 416-421.
65. Шляхин Д.А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэластичности для длинного полого пьезокерамического цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // *Advanced Engineering Research*. – 2022. – Т. 22, № 2. – С. 81-90. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90>
66. Шляхин Д.А. Связанная нестационарная задача термоэластичности для длинного полого цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2020. – Т. 23, № 4. – С. 677-691.
67. Шляхин Д.А. Unsteadythermoelasticity problem for rigidly fixed round plate / Д.А. Шляхин, Ж.М. Кусаева, М.А. Кальмова // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – 775. doi:10.1088/1757-899X/775/1/012137.
68. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача термоэластичности для жесткозакрепленной круглой пластины / Д.А. Шляхин, Ж.М. Даулетмуратова // *Инженерный журнал: наука и инновации*. – 2018. – 5(77). DOI.1018698/2308–6033–2018–5
69. Шляхин Д.А. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоэластичности для жесткозакрепленной круглой пластины / Д.А. Шляхин, Ж.М. Даулетмуратова // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2019. – № 4. – С. 191–200. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.18
70. Шляхин Д.А. Related thermoelastic elastomeric task for long cylinder/ Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // *AIP Conference Proceedings*. – 2023. – 2497. – 030009. <https://doi.org/10.1063/5.0103490>.
71. Элекина Е.Н., Кальмова М.А., Кулакова Е.А. Напряженно-деформированное состояние неоднородного длинного цилиндра нагруженного внутренним динамическим давлением / Элекина Е.Н., Кальмова М.А., Кулакова Е.А. // *Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: сборник статей под редакцией М.В. Шувалова*. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т. – 2020. – С. 449-454.

72. Akbarzadeh, A.H. The Thermo-electromagnetoelastic Behavior of a Rotating Functionally Graded Piezoelectric Cylinder / A.H. Akbarzadeh, M.H. Babaei, Z.T. Chen // *Smart Materials and Structures*. – 2011. – 20. – 065008. DOI: 10.1088/0964-1726/20/6/065008.
73. Altay, G.A. Fundamental, variational equations of discontinuous thermopiezoelectric fields / G.A. Altay, M.C. Dökmeci // *International Journal of Engineering Science*. – 1996. – 34. – №7. – P. 769-782.
74. Aouadi, M. Generalized thermo-piezoelectric problems with temperature-dependent properties / M. Aouadi // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – 43. – P. 6347-6358.
75. Babeshko, V.A. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions / V.A. Babeshko, S.V. Ratner, P.V. Syromyatnikov // *Dokl. Phys.* – 2007. – 52. – P. 90-95. doi.org/10.1134/S102833580702005X
76. Benaissa, H. Existence results for unilateral contact problem with friction of thermo-electro-elasticity / H. Benaissa, E.H. Essoufi, R. Fakhar // *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* – 2015. – 36. – P. 911-926. <https://doi.org/10.1007/s10483-015-1957-9>
77. Bert, C. Stressdependency of the thermoelastic and piezoelectric coefficients / C. Bert, V. Birman // *AIAA J.* – 1999. – 37(1). – P. 135-137.
78. Courant, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations / R. Courant // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1943. – № 49. – P. 1-23. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07818-4>.
79. Chen, C.Q. Piezothermoelasticity analysis for acircular cylindrical shell under state of axisymmetric deformation / C.Q. Chen, Y.P. Shen // *International Journal of Engineering Science*. – 1996. – № 34(14). – P. 1585-1600.
80. Chen, W. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell / W. Chen, T. Shioya // *Journal of Thermal Stresses*. – 2001. – 24(2). – P. 105-120. DOI:10.1080/01495730150500424

81. Dai, H. L. Stress wave propagation in laminated piezoelectric spherical shells under thermal shock and electric excitation / H. L. Dai, X. Wang // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2005. – 24. P. 263–276.
82. Ding, H.J. Динамическая реакция пьезоэлектрической полой сферы на радиальную деформацию. Dynamic response of a pyroelectric hollow sphere under radial deformation / H.J. Ding, H.M. Wang, W.Q. Chen // *Eur. J. Mech. A*. – 2004. – 22 (4). – P. 617-631.
83. Giorgi, C. Constitutive equations and wave propagation in Green–Naghdi type II and III thermoelasticity / C. Giorgi, A. Montanaro // *Journal of Thermal Stresses*. – 2016. – 39(9). – P. 1051-1073.
DOI: 10.1080/01495739.2016.1192848
84. Gornandt, A. Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures / A. Gornandt, U. Gabbert // *Acta Mechanica*. – 2002. – 154. – P. 129-140.
85. Green, A.E. On undamped heat waves in an elastic solid / A.E. Green, P.M. Naghdi // *J. Thermal Stresses*. – 1992. – №15. – P. 253–264.
86. Green, A.E. Thermoelasticity without energy dissipation/ A.E. Green, P.M. Naghdi // *J. Elasticity*. – 1993. – №31. – P. 189–208.
87. Guo, S.H. Термоэлектромагнитные волны в пьезоупругих телах. The thermo - electromagnetic waves in piezoelectric solids / S.H. Guo // *Acta mech*. – 2011. – 219 (3 – 4). – P. 231-240.
88. Gupta, Mange Ram. Симметричные колебания упругих полупроводников в форме сферической оболочки при воздействии механического, термического и электрического полей. Symmetric vibrations of an elastic semiconductor in the form of a spherical shell under mechanical, thermal and electric fields / Mange Ram Gupta // *Indian J. Pure and Appl. Math*. – 1990. – 21 (6). – P. 582-596.
89. Iesan, D. О некоторых теоремах в теории термоэлектроупругости. On some theorems in thermopiezoelectricity / D. O. Iesan // *J. Therm. Stresses*. – 1989. – 12 (2). P. 209 - 223.

90. Ishihara, M. Thermoelastic response of a piezoelectric cylinder with D_{∞} symmetry under axisymmetric mechanical and thermal loading / M. Ishihara, Y. Ootao, Y. Kameo and T. Saito // *Mechanical Engineering Journal*. – 2017. – 4 (5). – P. 1-13. DOI: 10.1299/mej.16-00609
91. Joseph, F. Théorie analytique de la chaleur / F. Joseph. – Paris: Firmin Didot Père et Fils, 1822. – 151 p. (цитируется по: Жизнь науки. Сост.: С.П. Капица, М.: Наука, 1973 г. – 151 с.)
92. Kaczyński, A. On 3d anticrack problem of thermoelasticity / A. Kaczyński // *Acta mechanica et automatica*. – 2018. – 12 (2). – P. 1–6.
DOI 10.2478/ama-2018-0018
93. Khorsand, M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks / Mohammad Khorsand // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2014. – 228. P. 632 - 645.
94. Lage, G.R. Layer wise partial mixed finite element analysis of magneto-electro-elastic plates / G.R. Lage, C.M. Soares, C.F. Soares, J.N. Reddy // *Comput. Struct.* – 2004. – 76. – P. 299–317.
95. Li, Y. Exact thermoelastic solution of layered one-dimensional quasicrystal cylindrical shells / Y. Li, L. Yang, L. Zhang, Y. Gao // *Journal of Thermal Stresses*. – 2018. – 41(10-12). – P. 1450-1467.
DOI:10.1080/01495739.2018.1520618
96. Liew, K.M. Active control of FGM plates subjected to a temperature gradient: modelling via finite element method based on FSDT / K.M. Liew, X.Q. He, T.Y. Ng, S. Sivashanker // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2001. – 52. – P. 1253-1271.
97. Lord, H. A generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. Lord, Y. Shulman // *J. Elasticity*. – 1967. – № 15(5). – P. 299–309.
98. Mahmoud, W. A One-Dimensional Problem of Nonlinear Thermo-Elasticity with Thermal Relaxation / W. Mahmoud, M. Abou-Dina, A. R. E.

Dhaba, A. Ghaleb, E. K. Rawy // Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials. – 2018. – 1. – P. 505-518. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72440-9_26

99. Mindlin, R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin // International Journal of Solids and Structures. – 1974. – № 10. – P. 625-637.

100. Mindlin, R.D. On the equations of extensional motion of crystal plates / R.D. Mindlin, H. L. Cooper // Quarterly of Applied Mathematics. – 1961. – №19. P. 111-118.

101. Montanaro, A. On piezothermoelastic plates subject to prescribed boundary temperature / A. Montanaro // Meccanica. – 2011. – 46. – P. 383–398.

<https://doi.org/10.1007/s11012-010-9320-1>

102. Neumann, F.E. Ueber die Theorie d. Elasticität / F.E. Neumann. – J. Leipzig, 1885. – 104 p.

103. Nowacki, W. Some general theorems of thermopiezoelectricity / W. Nowacki // J. Therm. Stress. – 1978. – 1. – P. 171-182.

104. Obata, Y. Steady thermal stress in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient materials / Y. Obata, N. Noda // J Therm Stress. – 1994. – 14. – P. 471–487.

105. Ootao, Y. Three-dimensional transient piezothermoelasticity of apiezoelastic rectangular plate due to partial heating / Y. Ootao, Y. Tanigawa // Nihon kikaigakkaironbunshu. A Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. – 1998. 64 (626). – P. 2636-2644.

106. Othman, M.A., Reflection of magneto-thermoelasticity waves with temperature dependent properties in generalized thermoelasticity / M.A. Othman, R. Kumar // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. – 2009. – 36(5). – P. 513-520.

107. Paul, H.S. Wave propagation in a hollow pyroelectric circular cylinder of crystal class 6mm / H.S. Paul, G.V. Raman // Acta Mech. – 1991. – 87(1/2). – P. 37-46.

108. Podil'chuk, Y.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems / Y.N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics*. – 2003. – 39. – P. 132-170. <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>
109. Rahimi, G.H. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads / G.H. Rahimi, M. Arefi, M.J. Khoshgoftar // *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* – 2011. – 32 (997). <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>
110. Rao, S.S., Sunar M. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures / S.S. Rao, M. Sunar // *AIAA Journal*. – 1993. – 31. P. 1280-1286.
111. Saadatfar, M. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient / M. Saadatfar, A.S. Razavi // *J MechSciTechnol.* – 2009. – № 23. – P. 45–53. <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-82009>
112. Saadatfar, M., Rastgoo, A. Stress in piezoelectric hollow sphere with thermal gradient / M. Saadatfar, A. Rastgoo // *J MechSciTechnol.* – 2008. – 22 (8). – P. 1460 - 1467. <https://doi.org/10.1007/s12206-008-0423-8>.
113. Sladeka, J. Dynamic 3D axisymmetric problems in continuously non-homogeneous piezoelectric solids / J. Sladeka, V. Sladeka, P. Solekb, A. Saezc // *International Journal of Solids and Structures*. – 2008. – 45 (16). – P. 4523-4542.
114. Selvamani, R. Influence of thermo-piezoelectric fieldina circular / R. Selvamani // *Physics and mechanics of materials*. –2016. – 27. P. 1-8.
115. Shang, F. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material / F. Shang, M. Kuna, T. Kitamura // *Part I: Analytical development Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2003. – 40 (3). – P. 237-246.
116. Shang, F. Analytical solutions for two penny-shaped crack problems in thermo-piezoelectric materials and their finite element comparisons / F. Shang, M. Kuna, M. Scherzer // *International Journal of Fracture*. – 2002. – 117. – P. 113-128.

117. Sulym, H. Boundary Element Modeling of Pyroelectric Solids with Shell Inclusions / H. Sulym, I. Pasternak, V. Pasternak // *Mechanics and Mechanical Engineering*. – 2018. – 22 (3). – P. 727–737. doi.org/10.2478/mme-2018-0057.
118. Tzou, H.S. Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems: theory and finite element analysis / H.S. Tzou, R. Ye // *Journal of Vibration and Acoustics*. – 1994. – 116. – P. 489-495.
119. Wang, Q. Wave propagation in a piezoelectric coupled solid medium / Q. Wang // *ASME. J. Appl. Mech.* – 2002. – 69 (6). – P. 819-824.
120. Whatmore, R.W. Pyroelectric arrays: ceramics and thin films / R.W. Whatmore // *Journal of electroceramics*. – 2004. – 13 (1-3). – P. 139-147.
121. Yang, J.S. Equations for Small Fields Superposed on Finite Biasing Fields in a Thermoelastic Body / J.S. Yang // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. – 2003. – 50/2. – P. 187–192.
122. Zenkour, A.M. Bending analysis of piezoelectric exponentially graded fiber-reinforced composite cylinders in hygrothermal environments / A.M. Zenkour // *Int J. Mech. Mater. Des.* – 2017. – 13. – P. 515-529. <https://doi.org/10.1007/s10999-016-9351-4>Zhu
123. Xiao-jing. Исследование теплопередачи и термоэлектромагнитоупругости на основе уравнения Больцмана под электромагнитным внешним воздействием / Xiao-jing // *Lanzhou daxue xuebao. Ziran kexue ban J. Lanzhou Univ. Natur. Sci.* – 2005. – 41 (2). – P. 104-108.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассматривается стационарная осесимметричная задача для полого толсто-стенного цилиндра, выполненного из анизотропного материала, занимающего в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$, при известном законе изменения в его теле приращения температурного поля $\Theta^*(r_*, z_*)$ ($\Theta^*(r_*, z_*) = T(r_*, z_*) - \Theta_0$, $T(r_*, z_*)$, Θ_0 – абсолютная температура и первоначальная температура). Его торцевые поверхности жестко закреплены в аксиальной плоскости и свободны от закрепления в радиальной. Цилиндрические поверхности свободны от напряжений.

В общем случае дифференциальные уравнения равновесия стационарной задачи теории термоупругости относительно компонент вектора перемещений и приращения температуры и граничные условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_3 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} = a_4 \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$$z = 0, h \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$r = R, 1 \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{U}{r} + a_6 \frac{\partial W}{\partial z} = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где $\{U, W, r, z, h, R\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*, a\} / b$, $\Theta = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \Theta^*$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$,

$$a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, \quad a_4 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_5 = \frac{C_{12}}{C_{11}}, \quad a_6 = \frac{C_{13}}{C_{11}},$$

$U^*(r_*, z_*)$, $W^*(r_*, z_*)$ – компоненты вектора перемещений в размерной форме;

C_{ms}, α_t – модули упругости, и линейного теплового расширения материала

$(m, s = \overline{1,5})$; $\gamma_{11} = C_{11}\alpha_t$, $\gamma_{33} = C_{33}\alpha_t$ – компоненты тензора температурных напряжений; $\omega_1(z) = \Theta(R, z)$, $\omega_2(z) = \Theta(1, z)$.

При исследовании краевой задачи (1) – (3) используется синус – и косинус – преобразования Фурье с конечными пределами по переменной z , используя следующие трансформанты

$$U_c(r, n) = \int_0^h U(r, z) \cos(j_n z) dz, \quad W_s(r, n) = \int_0^h W(r, z) \sin(j_n z) dz, \quad (4)$$

с соответствующими формулами обращения

$$U(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^{-1} U_c(r, n) \cos(j_n z), \quad W(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} W_s(r, n) \sin(j_n z), \quad (5)$$

$$j_n = n\pi/h, \quad \Omega_n = \begin{cases} h, & (n=0) \\ h/2, & (n \neq 0) \end{cases}.$$

В пространстве изображений Фурье получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{d}{dr} \nabla U_c - a_1 j_n^2 U_c + a_2 j_n \frac{dW_s}{dr} = F_1, \quad (6)$$

$$a_1 \nabla \frac{dW_s}{dr} - a_3 j_n^2 W_s - a_2 j_n \nabla U_c = a_4 F_2;$$

$$r = R, 1 \quad \frac{dU_c}{dr} + a_5 \frac{U_c}{r} + a_6 j_n W_s = \{\omega_{1c}, \omega_{2c}\}, \quad \frac{dW_s}{dr} - j_n U_c = 0, \quad (7)$$

где $F_1(r, n) = \frac{d}{dr} \int_0^h \Theta(r, z) \cos(j_n z) dz$, $F_2(r, n) = \int_0^h \frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} \sin(j_n z) dz$,

$$\{\omega_{1c}(R, n), \omega_{2c}(1, n)\} = \frac{d}{dr} \int_0^h \{\omega_1(R, z), \omega_2(1, z)\} \cos(j_n z) dz.$$

Систему (6) приводим к разрешающему уравнению относительно функции W_s :

$$\nabla \frac{d}{dr} \nabla \frac{dW_s}{dr} + b_1 \nabla \frac{dW_s}{dr} + a_3 j_n^4 W_s = F_H, \quad (8)$$

правая часть, которого допускает следующую факторизацию на коммутативные сомножители:

$$\left(\nabla \frac{d}{dr} - A^2 \right) \left(\nabla \frac{d}{dr} - B^2 \right) W_s = F_H, \quad (9)$$

$$\text{где } F_H = a_4 j_n^2 F_2 + \frac{a_2}{a_1} j_n \nabla F_1 + \frac{a_4}{a_1} \nabla \frac{dF_2}{dr}, \quad b_1 = \left(\frac{(a_2^2 - a_1^2 - a_3)}{a_1} \right) j_n^2, \quad A_n = \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_3 j_n^4}}{2} \right)^{0.5},$$

$$B_n = \left(\frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_3 j_n^4}}{2} \right)^{0.5}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (9) имеет вид:

$$W_s(r, n) = D_{1n} I_0(A_n r) + D_{2n} K_0(A_n r) + D_{3n} I_0(B_n r) + D_{4n} K_0(B_n r) + \int_R^r \frac{F_H(\tau, n)}{\det \|B_{ms}(\tau)\|} \sum_{m=1}^4 \det \|G_{ms}(r, \tau)\| d\tau, \quad (10)$$

где $I_\nu(\dots), K_\nu(\dots)$ – модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода порядка ν , $\det \|B_{ms}(\tau)\|$ – определитель Вронского, составленный для частных решений одно-родного уравнения (9) ($m = \overline{1, 4}, s = \overline{1, 4}$), $\det \|G_{ms}(r, \tau)\|$ – определитель, полученный из $\det \|B_{ms}\|$ путем замены каждый раз s – го столбца на столбец элементов $\|0 \ 0 \ 0 \ 1\|^T$ и умноженный на соответствующее частное решение (9), $D_{1m} \dots D_{4m}$ – постоянные интегрирования.

Выражение для функции $U_c(r, n)$ получается при приведении системы (6) к (8) и имеет вид:

$$U_c(r, n) = \frac{1}{a_2 j_n^3} \frac{d}{dr} \nabla \frac{dW_s}{dr} + \frac{(a_2 a_2 - a_3)}{a_1 a_2 j_n} \frac{dW_s}{dr} - \frac{1}{a_1 j_n^2} F_1 - \frac{a_4}{a_1 a_2 j_n^3} \frac{dF_2}{dr}. \quad (11)$$

Подстановка (10), (11) в граничные условия (7) позволяет определить постоянные интегрирования.

Окончательные выражения для определения перемещений получаются в результате подстановки (10), (11) в (5).

В качестве примера исследуется цилиндр ($b = 0.02$ м, $a = 0.16$ м, $h^* = 1$ м), выполненный из анизотропного материала, имеющего следующие физико – механические характеристики, соответствующей пьезокерамике состава PZT-4 без учета электрического поля: $\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{55}\} = \{11.5, 7.78, 7.43, 13.9, 2.56\} \times 10^{10}$ Па, $\alpha_t = 0.4 \times 10^{-5}$ К⁻¹.

Рассматривается случай изменения приращения температурного поля в цилиндре по следующей зависимости в безразмерной форме, который моделирует вариант установившегося теплового режима (линейный закон по радиальной координате):

$$\Theta(r, z) = (1 - R)^{-1} [(\omega_2(z) - \omega_1(z))r + \omega_1(z) - \omega_2(z)R],$$

$$\omega_1(z) = A_1 + A_2 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right), \quad \omega_2(z) = A_3 + A_4 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right),$$

где $A_1 \dots A_4$ – амплитудные значения нагрузки.

Принимаем, что в срединной поверхности цилиндра ($z = h/2$) амплитудное значение нагрузки $\omega_2^*(z) = A_3 + A_4 = 80$ К, $\omega_1^*(z) = A_1 + A_2 = 70$ К, $(\{A_1, A_2, A_3\} = \{A_1^*, A_2^*, A_3^*\} \frac{\gamma_{11}}{C_{11}})$.

Причем, когда $A_1^* = 0$ рассматривается случай равномерно-распределенной температурной «нагрузки» по высоте рассматриваемого элемента.

На рисунке 1 представлены графики изменения перемещений $U(1, z)$, $W(1, z)$ по аксиальной координате при различных зависимостях изменения $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ по высоте цилиндра. Цифрами 1, 2, 3 соответственно обозначены результаты:

$$1 - \omega_1(z) = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right), \quad \omega_2(z) = A_4 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right);$$

$$2 - \omega_1(z) = A_1 + 0.1A_1 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right), \quad \omega_2(z) = A_3 + 0.1A_3 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right); \quad 3 - \omega_1(z) = A_1, \quad \omega_2(z) = A_3.$$

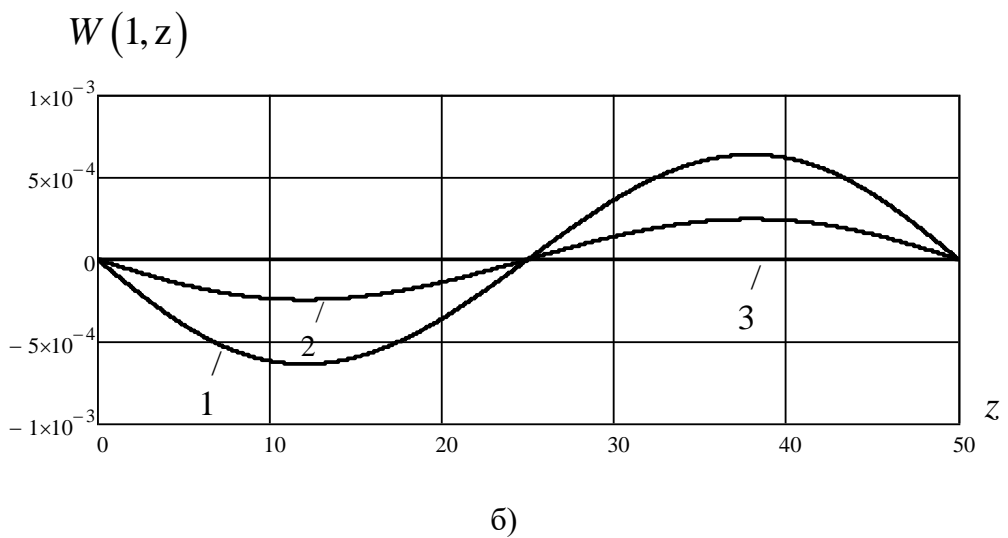
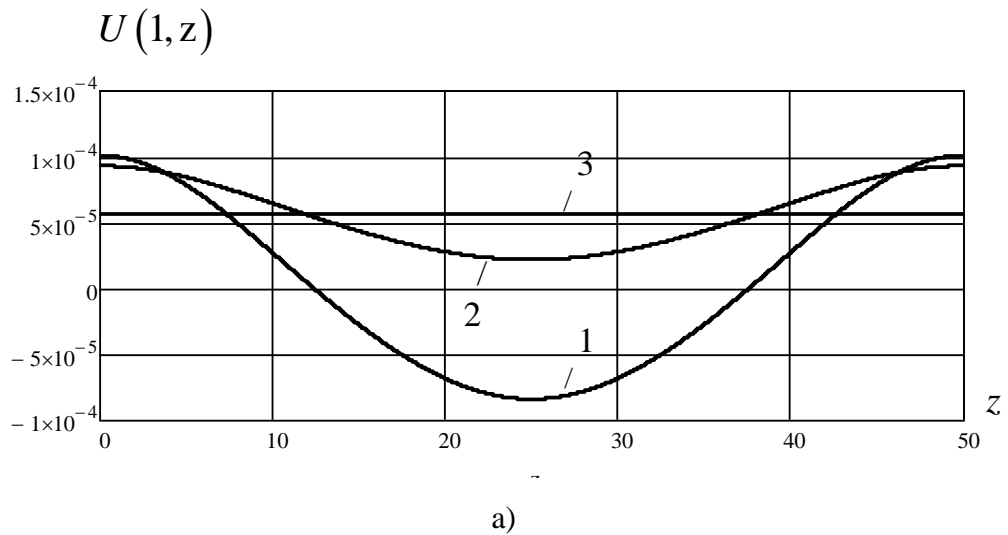


Рис. 1. Изменение перемещений по аксиальной координате: 1- $\omega_1(z) = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$, $\omega_2(z) = A_4 \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$;
 2- $\omega_1(z) = A_1 + 0.1A_1 \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$, $\omega_2(z) = A_3 + 0.1A_3 \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$; 3- $\omega_1(z) = A_1$, $\omega_2(z) = A_3$.

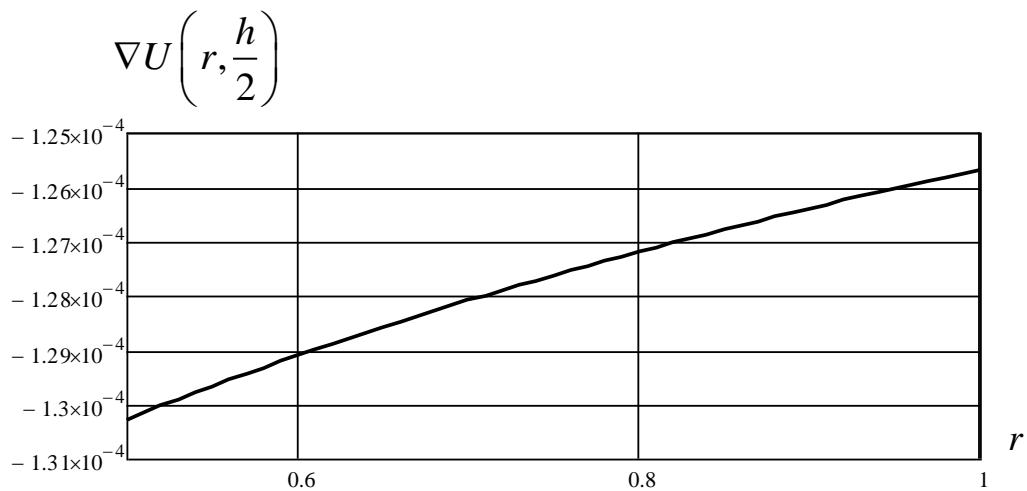
Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

– при существенном изменении температурной нагрузки по высоте цилиндра в виде одной полуволны (рис.1, а, график 1) в средней части цилиндра при $z = \frac{h}{2}$ наблюдается уменьшение его радиуса. При более гладком распределении нагрузки происходит качественное изменение картины деформирования (рис.1, а, график 2), связанное с увеличением радиуса цилиндра;

– при определении вертикальной компоненты вектора перемещений $W(1, z)$ более гладком распределении нагрузки по высоте приводит к уменьшению перемещений (рис.1,б, графики 1,2);

– действие постоянной по высоте температурной нагрузки (3) приводит к образованию радиальной компоненты $U(1, z)$, которая практически не изменяется по высоте сечения (рис.1, а, график 3). Кроме того, вертикальная компонента $W(1, z)$ на несколько порядков меньше соответствующих величин полученных при загрузке (1, 2) и ее без большой погрешности можно принять равной нулю.

На рисунках 2 – 4 представлены графики изменения относительных деформаций $\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = \nabla U$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}$ при различных зависимостях изменения $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ по высоте цилиндра. Именно в таком сочетании относительные деформации учитываются в уравнении теплопроводности.



а) $\nabla U\left(r, \frac{h}{2}\right) - r$

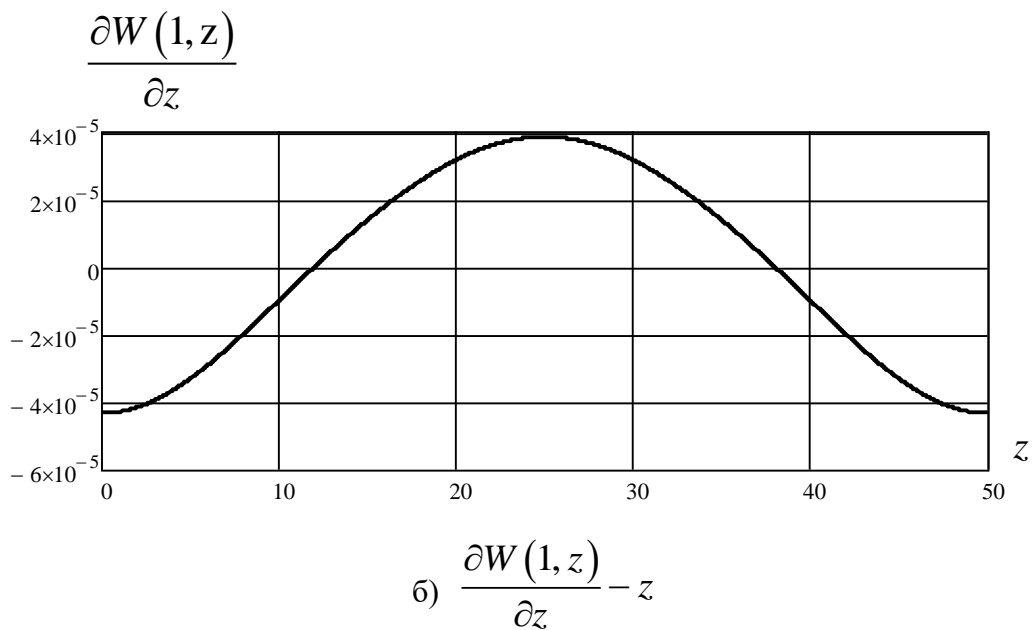
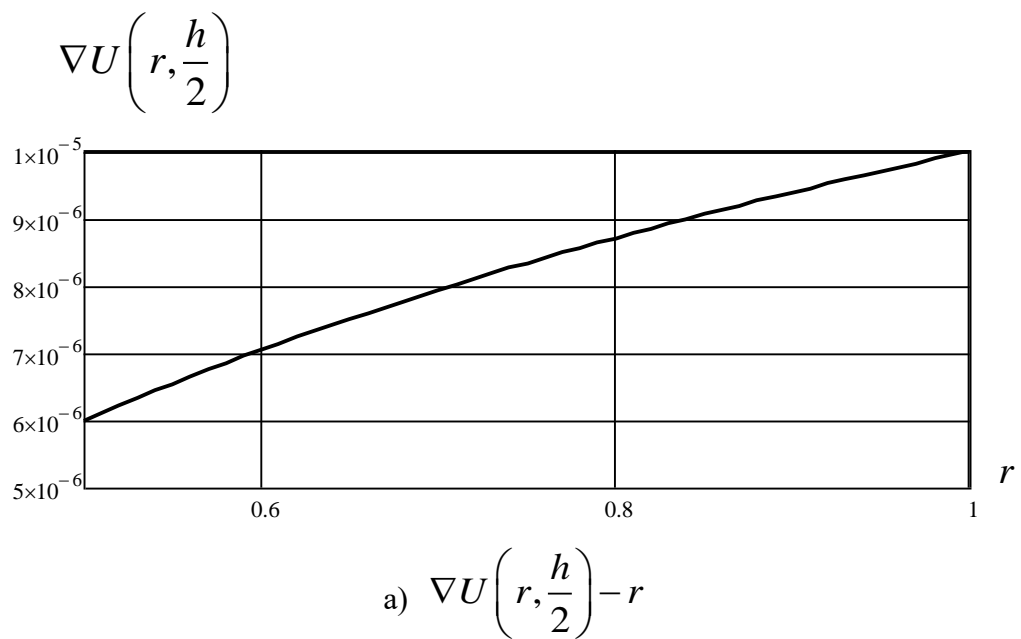
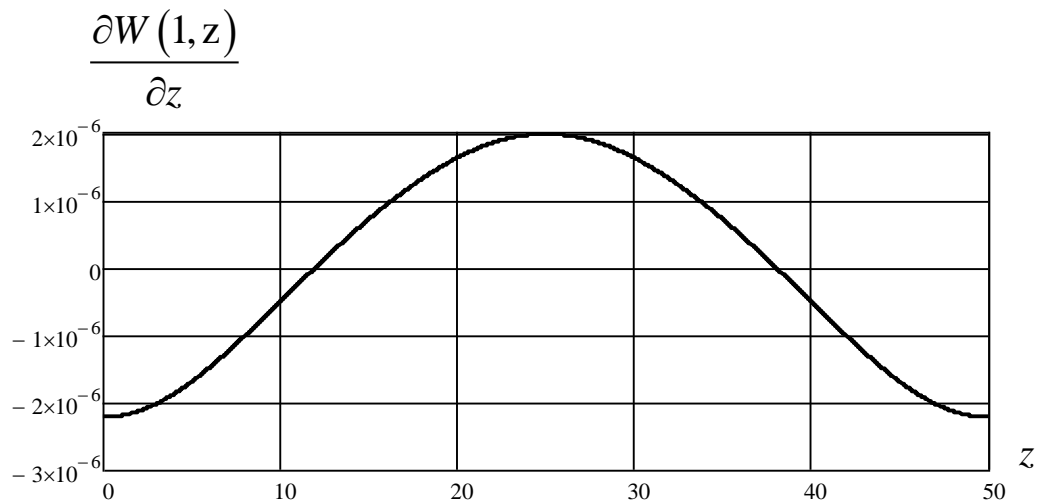


Рис. 2. Изменение относительных деформаций по радиальной и аксиальной координате:

$$\omega_1(z) = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \quad \omega_2(z) = A_4 \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right);$$

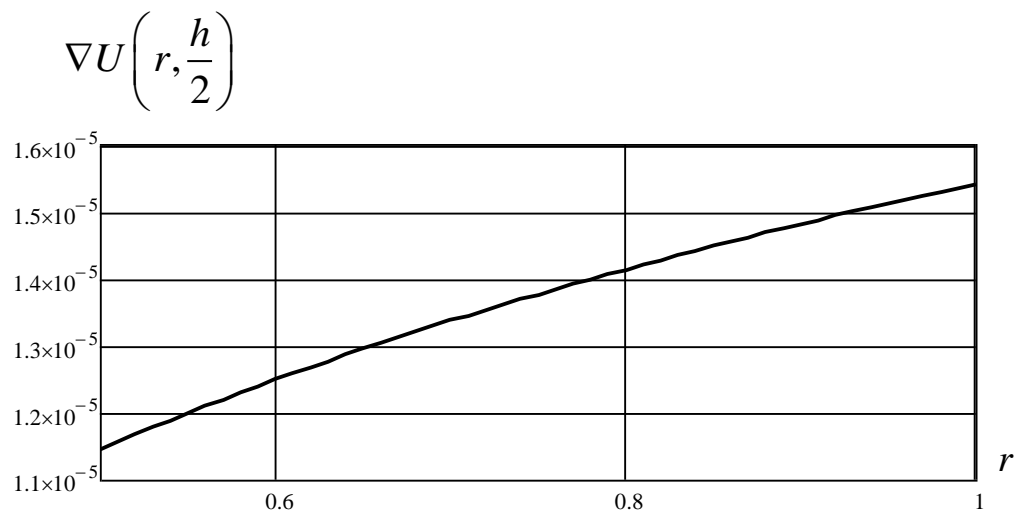




$$\text{б) } \frac{\partial W(1, z)}{\partial z} - z$$

Рис. 3. Изменение относительных деформаций по радиальной и аксиальной координате:

$$\omega_1(z) = A_1 + 0.1A_1 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right), \quad \omega_2(z) = A_3 + 0.1A_3 \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$$



$$\text{а) } \nabla U\left(r, \frac{h}{2}\right) - r$$

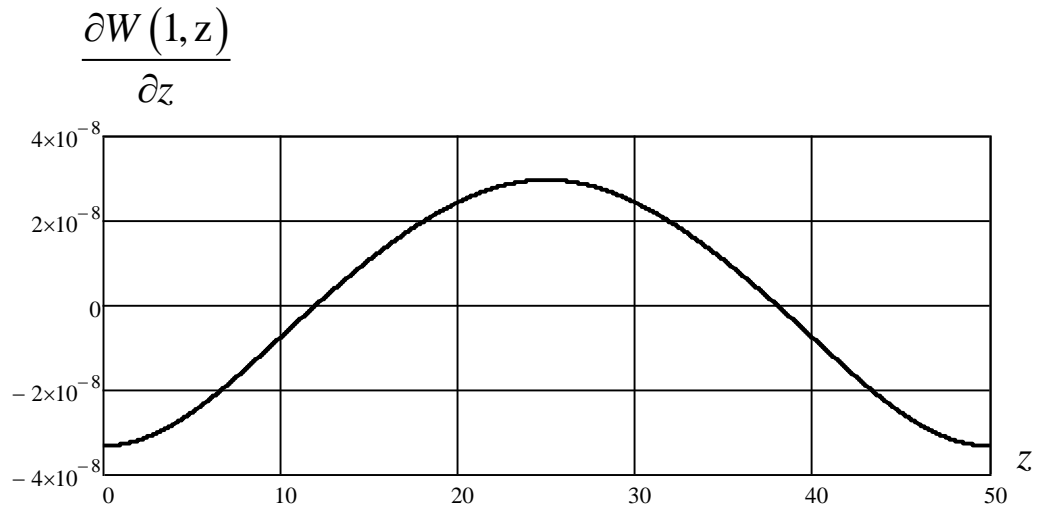


Рис. 4. Изменение относительных деформаций по радиальной и аксиальной координате:

$$\omega_1(z) = A_1, \quad \omega_2(z) = A_3$$

Здесь можно сделать следующие выводы:

– при существенном изменении температурной нагрузки по высоте цилиндра в виде одной полуволны (рис. 2) и более гладком распределении нагрузки (рис. 3)

величина относительных деформаций $\nabla U\left(r, \frac{h}{2}\right)$ практически в три раза больше

относительных деформаций $\frac{\partial W(1,z)}{\partial z}$;

– в случае изменения температурного поля, не зависящего от аксиальной координаты, разница между данными деформациями становится еще более существенной.

На основании полученных численных результатов можно сделать вывод, что при исследовании цилиндра конечных размеров в случае постоянного значения температурного поля по его высоте, в уравнении теплопроводности, включающей компоненты тензора деформаций, **можно пренебречь относительными деформациями по аксиальной координате и учитывать только радиальные и окружные деформации.**

ПРИЛОЖЕНИЕ 2



Общество с ограниченной ответственностью
«СамараГазСтрой»

ОГРН 1136317005846, ИНН 6314038302, КПП 631401001
443015, г. Самара, ул. Шоссейная, 21
E-mail: samaragasstroy@gmail.com
тел. 8-960-832-02-44



Утверждаю:

Директор

ООО "СамараГазСтрой"

Доронин И.В.

«22» мая 2023 г.

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы

старшего преподавателя кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты»

АСА СамГТУ Кальмовой М.А.

ООО "СамараГазСтрой" осуществляет разработку измерительных приборов с использованием пьезокерамических материалов. В частности, выполняет проектные работы по разработке пьезоэлектрических датчиков температуры (ДХС 514), в которых в качестве основного рабочего элемента используется длинный полый цилиндр.

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Кальмовой М.А. «Нестационарная механика радиальных осесимметричных термоэлектроупругих полей в длинном пьезокерамическом цилиндре», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, посвященные исследованию сложных нестационарных процессов в длинном пьезокерамическом цилиндре, с учетом связанности упругих, электрических и температурных полей напряжений, использованы ООО «СамараГазСтрой» при проектировании датчиков температуры. Это привело к существенной экономии средств за счет уменьшения объема экспериментальных исследований при проектировании измерительных приборов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный
технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)
Академия строительства и архитектуры
(АСА СамГТУ)

ул. Молодогвардейская, 244,
гл. корпус, г. Самара, 443100
Тел.: (846) 278-43-11, факс (846) 278-44-00
E-mail: rector@samgtu.ru
ОКПО 02068396, ОГРН 1026301167683,
ИНН 6315800040, КПП 631601001

№ _____
На № 154 от 11.05.2023



АКТ

внедрения результатов диссертационной работы
старшего преподавателя кафедры «Строительная механика, инженерная геология,
основания и фундаменты» АСА СамГТУ
Кальмовой М.А.

Материалы диссертационной работы Кальмовой М.А. «Нестационарная механика радиальных осесимметричных термоэлектроупругих полей в длинном пьезокерамическом цилиндре» используются в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению 08.04.01 «Строительство» (профиль образования «Теория сооружений») и при изучении дисциплины «Взаимодействие упругих элементов конструкции с сопряжёнными полями гидроупругости, термоупругости, электроупругости».

Зав. кафедрой СМИГОФ
д.т.н., доцент



Шляхин Д.А.