

На правах рукописи



Кусаева Жанслу Маратовна

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ТЕРМОУПРУГИХ ПОЛЕЙ В ОДНОСЛОЙНЫХ И
МНОГОСЛОЙНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНАХ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Самара – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет»

Научный руководитель:

Шляхин Дмитрий Аверкиевич, доктор технических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Лычев Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва Московской области

Букатый Алексей Станиславович, доктор технических наук, профессор кафедры «Соппротивление материалов» Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара Самарской области

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов Саратовской области

Защита состоится «18» февраля 2022 г. в 13 часов 00 минут на заседании объединенного диссертационного совета 99.2.039.02 (Д999.122.02) на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» и ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, главный корпус, аудитория 200.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»: http://d99912202.samgtu.ru/sites/d99912202.samgtu.ru/files/dis_Kusaeva.pdf

Отзывы на автореферат просим высылать в двух экземплярах, заверенных печатью, по адресу: Россия, 443100, г. Самара ул. Молодогвардейская, 244, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета 99.2.039.02 (Д999.122.02)

Автореферат разослан «___» _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета:



А.Р.Луц

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. При проектировании современных приборов и конструкций различного назначения, возникает необходимость исследования их работы в условиях неравномерного нестационарного нагрева. Данное воздействие сопровождается возникновением температурных деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать в случае всестороннего анализа прочностных характеристик упругих систем конечных размеров. При этом задача существенно усложняется при анализе работы многослойных конструкций, широко используемых в настоящее время.

Для определения напряженно–деформированного состояния и характера распределения температурного поля в конструкции с учетом взаимного влияния термоупругих полей используются разнообразные теории, позволяющие решить данную проблему с различной степенью точности. При этом математическая формулировка рассматриваемых задач, даже в линейной постановке, включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности. Проблема их интегрирования и построение общего решения приводит, как правило, к исследованию только уравнения теплопроводности без учета изменения формы упругой системы или к анализу задач термоупругости в несвязанной постановке. Однако для более качественной оценки нестационарных термомеханических процессов в конструкциях возникает необходимость построения связанных аналитических решений в трехмерной постановке. Данный подход позволяет получить точные, в рамках используемых моделей, расчетные соотношения в наиболее общем виде, а также дает возможность алгоритмизировать и автоматизировать проводимые исследования.

Таким образом, разработка эффективных аналитических методов и алгоритмов расчета упругих систем, испытывающих произвольное нестационарное температурное воздействие, выявление новых связей между характером внешнего воздействия и процессом деформирования элементов конструкций, представляет собой в настоящее время одну из актуальных проблем современной науки в области механики деформируемого твердого тела.

Степень разработанности темы диссертации. Исследования, посвященные анализу связанности температурных и упругих полей в

конструкциях конечных размеров, опираются на фундаментальные труды Дж. Дюгамеля и Ф. Неймана. В современном представлении основы классической теории, использующей закон теплопроводности Фурье, изложены в работах В. Новацкого, А.Д. Коваленко, В.Г. Карнаухова и др. В развитие данного подхода Г. Лордом, Ю. Шулманом, А. Грином и П. Нахди были разработаны различные теории, учитывающие, в отличие от классической модели, конечную скорость распространения тепла.

Большой вклад в решение прикладных задач внесли Ю.Н. Радаев, В.А. Крысько, Е.Б. Попов, А.Г. Шашкова, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский, Е.Ю. Витохин, Ю.Э. Сеницкий, В.С. Зарубин, В.А. Кудинов, И.Г. Величко, Я.С. Подстригач, Э.М. Карташов, С.А. Лычев, Е.Ф. Афанасьев, С.О. Саркисян, Р.А. Ревинский и др.

Целью диссертационной работы является разработка нового теоретического подхода по решению проблемы расчета круглых сплошных жестко закрепленных упругих пластин с учетом связанности термоупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки, а также проведение качественного и количественного анализа термоупругих процессов в исследуемых системах.

Для достижения поставленной цели были построены новые решения несвязанных и связанных несамосопряженных начально–краевых задач классической теории термоупругости для однослойных и многослойных тел в трехмерной постановке.

Методы исследования. Для решения поставленных линейных краевых задач используются конечные интегральные преобразования, позволяющие построить замкнутые решения самосопряженных и несамосопряженных начально–краевых задач. Построенные расчетные соотношения реализованы в среде Mathcad–15 в виде программного комплекса.

Научная новизна диссертационной работы заключается в развитии теоретических основ расчета круглых однослойных и многослойных пластин конечных размеров с учетом связанности термоупругих полей. Полученные расчетные соотношения позволяют научно обосновать и уточнить конструктивное решение проектируемых элементов конструкций различного назначения.

В работе получены следующие **новые научные результаты**:

1. Разработан алгоритм расчета, позволяющий построить новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке

для изотропной однородной жестко закрепленной круглой пластины;

2. Получено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для однослойных круглых пластин без учета сил инерции и при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;

3. Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для многослойных круглых пластин без учета сил инерции и выполнении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

4. Численные результаты расчета термоупругих процессов в изотропных круглых однослойных и двухслойных жестко закрепленных пластинах, которые позволяют провести анализ связанности температурных и упругих полей.

Теоретическая значимость работы. Разработанная методика расчета позволяет описать и проанализировать взаимосвязь полей различной физической природы в круглых пластинах при внешнем осесимметричном нестационарном температурном воздействии. Полученные замкнутые решения дают возможность выявить новые закономерности при анализе результатов, что существенно повышает теоретический уровень инженерных расчетов.

Практическая значимость работы определяется возможностью создания программного комплекса по проектированию круглых пластин в случае действия внешней нестационарной температурной нагрузки. Полученные результаты позволяют также обосновать рациональную программу экспериментов, что значительно сократит объем натурных исследований. Разработанные алгоритмы расчета нашли применение в инженерных расчетах, выполняемых проектным отделом ООО «НИПИ НГ «Петон». Результаты работы используются также в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Исследование соответствует следующим пунктам области исследований специальности 1.1.8 Механика деформируемого твёрдого тела:

4. Механика композиционных и интеллектуальных материалов и конструкций.

5. Теория упругости, пластичности и ползучести.

7. Постановка и решение краевых задач для тел различной конфигурации и структуры при механических, электромагнитных, радиационных, тепловых и прочих воздействиях, в том числе применительно к объектам новой техники.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Замкнутое решение несвязанной осесимметричной динамической задачи термоупругости в трехмерной постановке для изотропной жестко закрепленной круглой пластины;

2. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для однослойных круглых пластин без учета сил инерции при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода;

3. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для многослойных круглых пластин без учета сил инерции (граничные условия теплопроводности 1–го и 3–го рода);

4. Анализ численных результатов расчета термоупругих процессов в изотропных круглых жестко закрепленных пластинах.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений, математической постановки и методами решения рассматриваемых задач, совпадением в частных случаях представленных решений с известными результатами, соответствием экспериментальных данных, полученными автором работы, с теоретическими расчетами, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Связь работы с государственными программами научных исследований. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–31–90042 (Договор № 20–31–90042/20 от 1.09.2020).

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 76–78-х Международных научно–технических конференциях «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре», Самара, 2019–2021; Международной научной конференции "Civil, Architectural and Environmental Sciences and Technologies", Самара, 2019; XXIX, XXX Международных научных Российско–польско–словацких семинарах, 2020, 2021; Международной научно–практической конференции «Научные исследования XXI века: теория и практика», Прага, 2020; IX Международной научно–практической конференции «Наука, технологии, инновации в мире глобальных трансформаций», Ростов-на-Дону, 2021; XXVII Всероссийской научно–практической конференции «Цифровизация образования: теоретические и прикладные исследования современной науки», Ростов-на-Дону, 2021; Международной научно – исследовательской конференции «Наука.

Технологии. Общество», Саратов, 2021; II Международной научной конференции "SAMSTech-II-2021: Современные достижения в области материаловедения и технологий», Красноярск, 2021.

Полностью диссертация была представлена на расширенном семинаре кафедры «СМИГОФ» СамГТУ (зав. кафедрой Шляхин Д.А., д.т.н., доцент), на семинарах кафедр «ПМИИ» (зав. кафедрой Радченко В.П., д.ф.-м.н., профессор) и «Механика» (зав. кафедрой Клебанов Я.М., д.т.н., профессор) СамГТУ.

Публикации. По результатам данного исследования опубликовано 16 научных работ, из них 7 работ в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Работы [4,7,13–16] и экспериментальные исследования выполнены автором самостоятельно. Постановка задач, построение замкнутых решений, разработка программного комплекса и анализ полученных результатов в работах [1–3,5,6–12] диссертантом проводилась совместно с соавторами.

Объем и структура диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 171 наименования и приложений, общим объемом 128 страниц машинописи, 60 рисунков, 2 таблицы и 3 приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, излагается ее научная новизна и практическая значимость результатов, а также представлено общее содержание диссертационной работы.

В первой главе проведен обзор работ, связанных с расчетом упругих тел в случае действия нестационарной температурной нагрузки. На основании выполненного анализа литературы сделан вывод, что большинство решений краевых задач термоупругости получены с помощью прикладных и численных методов расчета. Это позволило сформулировать актуальность темы диссертации, связанной с необходимостью создания алгоритмов расчета, которые дают возможность описать сложные нестационарные термоупругие процессы в однослойных и многослойных круглых пластинах.

Во второй главе исследуется начально – краевая задача теории термоупругости для жестко закрепленной сплошной упругой пластины, занимающей в цилиндрической системе координат (r, θ, z_*)

область $\Omega : \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$, в случае действия на ее лицевых поверхностях осесимметричной нестационарной температурной нагрузки $\omega_1^*(r_*, t_*)$, $\omega_2^*(r_*, t_*)$.

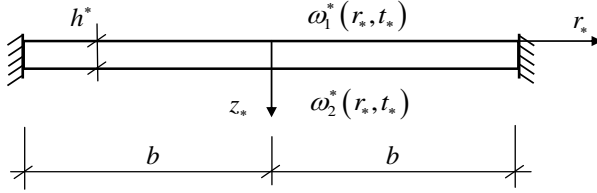


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

В общем случае осесимметричные дифференциальные уравнения термоупругости при использовании закона теплопроводности Фурье для однородной упругой изотропной среды и краевые условия в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_*^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_*^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z_*^2} - a_3 \frac{\partial \Theta}{\partial t} - a_4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0;$$

$$r=1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta(r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (2)$$

$$r=0 \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad \Theta(0, z, t) < \infty, \quad (3)$$

$$z=0, h \quad a_7 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \Theta|_{z=0, h} = \{\omega_1, \omega_2\}; \quad (4)$$

$$t=0 \quad U|_{t=0} = U_0, \quad W|_{t=0} = W_0, \quad \Theta|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \{U, W\}}{\partial t} \right|_{t=0} = \{\dot{U}_0, \dot{W}_0\}, \quad (5)$$

где $\{U, W, r, z, h\} = \frac{\{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*\}}{b}$, $\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = a_6 \{ \Theta^*, \omega_1^* - T_0, \omega_2^* - T_0 \}$,

$$t = \frac{a_5}{b} t_*, \quad \gamma = \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha_i, \quad a_1 = a_2(1-2\nu), \quad a_2 = 0.5(1-\nu)^{-1}, \quad a_3 = \frac{c_\varepsilon b}{\Lambda} a_5,$$

$$a_4 = \frac{b T_0}{\Lambda} \frac{\gamma^2}{\rho a_5}, \quad a_5 = \left[\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \right]^{0.5}, \quad a_6 = \frac{\gamma}{a_5^2 \rho}, \quad a_7 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

U^* , W^* – компоненты вектора перемещений в размерной форме;

$\Theta^* = T - T_0$, Θ^* , T , T_0 – приращение, текущая температура и первоначальная температура тела; t_* – время; E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала; α_t, c_ε , Λ – коэффициенты линейного теплового расширения, объемной теплоемкости и теплопроводности материала; $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ – известные в начальный момент перемещения и их скорости.

Проблема вычисления общего интеграла несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (1) приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается уравнение теплопроводности (последнее равенство (1)) с соответствующими краевыми условиями путем последовательного использования интегральных преобразований Ханкеля и Фурье, что позволяет получить следующее выражение для функции $\Theta(r, z, t)$:

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H(z, t) + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z) \right], \quad (6)$$

где L_H – трансформанта Фурье, H – стандартизирующая функция, j_n, λ_m – собственные значения.

На втором этапе решается задача термоупругости (первые два равенства (1)) с соответствующими условиями (2) – (5) при последовательном использовании интегрального преобразования Ханкеля и обобщенного конечного преобразования (КИП).

Преобразование Ханкеля позволяет удовлетворить только смешанные однородные граничные условия. Для этого второе равенство (2) заменяется условием наличия касательных напряжений $P_1(z, t)$ на цилиндрической поверхности пластины:

$$\sigma_{rz|r=1} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = P_1(z, t), \quad (7)$$

и вводится новая функция $w(r, z, t)$:

$$W(r, z, t) = a_8 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + w(r, z, t), \quad a_8 = (1+\nu)E^{-1}, \quad (8)$$

где $P_1(z, t), W_1(t)$ – неизвестные функции, определяемые из условия отсутствия вертикальных перемещений пластины при $r = 1$.

Использование алгоритмов соответствующих преобразований позволяет получить выражения для функций $U(r, z, t), W(r, z, t)$:

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (9)$$

$$W(r, z, t) = a_8 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

где $G, K_1, K_2, \|K_{in}\|$ – трансформанта, компоненты вектор–функции преобразований и норма ядровой функции метода КИП, H_1, H_2 – стандартизирующие функции; j_n, λ_{in} – собственные значения.

Для определения $P_1(z, t), W_1(t)$ первоначально рассматривается случай действия только температурной нагрузки $\Theta, \omega_1, \omega_2$. Тогда функция $W_1(t)$ определяется из условия $W(1, h, t) = 0$:

$$W_1(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0(j_n)} \left[H_2(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, h) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \quad (10)$$

На следующем этапе учитывается действие касательных напряжений $P_1(z, t)$, которые, принимая во внимание условия уравниваемости пластины, представляются в виде:

$$P_1(z, t) = S_0 W_1(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right). \quad (11)$$

Суммирование двух результатов расчета позволяет определить постоянную S_0 из условия интегрального равенства нулю вертикальных перемещений пластины при $r = 1$.

Соотношения (6), (9) дают возможность определить напряженно–деформированное состояние и температурное поле пластины без учета скорости изменения ее объема в процессе деформирования.

В качестве примера рассматривается жестко закрепленная круглая пластина ($b = 1\text{м}$), выполненная из теплопроводящего полимерного композита ($\Lambda = 3\text{Вт}/(\text{мК})$, $\alpha_i = 2.5 \times 10^{-5} 1/\text{К}$, $c_c = 2.1 \times 10^6 \text{Дж}/(\text{м}^3\text{К})$, $E = 1.2 \times 10^{10} \text{Па}$, $\nu = 0.2$, $\rho = 1800 \text{кг}/\text{м}^3$).

Рассматривается случай действия на верхней лицевой поверхности ($z_* = 0$) температурной нагрузки ($\omega_2^*(r_*, t_*) = 0$):

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[\sin(\theta t_*) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}, \quad (12)$$

где $H(\dots)$ – единичная функция Хэвисайда, T_{\max}^*, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время, $T_{\max}^* = 373 \text{ К}$ ($100 \text{ }^\circ\text{C}$), $T_0 = 293 \text{ К}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$).

Для оценки влияния сил инерции пластины на ее напряженно-деформированное состояние на рисунке 2 показаны графики изменения перемещений $W(0,0,t_*)$ во времени t_* для пластин различной толщины (результаты для $h^* = 0.1$ (м) увеличены в 20 раз). При $h^* = 0.1$ (м) характер изменения во времени перемещения $W^*(0,0,t_*)$ и нагрузки $\omega_1^*(0,t_*)$ совпадают, т.е. силами инерции здесь можно пренебречь. Однако в случае $h^* = 0.01$ (м) данные характеристики упругой системы оказывают существенное влияние на характер изменения перемещения.

Для обобщения полученных результатов используются известные выводы, что в случае действия гармонической нагрузки силы инерции упругой системы необходимо учитывать, когда частота вынужденных колебаний θ составляет не менее 50% от наименьшей частоты ω_{11} собственных колебаний пластины.

Принимая $\theta = \omega_{11}/2$ ($t_{\max}^* = \pi/\omega_{11}$), получаем следующую зависимость (рисунок 3) между предельным значением времени t_{\max}^* и толщиной пластины h^* , когда силами инерции в расчетах можно пренебречь (не заштрихованная часть графика) и использовать при постановке задачи уравнения равновесия.

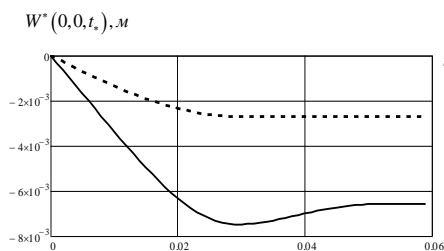


Рисунок 2 – Графики "W(0,0,t_*)-t_*

($t_{\max}^* = 0.03$ с, $h^* = 0.01, 0.1$ (м) – сплошная и пунктирная линии)

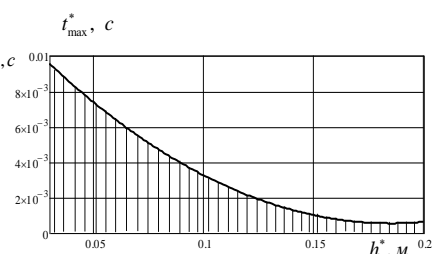


Рисунок 3 – График "t_*^max - h^*"

В третьей главе при учете ограничений по толщине пластины и скорости изменения нагрузки, позволяющих использовать в соотношениях (1) уравнения равновесия, исследуется связанная задача термоупругости (1) – (5). Здесь $a_4 = \gamma T_0 c_\varepsilon^{-1} a_6$, $t = t_* \Lambda (b^2 c_\varepsilon)^{-1}$.

Задача решается путем последовательного использования конечного интегрального преобразования Ханкеля по r и обобщенного биортогонального преобразования по z .

При этом также выполняется замена граничного условия при $r = 1$ путем использования зависимостей (7), (8).

Особенность построенного решения заключается в том, что к начально–краевой задаче относительно трансформант Ханкеля U_H, W_H, Q_H применяется вырожденное биортогональное интегральное преобразование (КИП) при использовании трансформанты:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \left[Q_H(n, z, t) + a_4 j_n U_H(n, z, t) + a_4 \frac{dW_H(n, z, t)}{dz} \right] K_3(\lambda_{in}, z) dz, \quad (13)$$

и формул обращения:

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), Q_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)\} \|K_{in}\|^2, \\ \|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_3(\lambda_{in}, z) N_3(\mu_{in}, z) dz, \quad (14)$$

где λ_{in}, μ_{in} – собственные значения соответствующих однородных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент вектор–функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

При использовании алгоритма преобразования получается счетное множество задач для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\frac{dG(\lambda_{in}, n, t)}{dt} + \lambda_{in} G(\lambda_{in}, n, t) = -F_H(\lambda_{in}, n, t); \quad (i = \overline{1, \infty} \quad n = \overline{0, \infty}), \quad (15)$$

$$t = 0 \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_{0H} \quad \left(G_{0H} = \int_0^h \left(Q_H + a_4 j_n U_H + a_4 \frac{dW_H}{dz} \right)_{r=0} K_3 dz \right), \quad (16)$$

а также однородные краевые задачи относительно неизвестных компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z)$:

$$-j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} + \lambda_{in} a_4 j_n K_{3in} = 0, \quad (17)$$

$$-a_1 j_n^2 K_{2in} + \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - \lambda_{in} a_4 \frac{dK_{3in}}{dz} = 0,$$

$$(\lambda_{in} - j_n^2) K_{3in} + \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + \frac{dK_{2in}}{dz} = 0;$$

$$z = 0, h \quad K_{2in} - \frac{a_1}{(a_2 - a_7) j_n} \frac{dK_{1in}}{dz} = 0, \quad (a_1 - a_2) j_n K_{1in} - \frac{dK_{2in}}{dz} = 0, \quad K_{3in} = 0; \quad (18)$$

и $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$:

$$-j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + j_n N_{3in} = 0, \quad (19)$$

$$-a_1 j_n^2 N_{2in} + \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - \frac{dN_{3in}}{dz} = 0,$$

$$-j_n^2 N_{3in} + \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + \mu_{in} \left(N_{3in} + a_4 j_n N_{1in} + a_4 \frac{dN_{2in}}{dz} \right) = 0;$$

$$z=0, h \quad a_7 j_n N_{1in} + \frac{dN_{2in}}{dz} = 0, \quad \frac{dN_{1in}}{dz} - j_n N_{2in} = 0, \quad N_{3in} = 0, \quad (20)$$

где F_H – трансформанта нагрузки.

Решение задач (15) – (20) позволяет получить выражения для трансформанты и компонент вектор–функций ядер КИП. Окончательные выражения функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ получим, применяя формулы обращения (14) и Ханкеля:

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_n, n, t) N_1(\mu_n, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (21)$$

$$W(r, z, t) = a_8 r^2 P_1(z, t) + W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_n, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_n, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

В качестве примера рассматривается пластина ($b=1\text{ м}$) выполненная из стали ($E=2 \times 10^{11}$ Па, $c_e=3.8 \times 10^6$ Дж/(м³К), $\nu=0.28$, $\Lambda=50$ Вт/(мК), $\alpha_t=1.2 \times 10^{-5}$ 1/К) при действии температурной нагрузки (12) ($t_{\max}^*=10$ с, $t_{\max}=(b^2 c_e)^{-1} \Lambda t_{\max}^*=1.3 \times 10^{-4}$).

На рисунках 4, 5 показаны графики изменения температуры Θ^* и компоненты тензора напряжений σ_{rr} по времени t с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей ($h=0.1$).

Для данной толщины пластины связанность термоупругих полей приводит к ее более медленному ее прогреву (рисунок 4, а) в течении времени, а также к уменьшению нормальных напряжений (рисунок 4, б). При этом скорость изменения объема тела оказывает существенное влияние только на первом этапе исследования температурного режима, когда $t_{\max} < t < 10 t_{\max}$.

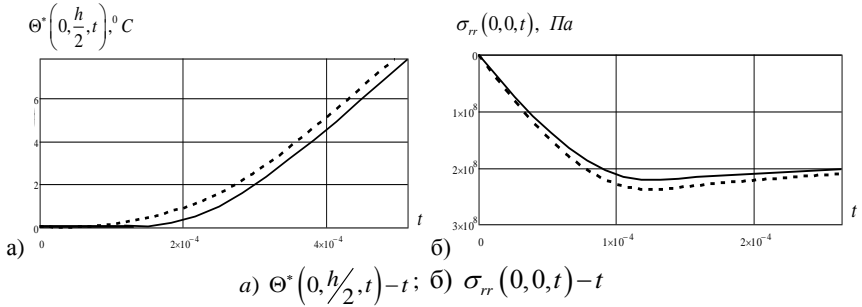


Рисунок 4 – Графики изменения Θ^* и σ_{rr} по времени с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) связанности термоупругих полей

В четвертой главе построено новое замкнутое решение связанной задачи термоупругости для многослойной (« m » слоев) круглой пластины. Рассматривается случай изменения температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$ на ее верхней ($z_* = 0$) лицевой поверхности при заданной температуре внешней среды \mathcal{G}^* на нижней ($z_* = h^*$) плоскости (граничные условия 1-го и 3-го рода).

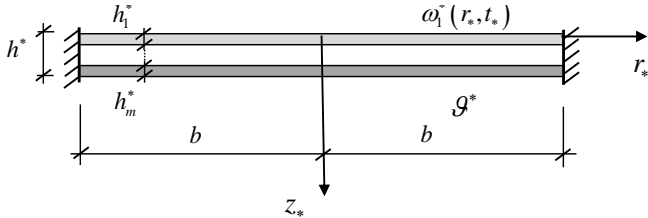


Рисунок 5 – Расчетная схема

Система дифференциальных уравнений (без учета сил инерции) аналогична (1) и сформулирована для j -го слоя.

Граничные условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме по переменной z имеют вид:

$$z = 0 \quad a_7^{(j)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \Theta = \omega_1; \quad (22)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \dots h - h_m \quad \{U, W, \Theta\}_{|z} = \{U, W, \Theta\}_{|z}, \quad (j = 1, 2 \dots m) \quad (23)$$

$$-\Lambda^{(j)} \frac{\partial T}{\partial z}|_{-z} = -\Lambda^{(j+1)} \frac{\partial T}{\partial z}|_{+z}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z} = a_{10}^{(j)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z},$$

$$\left[\left(a_7^{(j)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{11}^{(j)} \Theta \right]_{-z} = a_7^{(j)} \frac{a_{11}^{(j)}}{a_{11}^{(j+1)}} \left[\left(a_7^{(j+1)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{11}^{(j+1)} \Theta \right]_{+z};$$

$$z = h \quad a_7^{(2)} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - a_{11}^{(2)} \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad -\Lambda^{(2)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \alpha (\Theta - \vartheta); \quad (24)$$

где $\{h_m, h\} = \{h_m^*, h^*\} / b$, $a_7^{(j)} = \nu^{(j)} (1 - \nu^{(j)})^{-1}$, $a_9 = \frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(1)}}$, $a_{10}^{(j)} = \frac{E^{(j+1)} (1 + \nu^{(j)})}{E^{(j)} (1 + \nu^{(j+1)})}$, $a_{11}^{(j)} = \frac{a_{12}^{(j)}}{a_{12}^{(1)}}$,

$a_{12}^{(j)} = \frac{(1 + \nu^{(j)})}{(1 - \nu^{(j)})} \alpha_i^{(j)}$, $E^{(j)}, \nu^{(j)}, \Lambda^{(j)}, \alpha_i^{(j)}$ – модуль упругости, коэффициенты

Пуассона, теплопроводности и линейного теплового расширения j -го слоя; α – коэффициент теплоотдачи.

Соотношения (23) являются условиями совместности перемещений, напряжений и теплового контакта на поверхности соединения слоев, а последнее выражение (24) учитывает конвекционный теплообмен лицевой поверхности с окружающей средой. Количество слоев в пластине не ограничено, однако для определенности в работе принимаем ее двухслойной.

Алгоритм решения данной задачи аналогичен структуре исследования, выполненной в 3-й главе для однослойной пластины.

При этом общий интеграл систем (17), (19) определяется для j -го слоя, а окончательные выражения компонент вектор-функций ядер преобразований $K_p(\lambda_m, z)$, $N_p(\mu_m, z)$ ($p=1,2,3$), принимая во внимание их кусочно-гладкий характер, имеют вид:

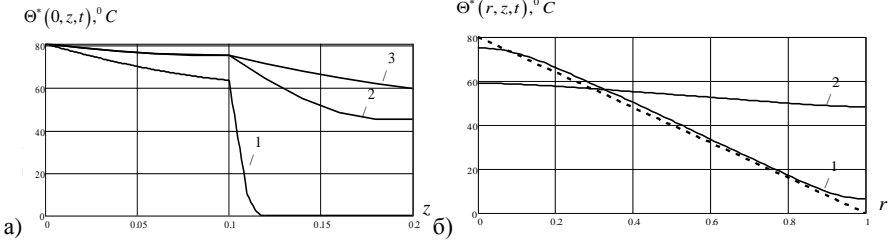
$$\{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} = \{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1),$$

$$\{N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}\} = \{N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \{N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1).$$

Окончательные выражения функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ аналогичны (21).

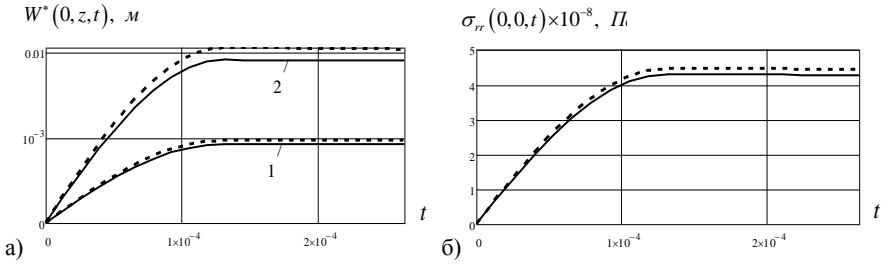
В качестве примера рассматривается двухслойная пластина ($b=1\text{м}$), изготовленная из стали ($j=1$) и пластика ($\Lambda^{(2)}=0.2\text{Вт}/(\text{мК})$), $j=2$, $\nu^{(2)}=0.33$, $E^{(2)}=0.33 \times 10^{10}\text{Па}$, $\alpha_i^{(2)}=8 \times 10^{-5}\text{1/К}$, $c_\epsilon^{(2)}=0.23 \times 10^6\text{Дж}/(\text{м}^3\text{К})$. Рассматривается случай действия на верхней лицевой поверхности ($z_*=0$) упругой системы температурной нагрузки $\omega_i^*(r_*, t_*)$ (12) при известной температуре внешней среды $\vartheta^*=293\text{ К}$ (20°C) на нижней плоскости ($\alpha=8.7\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$, $t_{\text{max}}^*=10\text{ с}$).

На рисунках 6, 7 представлены графики изменения перемещений $W^*(0, z, t)$, компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ и температурного поля $\Theta^*(r, z, t)$ по пространственным переменным и времени.



а) $1-t = t_{\max}$, $2-t = 550t_{\max}$, $3-t = 1100t_{\max}$; б) $1-z = h_1$, $2-z = h$, $t = 1100t_{\max}$

Рисунок 6 – Графики изменения температуры $\Theta^*(r, z, t)$ по пространственным координатам ($h_1 = h_2 = 0.1$, пунктирная линия – $\omega_1^*(r, t_{\max})$)



а) $1-z = h_1$, $2-z = h$; б) $z = 0$

Рисунок 7 – Графики $\{W^*(0, z, t), \sigma_{rr}(0, 0, t)\} - t$ с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная) связанности термоупругих полей ($h_1 = h_2 = 0.1$)

Анализ численных результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

– металлическая составляющая конструкции, вследствие высокой теплопроводности, при установившемся режиме имеет по ее толщине практически одинаковую температуру. В слое из пластика при относительно небольших значениях $\Lambda^{(2)}$ градиент изменения температуры существенно больше;

– учет связанность термоупругих полей приводит к уменьшению перемещений $W^*(0, z, t)$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ до 5% во время ее прогрева.

Пятая глава посвящена экспериментальной проверке методики расчета двухслойной круглой пластины ($b = 0.2$ м, $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.15$). На рисунке 9 приведены графики изменения температуры во времени при действии следующей нагрузки:

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = T_{\max}^* \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right] H(R - r_*),$$

Где $T_{\max}^* = 373 \text{ K}$ ($100 \text{ }^\circ\text{C}$), $T_0 = \vartheta^* = 293 \text{ K}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$), $\theta = \pi/(2t_{\max}^*)$, $t_{\max}^* = 10 \text{ с}$, $R = 0.04 \text{ м}$ – радиус конуса, передающего температурную нагрузку от нагревательного прибора к пластине.

Звездочками обозначены натурные результаты, а сплошной и пунктирной линиями – теоретические данные, соответственно с учетом и без учета связанности термоупругих полей.



Рисунок 8 – Экспериментальная установка

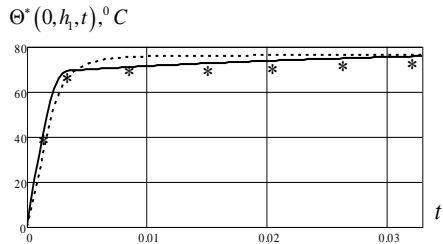


Рисунок 9 – Графики изменения $\Theta^*(0, h, t)$ по времени ($h = 0.1$)

Здесь можно отметить, что наблюдается хорошее совпадение экспериментальных данных и теоретических результатов, полученных с учетом связанности полей. Разница в результатах составляет не более 7%.

На основании выполненных исследований можно сформулировать основные достигнутые результаты и выводы:

1) Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины. Разработанный алгоритм позволяет определить без учета скорости изменения объема упругой системы напряженно–деформированное состояние и температурное поле, а также дает возможность установить параметры нагрузки, при которых необходимо учитывать ее силы инерции;

2) Разработан алгоритм расчета и получено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в трехмерной постановке для однослойных круглых пластин без учета сил инерции при выполнении граничных условий теплопроводности 1–го рода.

3) Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоупругости в

трехмерной постановке для многослойных круглых пластин при выполнении граничных условий 1–го и 3–го рода;

4) Разработано программное обеспечение в системе Mathcad–15, позволяющее провести анализ связанных и несвязанных термоупругих процессов в однослойных и многослойных круглых жестко закрепленных пластинах;

5) Создана экспериментальная установка по определению температурного поля и перемещений в круглых пластинах при заданном внешнем осесимметричном температурном воздействии;

6) Разработанные алгоритмы расчета используются ООО ««Петон» при проектировании ограждающих однослойных и многослойных конструкций. Кроме того, результаты исследования находят свое применение в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство».

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Шляхин, Д.А. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины / Д.А. Шляхин, Ж.М. Даулетмуратова (Кусаева) // Инженерный журнал: наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. - №5 (77). - С. 1-18.
2. Шляхин, Д.А. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины / Д.А. Шляхин, Ж.М. Даулетмуратова (Кусаева) // Вестник ПНИПУ. Механика, 2019. - №4. - С. 192-200.
3. Шляхин, Д.А. Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жестко закрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований / Д.А. Шляхин, Ж.М. Кусаева // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2021. - Т. 25, № 2. - С. 320-342.
4. Кусаева, Ж.М. Решение осесимметричной задачи термоупругости для круглой пластины с учетом связанности термоупругих полей / Ж. М. Кусаева // Вестник Инженерной школы Дальневост. федеральн. ун-та., 2021. - № 3(48). - С. 3-10.

Публикации в изданиях, входящие в базу данных SCOPUS:

5. Shlyakhin, D.A. Unsteady thermoelasticity problem for rigidly fixed round plate / D.A. Shlyakhin, Zh.M. Dauletmuratova (Kusaeva), M.A.

Kalmova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. - Vol. 775. - 012137 p.

6. Shlyakhin, D.A. Influence of the Connectedness of Thermoelastic Fields on the Stress-Strain State of a Circular Rigidly Fixed Plate / D.A. Shlyakhin, Zh.M. Kusaeva // XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021). - P. 237-244.

7. Kusaeva, Zh.M. Thermoelastic non-stationary fields in a rigidly fixed plate / Zh.M. Kusaeva // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2021. - Vol. 1181. - 012026 p.

Публикации в сборниках научных трудов и тезисы докладов:

8. Шляхин, Д.А. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости / Д.А. Шляхин, Ж.М. Кусаева // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительные технологии. Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2019. - С. 561-567.

9. Шляхин, Д.А. Нестационарная задача термоупругости для круглой пластины / Д.А. Шляхин, Ж.М. Кусаева, //Научные исследования XXI века: теория и практика. Нефтекамск, 2020. - С. 57-68.

10. Шляхин, Д.А. Динамическая задача теории термоупругости для жестко закрепленного изотропного диска / Д.А. Шляхин, Ж.М. Кусаева // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительные технологии. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. - С. 422-427.

11. Шляхин, Д.А. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной изотропной пластины / Д.А. Шляхин, Ж.М. Кусаева // Сетевое издание «Научные исследования XXI века», г. Нефтекамск, 2020 г. - № 3(5). - С. 62-68.

12. Shlyakhin, D.A. The associated non - stationary thermal elasticity problem for a two-layer plate / D.A. Shlyakhin, Zh.M. Kusaeva // IOP Conference Series: Materials Science and Eng., 2020. - Vol. 1015. – 012009 p.

13. Кусаева, Ж.М. Нестационарная задача термоупругости для жестко закрепленной многослойной круглой пластины / Ж.М. Кусаева // Цифровизация образования: теоретические и прикладные исследования современной науки (Ч.2). Ростов–на–Дону: Южный ун-т, ИУБиП, 2021. - С. 163-168.

14. Кусаева Ж.М. Задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины / Ж.М. Кусаева // Наука, технологии, инновации в мире глобальных трансформаций. Ростов–на–Дону: Южный ун-т ИУБиП, 2021. - Т.2, Ч.1. - С. 20-22.

15. Кусаева Ж.М. Задача термоупругости для круглой пластины в случае действия температурной нагрузки / Ж.М. Кусаева // Достижения науки и образования. Иваново: Научные публикации, 2021 г. - № 5 (77). - С. 15-18.

16. Кусаева Ж.М. Решение задачи термоупругости для круглой пластины при действии температурной нагрузки / Ж.М. Кусаева // Современная школа России. Вопросы модернизации. Москва: Заметки ученого, 2021. - № 3(36, т.2). - С. 32-34.

Научное издание

Кусаева Жанслу Маратовна

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук на тему:

«Исследование связанных нестационарных термоупругих полей в однослойных и многослойных круглых пластинах»

Автореферат отпечатан с разрешения объединенного диссертационного совета 99.2.039.02 (Д 999.122.02) на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» и ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королева» (протокол № 22 от «6» декабря 2022 г.)

Подписано в печать __.____. 2022.

Формат 60×84 1/16. Набор компьютерный.

Усл. печ. л. 1,00. Тираж 100 экз. Заказ № ____.

Отпечатано на ризографе.

ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»,

Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.