

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

Ратманова Олеся Викторовна

СВЯЗАННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ
КРУГЛЫХ БИМОРФНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель: доктор технических наук,
доцент Шляхин Д. А.

Самара 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	9
Глава 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ КРУГЛЫХ БИМОРФНЫХ ПЛАСТИН	18
2.1. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СПЛОШНОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ	20
2.1.1 Постановка задачи.....	20
2.1.2 Построение общего решения	23
2.1.3 Численный анализ результатов.....	35
2.2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СПЛОШНОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ	46
2.2.1. Постановка задачи.....	46
2.2.2. Построение общего решения	49
2.2.3. Численные результаты. Выводы.....	58
Глава 3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ СПЛОШНОЙ КРУГЛОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ	67
3.1.1 Постановка задачи.....	67
3.1.2. Построение общего решения	69
3.1.3. Численный анализ результатов. Выводы.....	74
Глава 4. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АСИММЕТРИЧНОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ	88
4.1.1 Постановка задачи.....	89
4.1.2. Построение общего решения	94
4.1.3. Численный анализ результатов. Выводы.....	98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	106

ЛИТЕРАТУРА	107
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	119
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	121

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. При проектировании современных приборов и конструкций все чаще используются материалы, в которых механические процессы взаимосвязаны с физическими явлениями другой природы. В частности, большое практическое применение получили пьезоэлектрические системы, работа которых основана на связанности упругих и электрических полей напряжения. Их широкое применение объясняется возможностью создания искусственных пьезо-керамических материалов с наведенной поляризацией, которые обладают низкой себестоимостью и высокими эксплуатационными параметрами. Данные конструкции используются в машиностроении, ультра- и гидроакустике, приборостроении, в различных измерительных и управляющих устройствах. В основе их работы при различном функциональном назначении используется одно и то же явление: преобразование электрической энергии в механические колебания (обратный пьезоэффект) или индуцирование электрического импульса вследствие использования механической нагрузки (прямой пьезоэффект).

Для оптимизации работы пьезокерамических преобразователей появляется необходимость в проведение всестороннего анализа нестационарных процессов в электроупругих средах, позволяющего понять общую картину взаимодействия механических и электрических полей напряжений. Задача становится значительно сложнее, когда в исследуемой конструкции используется многослойная система с упругими и электроупругими слоями. Такие пьезокерамические преобразователи, имеющие каноническую форму в виде многослойных тонких круглых сплошных конструкций, при аксиальной поляризации электроупругого материала, имеют наибольшее распространение.

В настоящее время исследование напряженно-деформированного состояния и характера распределения электрического поля в электроупругих биморфных конструкциях проводится с помощью прикладных теория для тонких пластин, которые позволяют получать приближенные результаты. Для более качественной оценки функциональных возможностей биморфных пластин при действии произ-

вольной нестационарной электромеханической нагрузки возникает необходимость в разработке математических моделей и построение общих замкнутых решений в трехмерной постановке.

Целью диссертационной работы является разработка методики расчета круглых многослойных симметричных и асимметричных биморфных пластин постоянной, а также ступенчато переменной толщины в случае действия нестационарной электромеханической нагрузки.

Для достижения этой цели были построены новые замкнутые решения связанных осесимметричных краевых задач теории электроупругости для многослойных сплошных конструкций, а также разработана математическая модель и исследовано напряженно-деформированное состояние биморфной пластины ступенчато переменной толщины.

Методы исследования. Для решения поставленных линейных краевых задач используются конечные интегральные преобразования, являющиеся наиболее общей формой метода неполного разделения переменных и позволяющие построить замкнутые решения. Построенные расчетные соотношения реализованы в среде Mathcad-14 в виде программного комплекса.

Научная новизна состоит в создании новой методики расчета многослойных биморфных пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов постоянной, а также ступенчато переменной толщины.

В работе представлены следующие **новые научные результаты**:

1. Разработана математическая модель расчета многослойных симметричных и асимметричных биморфных пластин постоянной толщины в случае действия электромеханической нагрузки;
2. Построены новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач прямого и обратного пьезоэффектов в трехмерной постановке для круглых многослойных конструкций;
3. Представлена новая математическая модель расчета и на ее основе получено замкнутое решение задачи электроупругости (теория Тимошенко) для асимметричной биморфной пластины ступенчато переменной толщины;

4. На основании построенных решений разработано программное обеспечение в среде Mathcad–14 и получены численные результаты расчета. Их анализ дает возможность разработать наиболее оптимальное конструктивное решение круглых многослойных пьезокерамических преобразователей (подобрать их геометрические размеры и физические характеристики используемых материалов), позволяющее наиболее эффективно преобразовать внешнее электромеханическое воздействие в механические колебания и электрический импульс.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений, математической постановки и методами решения рассматриваемых нестационарных задач электроупругости, совпадением в частных случаях представленных решений с известными результатами, соответствием качественных результатов расчета с полученными автором работы экспериментальными данными, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Практическая значимость работы определяется возможностью использования разработанных алгоритмов построенных решений и созданного программного комплекса при проектировании пьезокерамических многослойных преобразователей. Полученные результаты позволят обосновать рациональную программу экспериментов, что значительно сократит объем дорогостоящих натурных исследований.

Представленная методика расчета биморфных пластин нашла применение при проектировании тонкостенных многослойных элементов выполняемым ООО «Интеб» (датчик DP–612.5). Кроме того, результаты работы используются в учебном процессе при подготовке магистрантов СамГТУ по направлению «Строительство» и профилю образования «Теория сооружений» при изучении дисциплины «Взаимодействие упругих элементов конструкции сопряженными полями гидроупругости, термоупругости, электроупругости».

На защиту выносятся:

1. Новая методика расчета многослойных сплошных биморфных пьезокерамических пластин при действии электромеханической нагрузки.

2. Новые замкнутые решения связанных динамических задач для биморфных пластин постоянной толщины.
3. Прикладная методика расчета биморфных пластин ступенчато переменной толщины и жесткости.
4. Численный анализ электромеханических процессов в многослойных биморфных конструкциях постоянной и ступенчато переменной толщины.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на 74–76–х Международных научно-технических конференциях (2017–2019, СамГТУ), X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (СамГТУ, 2017), XI Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (СамГТУ, 2019), Международной научно-технической конференции «Пром-Инжиниринг» (Москва, 2018), Международных научных Российско-польско-словацких семинарах XXIII R–S–P (2014), XXV R–S–P (2016), XXVII R–S–P (2018) и XXVIII R–S–P (2019).

Полностью диссертация была представлена: на семинаре кафедры «ПМиИ» СамГТУ (зав. каф. Радченко В.П., д. ф. –м. н., профессор), на расширенном семинаре кафедры «СМиСМ» СамГТУ АСА (зав. каф. Шляхин Д.А., д.т.н., доцент).

Публикации. По результатам данного исследования опубликовано 14 научных работ, в том числе 8 работ в журналах, рекомендованных ВАК России из которых 4 работы в журналах, входящих в библиографическую базу данных Scopus, Web of Science.

Структура, объем и содержание работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка используемой литературы и 2 приложений, общим объемом 118 страниц машинописи, 37 рисунков, 3 таблицы. Список литературы включает 119 работ.

В первой главе проведен анализ литературы, посвященный решению начально–краевых задач электроупругости для сплошных и многослойных пластин.

Во второй главе рассматриваются связанные динамические осесимметричные задачи обратного пьезоэффекта для биморфных пластин постоянной толщины.

ны. На основании проведенных исследований и анализа численных результатов расчета сформулированы практические рекомендации, которые могут использоваться при проектировании тонких круглых пьезокерамических преобразователей энергии.

В третьей главе исследуются связанные нестационарные задачи прямого пьезоэффекта для многослойных асимметричных биморфных пластин постоянной толщины.

В четвертой главе построено новое замкнутое решение для двухслойной электроупругой асимметричной конструкции ступенчато переменной толщины при использовании прикладной теории Тимошенко.

На основании проведенных исследований и анализа численных результатов расчета в каждой главе сформулированы практические рекомендации, которые могут использоваться при проектировании тонких круглых пьезокерамических преобразователей энергии.

В заключение диссертации сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Приложения 1,2 содержат соответственно акты внедрения результатов и распечатку типовой программы в системе Mathcad–14, полученной на основании построенных алгоритмов.

Глава 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В конце XIX–го века французскими учеными, братьями Кюри, экспериментально было доказано, что при деформировании естественных кристаллов с несимметричной кристаллической решеткой на их поверхности появляются свободные электрические заряды. Впоследствии ими была доказана обратная сторона данного представления, а именно, что под действием электрического поля исследуемые образцы деформируются. Данные явления получили соответственно названия прямого и обратного пьезоэффекта. В дальнейшем В. Фойгтом были разработаны основы линейной теории пьезоэлектричества.

Впервые, в 1917 г., явление обратного пьезоэффекта нашло свое практическое применение. Французский исследователь Поль Ланжевен предложил использовать кварцевые пластинки в звуковых, а также ультразвуковых эхолокационных приборах для обнаружения неподвижных и движущихся объектов под водой, в том числе подводных лодок.

В дальнейшем, пьезоэлектрические элементы получили широкое применение в устройствах ультразвуковой электроники [13, 95], микроэлектронике [2,8], в различных измерительных приборах [116, 109] в качестве электромеханических преобразователей. Это привело к необходимости создания пьезоэлектрических материалов, которые отвечают новым предъявляемым эксплуатационным требованиям. В результате были получены искусственные материалы, обладающие пьезоэффектом, а именно пьезокерамика с наведенной поляризацией. Элементы, изготовленные из данного материала, с различным направлением поляризации отличаются низкой себестоимостью и высокими эксплуатационными параметрами.

Благодаря своим уникальным свойствам пьезокерамические материалы становятся востребованными во многих сферах. Они становятся незаменимыми устройствами, позволяющими согласовывать механические системы с электронными элементами управления и контроля.

Постоянно расширяющаяся область применения пьезокерамических материалов [9, 20, 23, 49, 100, 119] ставить перед учеными задачу детального анализа законов деформирования пьезокерамических тел. В результате решения данной проблемы в рамках специальности механика деформируемого твердого тела было создано новое научное направление – электроупругость. В современном представлении основы механики связанных электроупругих полей опубликованы в монографиях Д. Берлинкура [7], Л.Д. Ландау [21], У. Мэзона [25], Дж. Барроута [4], Ж. Можена [24], В. Новацкого [27], Ю.А. Устинова [50], В.З. Партона, Б.А. Кудрявцева [30], В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульги [15], Ю.В. Новожилова [28], Ю.В. Соколкина [47] и других.

Одним из направлений использования пьезоэлектрических элементов в технических устройствах различного назначения является разработка пьезокерамических преобразователей в виде тонких симметричных и асимметричных по толщине биморфных пластин [34,16,17,83,85,99,115]. Изгибные колебаний, в рассматриваемых конструкциях, создаются с помощью электрического напряжения, приложенного на электродированные поверхности пьезокерамических пластин, или в случае действия механической нагрузки.

Наиболее эффективной электроупругой системой, обладающей высокой чувствительностью, является конструкция, состоящая из двух жестко закрепленных пьезокерамических пластин. Кроме того, в некоторых случаях, для увеличения механической прочности изгибных преобразователей используется дополнительный элемент в виде металлической подложки. Для исследования их напряженно–деформированного состояния, как правило, используются прикладные теории для тонких пластин [30], в которых кинематические гипотезы дополняются допущениями о характере изменения электрического поля по толщине пьезокерамического элемента. При этом большинство работ посвящено исследованию установившегося режима вынужденных колебаний. Данное предположение позволяет рассмотреть гармонический процесс вынужденных колебаний в электроупругих телах на основе анализа соответствующих квазистатических граничных задач относительно амплитудных значений компонент вектора перемещения,

а также получить такие характеристики упругой системы, как собственные формы и спектр частот. Такой подход дает возможность с помощью построенного замкнутого решения проанализировать работу конструкции, подобрать материал и ее геометрические размеры, и в результате повысить эффективность трансформации энергии. В рамках этого направления, в последние годы, были проведены исследования, представленные в работах [10–12,18,19,38,75,84,86,87,96,110,112,113].

В [75] рассматривалась шарнирно закрепленная конструкция, состоящая из двух жестко закрепленных круглых пьезокерамических пластин разной толщины. Было определено напряженно–деформированное состояние системы в случае действия на ее лицевых поверхностях электрического потенциала, создающего постоянное по высоте пластины электрическое поле.

В статьях Медведева К.В., Евсейчика Ю.Б. проанализирована чувствительность составной конструкции в случае совпадения [18] и несовпадения [19] радиусов пьезокерамических пластин и металлической подложки. Расчеты проведены при действии на ее лицевой поверхности равномерно–распределенной механической нагрузки.

Работы Ватульяна А.О., Рынковой А.А. [10-12] посвящены анализу влияния внутренних разрезных электродов на стационарный изгиб биморфных конструкций с учетом особенности структуры электрического поля на границе раздела двух пьезокерамических пластин.

Сеник Н.А. [40] предложил использовать кинематическую гипотезу плоских сечений при исследовании многослойных пьезокерамических оболочек и пластин. В частном случае были рассмотрены установившиеся планарные колебания трехслойного диска с центральным пьезокерамическим поляризованным по толщине слоем.

Исследование [87] связано с определением оптимальной ширины пьезоэлектрического преобразователя биморфного типа, которая обеспечивает максимальные (резонансные) перемещения при определенной частоте внешнего механического воздействия (нормальных напряжений). Используется прикладная теория для тонких консольных пластин в случае использования приближенного вы-

ражения для кривизны нейтрального слоя. Аналогичная работа [84] посвящена анализу работы приводов с активным демпфированием при действии статической и динамической нагрузок.

Работа [69] посвящена анализу планарных колебаний кольцевых и дисковых пьезоэлектрических преобразователей при использовании квазистатического приближения уравнения движения.

В [92] Т.В. Карнаухова исследовала проблему вынужденных колебаний пьезоэлектрических прямоугольных пластин с учетом диссипативного нагрева при действии гармонической нагрузки по всей поверхности пластины. В общем случае получена формула по определению критического давления, при котором электроупругая система деполяризуется.

В работе [96] рассматривается конструкция преобразования энергии в виде прямоугольной биморфной пластины со свободными и фиксированными краями. Механические колебания системы в случае действия электрической нагрузки описываются с помощью классической прикладной теории.

В [110,112,113] проанализирована работа прямоугольного симметричного биморфного пьезоэлектрического преобразователя со свободными и фиксированными краями. Структуры излучения таких преобразователей в статической постановке оцениваются с использованием классической теории [110,112] и модели Тимошенко [113].

Геометрически нелинейные задачи для двухслойных пластин с параллельным направлением вектора предварительной поляризации рассмотрены в работах [109,86]. В [86] определялись частоты собственных колебаний, а статья [109] посвящена вычислению напряженно–деформированного состояния конструкции при исследовании явления обратного пьезоэффекта. Работы [2,32–34] связаны с определением прогибов рабочей поверхности и частотных характеристик асимметричного биморфного элемента ступенчато переменной толщины в режиме излучения акустических волн.

В статьях [80,81] рассматривалась статическая задача для пьезоэлектрического полупространства в случае действия точечного электрического заряда. При построении решения задачи использовался метод потенциальных функций.

Аналізу связанных свободных колебаний пьезокерамической круглой пластины, при использовании прикладной теории Миндлина посвящена работа [93]. Рассматривался случай коротко замкнутого соединения внешних лицевых слоев конструкции при заданном распределении электрического потенциала по ее толщине.

В [116] разработан алгоритм расчета многослойной электроупругой прямоугольной пластины при действии квазистатической нагрузки в виде электрического потенциала. При построении решения использовалось интегральное преобразование Ханкеля.

Исследование [82] посвящено анализу вынужденных планарных колебаний прямоугольной пьезокерамической пластины в случае действия электрической нагрузки. Рассматривались случаи жесткого и упругого закрепления торцевых поверхностей конструкции.

В работе [94] на основании теории парных напряжений и принципе Гамильтона произведена модификация модели Тимошенко, учитывающая изгибные и осевые деформации.

Исследование [74] посвящено разработке методике расчета свободных колебаний прямоугольных многослойных пластин с произвольными граничными условиями.

В работе [78] исследуется спектр частот собственных колебаний прямоугольных многослойных пластин при использовании классической прикладной теории и теории Тимошенко. На основании численного анализа показано, что частотные характеристики для тонких пластин совпадают при использовании обеих теорий.

При исследовании краевых задач электроупругости также используются вариационно–разностные и конечно–разностные методики расчета [70]. При этом наиболее универсальным приближенным методом является численный метод ко-

нечных элементов (МКЭ). Общий алгоритм МКЭ для решения линейных задач электроупругости был разработан в начале 70-х годов [76,88,89] и реализован в виде известных программных вычислительных комплексов (ANSYS, ACELAN, ATILA, FlexPDE, PZFlex), позволяющих в рамках данного подхода проанализировать вынужденные колебания двухмерных [5,6,89,90,91] и трехмерных [70,77] пьезокерамических тел конечных размеров, а также описать работу многослойных преобразователей [48, 98].

Одним из недостатков МКЭ при решении нестационарных задач является аппроксимация конечного элемента базисными функциями, независящими от времени, что позволяет достаточно точно описать деформируемое состояние тела только при установившемся режиме вынужденных колебаний.

В связи с постоянно расширяющимися областями применения биморфных преобразователей и необходимостью дальнейшего углубленного изучения их деформирования был сформирован следующий класс задач, связанный с построением замкнутых решений для тонких электроупругих многослойных систем в случае произвольного во времени (нестационарного) силового или электрического воздействия [53–55,57–59,63,64,71–73,105,106,109].

В работах Янчевского И.В. [71–73] аналитическое решение получено методом интегрального преобразования Лапласа по времени. В результате была получена бесконечная система интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая решалась методом квадратур с применением итерационного метода последовательных приближений. В [64,105,106,109], при исследовании нестационарных осесимметричных задач, использовался метод конечных интегральных преобразований Ханкеля по радиальной координате. Анализ работы многослойных систем постоянной и ступенчато переменной толщины проводился при различных законах изменения аксиальной компоненты напряженности электрического поля.

Савин В.Г. [38] в результате применения интегрального преобразования Лапласа по времени и разложения полученных изображений в ряд Фурье построил решение для двухслойных (металл–пьезокерамика) электроупругих тонких пря-

моугольных шарнирно закрепленных биморфных пластин в случае действия нестационарной равномерно–распределенной механической нагрузки.

Исследования [53,57,63,64] посвящены анализу работы симметричных по высоте биморфных упругих и электроупругих пластин при использовании прикладной теории Тимошенко.

Следует отметить, что для анализа связанных электромеханических полей в многослойных пьезокерамических пластинах с разрезными электродами появляется необходимость проведения исследований задач теории электроупругости в трехмерной постановке. Возникающие в этом случае значительные математические трудности обусловлены сложностью исходных расчетных соотношений в частных производных. Как в свое время, относительно решения статических задач теории упругости, отмечал А.И. Лурье [22]: «Краевые задачи, которые здесь возникают, весьма сложны, и если не говорить о некоторых тривиальных случаях, то не известно ни одного решения, которое полностью и строго удовлетворяло бы всем краевым условиям на боковой поверхности и на торцах цилиндра». Данная проблема и объясняет тот факт, что в научных публикациях можно встретить единичные работы, и только для однородных пьезокерамических тел конечных размеров, в которых построены замкнутые решения начально–краевых задач электроупругости [41,44,45,54,55,58,59,68,83,95, 114].

Шульга М.О. [68] предложил методику расчета толстой круглой пьезокерамической пластины в случае действия динамическую нагрузки. Решения осуществлялось с помощью преобразования Лапласа по времени. Полученное интегральное уравнение Вольтера первого рода решалось численным методом.

В [83] при исследовании длинного толстостенного пьезокерамического цилиндра представлена методика разделения импульсного осесимметричного электромеханического нагружения на квазистатическую и динамическую составляющие. Аналогичная задача, с учетом связанности электромагнитоупругих процессов, рассмотрена в [95]. В обоих случаях расчетные соотношения получены методом разложения по базисным функциям.

Нестационарная задача о кручении пьезокерамического цилиндра конечных размеров при действии на цилиндрической поверхности механических касательных напряжений и электрического потенциала была рассмотрена Ю.Э. Сеницким [41]. Расчетные соотношения получены методом конечных интегральных преобразований [44,45] при степенном законе неоднородности упругих и электрических характеристик материала, имеющего кристаллическую решетку тетрагональной симметрии 422 класса.

Осесимметричные задачи прямого и обратного пьезоэффектов для пьезокерамической жестко закрепленной пластины рассматривались в статьях [55,58,59]. Расчетные соотношения получены методом конечных интегральных преобразований.

В работе [114], при использовании пространственной осесимметричной модели, исследовался изгиб круглых пьезокерамических пластин, у которых свойства материала изменяются по высоте. Причем, в области закрепления конструкции предлагается приближенное решение.

Здесь также необходимо отметить работы, связанные с исследованием краевых задач для упругих круглых элементов [43,52,54]. В [43] исследовалась осесимметричная динамическая задача для толстостенного короткого цилиндра с мембранным закреплением его торцов методом конечных интегральных преобразований, а в [52] построено замкнутое решение нестационарной задачи теории упругости для конечного цилиндра методом разложения в ряд по системе ортогональных функций. В работе [54] рассматривалась толстая жестко закрепленная пластина.

Из приведенного обзора следует, что в настоящее время не создана общая теория взаимодействия электрических и механических полей напряжений в многослойных телах конечных размеров. В связи с этим, представленная диссертационная работа в значительной степени постарается восполнить этот пробел. В данной работе изложена методика расчета и построены замкнутые решения для биморфных пьезокерамических конструкций в случае нестационарного осесимметричного силового и электрического воздействия в трехмерной постановке. Ос-

новные результаты исследований опубликованы автором в работах [34-37,56,60,62,65,66,68,104-108].

Глава 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ КРУГЛЫХ БИМОРФНЫХ ПЛАСТИН

В настоящей главе рассматриваются нестационарные осесимметричные задачи обратного пьезоэффекта для сплошной биморфной пластины с жестко и шарнирно закрепленными цилиндрическими поверхностями, занимающими в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. Исследуются конструкции, состоящие из двух жестко соединенных пьезокерамических пластин с противоположным и параллельным направлением вектора аксиальной поляризации пьезокерамического материала класса 6mm гексагональной симметрии. Кроме того, рассматривается работа многослойной системы, которая включает металлическую подложку и жестко прикрепленные к ней с двух сторон электроупругие пластины.

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения и электростатики однородной упругой анизотропной среды в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho^{(s)} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho^{(s)} \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} = 0,$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r_*} + \frac{D_r}{r_*} + \frac{\partial D_z}{\partial z_*} = 0.$$

В случае аксиальной поляризации материала уравнения состояния пьезокерамического тела определяются следующими равенствами [15,30]:

$$\sigma_{rr} = C_{11}^{(s)} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12}^{(s)} \frac{U^*}{r_*} + C_{13}^{(s)} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{31} E_z, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{12}^{(s)} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11}^{(s)} \frac{U^*}{r_*} + C_{13}^{(s)} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{31} E_z ,$$

$$\sigma_{zz} = C_{13}^{(s)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + C_{33}^{(s)} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{33} E_z , \quad \sigma_{rz} = C_{55}^{(s)} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right) - e_{15} E_r ,$$

$$D_z = \varepsilon_{33} E_z + e_{31} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + e_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} ,$$

$$D_r = \varepsilon_{11} E_r + e_{15} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right), \quad E_z = -\frac{\partial \phi^*}{\partial z_*}, E_r = -\frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}.$$

В соотношениях (2.1) – (2.2) $\sigma_{j,k}(r_*, z_*, t_*)$, $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$ – соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора перемещении в размерной форме ($j, k = r, \theta, z$); $D_r(r_*, z_*, t_*)$, $D_z(r_*, z_*, t_*)$, $E_r(r_*, z_*, t_*)$, $E_z(r_*, z_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля в размерной форме; t_* – время; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}, e_{mk}$ – коэффициенты диэлектрической проницаемости и пьезомодули электроупругого материала ($m, k = \overline{1,5}$); $\rho^{(s)}, C_{mk}^{(s)}$ – объемная плотность и модули упругости электроупругого (пьезокерамического) ($s = 1$) и упругого ($s = 2$) материалов.

Подстановка (2.2) в (2.1) формирует разрешающую систему связанных дифференциальных уравнений рассматриваемой динамической задачи теории электроупругости в безразмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Здесь $\{U, W, r, z\} = \{U^*, W^*, r, z\} / b$; $\phi = \phi^* e_{33} / (b C_{11}^{(1)})$; $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(1)} / \rho^{(1)}}$;

$$\Phi^{(1)} = 1, \quad \Phi^{(2)} = \frac{C_{11}^{(2)} \rho^{(1)}}{C_{11}^{(1)} \rho^{(2)}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

При исследовании упругой среды ($s=2$) система (2.3) включает только уравнения движения, сформулированные относительно компонент вектора перемещений.

2.1. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СПЛОШНОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

2.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим круглый жестко закрепленный биморфный преобразователь, состоящий из двух пьезокерамических пластин высотой h_1^* ($h^* = 2h_1^*$). В данной конструкции при исследовании задач обратного пьезоэффекта (рис.2.1) изгибные осесимметричные колебания образуются в следующих случаях:

- 1) Лицевые и внутренние электроды пьезопластин с параллельным направлением вектора аксиальной поляризации подключены в противофазе к источнику электрического напряжения $V^*(r_*, t_*)$ (рис.2.1, а);
- 2) Лицевые электроды пьезопластин с противоположным направлением вектора поляризация подключены в противофазе к источнику электрического напряжения $V^*(r_*, t_*)$, а внутренние—заземлены (рис.2.1, б).

Следует отметить, что используемая математическая модель расчета, позволяет учесть ограниченное количество граничных условий, и в связи с этим не удается построить решения для второй расчетной схемы с противоположным направлением вектора поляризации пьезокерамических пластин. Однако здесь

можно использовать все качественные результаты численного расчета, полученные ниже для первой расчетной схемы (рис.2.1, а).

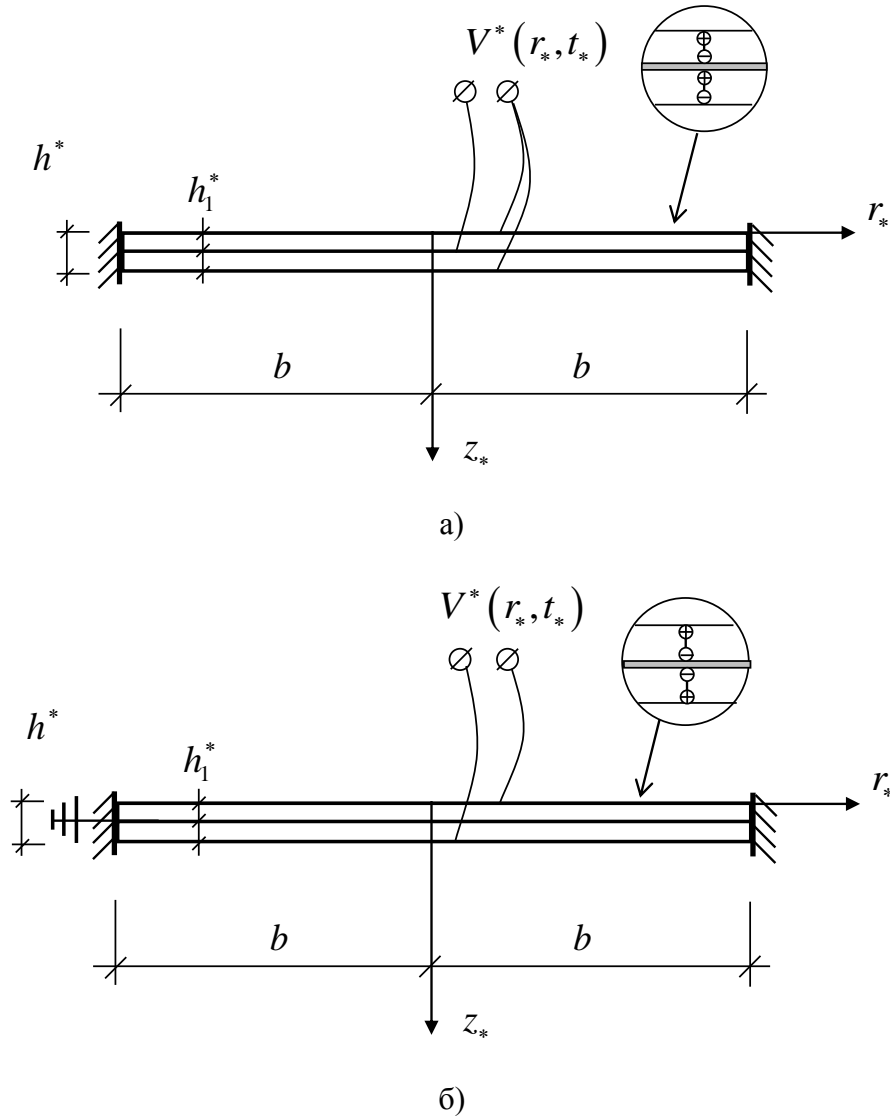


Рис.2.1. Биморфная пластина

Начально–краевые условия для биморфной пластины с параллельным направлением вектора поляризации пьезокерамического материала (рис.2.1, а) в цилиндрической системе координат и безразмерной форме записываются следующим образом:

$$r = 0,1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (2.4)$$

$$D_{r|r=1} = -\frac{C_{11}\varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0, \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0;$$

$$z = 0, h \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi(r, z, t) = V(r, t) / 2;$$

$$z = h_1 \quad \left(\frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|z=0} = \left(\frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|z=0}, \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z=0} = \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z=0},$$

$$U(z+0) = U(z-0), \quad W(z+0) = W(z-0), \quad \phi(z+0) = \phi(z-0) = -V(r, t) / 2;$$

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z);$$

где $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ – известные в начальный момент времени перемещения и их скорости.

Выражения (2.4) при $r = 0$ являются условиями ограниченности решения в центре пластины, а равенство $D_{r|r=1} = 0$ (2.4) учитывает отсутствие электродного покрытия на цилиндрической поверхности пластины. Формулы (2.6) позволяют удовлетворить условия совместности напряжений и перемещений в плоскости жесткого соединения двух пьезокерамических пластин.

В равенствах (2.4) – (2.7) и ниже индекс «s», характеризующий физические свойства материала, опускается, поскольку конструкция состоит только из электроупругого (пьезокерамического) материала. В условиях (2.7) и далее по тексту работы «точка» означает дифференцирование по времени.

Соотношения (2.3), (2.4) – (2.7) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

2.1.2. Построение общего решения

Для построения общего решение начально–краевой задачи (2.3), (2.4) –(2.7) последовательно используются методы интегральных преобразований: Ханкеля [41,42] с конечными пределами по радиальной переменной r и обобщенное конечное преобразование (КИП) [44,45] по аксиальной координате z .

Преобразование Ханкеля позволяет удовлетворить только смешанные граничные условия [51]. Поэтому для выполнения данного требования необходимо последнее равенство (2.4) заменить условием наличия касательных механических напряжений $N_1(z, t)$ при $r = 1$:

$$\sigma_{rz|_{r=1}} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = N_1(z, t). \quad (2.8)$$

В результате рассматривается новая краевая задача для биморфной пластины, на электродированных плоскостях которой действует заданная электрическая нагрузка $\pm V(r, t)/2$, а на ее цилиндрической поверхности приложены неизвестные касательные напряжения $N_1(z, t)$.

Для решения задачи (2.3), (2.4) – (2.8) используются новые функции $w(r, z, t)$, $\chi(r, z, t)$, связанные с $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$ следующими расчетными соотношениями:

$$W(r, z, t) = A_1(r, z, t) + w(r, z, t), \quad \phi(r, z, t) = A_2(r, z, t) + \chi(r, z, t), \quad (2.9)$$

где $A_0 = \left[2(C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2) \right]^{-1}$, $A_1(r, z, t) = W_1(t) + A_0 C_{11} \varepsilon_{11} r^2 N_1(z, t)$,

$A_2(r, z, t) = A_0 e_{33} e_{15} r^2 N_1(z, t)$, W_1, N_1 – неизвестные функции, определяемые в процессе решения задачи из условия $W(1, z, t) = 0$.

Подстановка (2.9) в (2.3), (2.4) – (2.8) позволяет получить новую краевую задачу относительно функций U, w, χ , в которой дифференциальные уравнения (2.3), первое (2.5) и последнее (2.6) граничные условия, становятся неоднородны-

ми с правыми частями $R_1 \div R_3, B_1, B_2$, а начальные условия (2.7) W_0, \dot{W}_0 следует заменить на w_0, \dot{w}_0 * :

$$R_1 = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[\frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} A_1 + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} A_2 \right],$$

$$R_2 = -\left(\frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_1 - \left(\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_2,$$

$$R_3 = -\left(\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_1 + \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \left(\nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_2,$$

$$B_1 = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} A_1 + A_2 \right), \quad B_2 = -V(r, t) / 2 - A_2(r, h_1, t),$$

$$w_0 = W_0(r, z) - A_1|_{r=0}, \quad \dot{w}_0 = \dot{W}_0(r, z) - \dot{A}_1|_{r=0}.$$

Кроме того, равенства (2.4), с учетом (2.8) при $r=1$, принимают следующий вид ** :

$$U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (2.10)$$

Введем однокомпонентное интегральное преобразование Ханкеля по переменной r

$$u_H(j_n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.11)$$

$$\{w_H(j_n, z, t), \phi_H(j_n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \chi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.12)$$

* На основании парности касательных напряжений в точках сопряжения торцевых и цилиндрической поверхностей конструкции принимаем $N|_{z=0, h} = 0$.

** В отличие от классической постановки задач теории упругости и электроупругости [79] в настоящем исследовании при вычислении спектра частот собственных колебаний «жесткое» закрепление цилиндрической поверхности пластины характеризуется также отсутствием угла поворота.

$$w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad \chi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(j_n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n)$, расположенные в порядке их возрастания ($n = \overline{0, \infty}$; $j_0 = 0$)

Применяя к соотношениям (2.3), (2.4) – (2.8), (2.10) относительно функций U, w, χ преобразование (2.11), получаем новую краевую задачу в пространстве изображений:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = R_{1H}, \quad (2.13)$$

$$-\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \phi_H + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = R_{2H},$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \phi_H - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} = R_{3H};$$

$$z = 0, h \quad \frac{C_{13}}{C_{11}} j_n u_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = \frac{C_{11} e_{15}}{C_{55} e_{33}} j_n V_H, \quad \phi_H = V_H;$$

$$z = h_1 \quad \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \right)_{|z=0} = \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \right)_{|z=0}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u_H}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2.15)$$

$$u_H(z+0) = u_H(z-0), \quad w_H(z+0) = w_H(z-0), \quad \phi_H(z+0) = \phi_H(z-0) = B_{2H};$$

$$t = 0 \quad u_H(n, z, 0) = u_{0H}(n, z), \quad \dot{u}_H(n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(n, z), \quad (2.16)$$

$$w_H(n, z, 0) = w_{0H}(n, z), \quad \dot{w}_H(n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(n, z);$$

где $\{R_{2H}, R_{3H}, B_{1H}, B_{2H}, V_H, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_2, R_3, B_1, B_2, V/2, w_0, \dot{w}_0\} r J_0(j_n r) dr$,

$$\{R_{1H}, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_1, U_0, \dot{U}_0\} r J_1(j_n r) dr.$$

На втором этапе решения неоднородные граничные условия (2.14), (2.15) предварительно приводятся к однородным с помощью функций S_1, S_2, S_3 при использовании следующих зависимостей:

$$u_H(n, z, t) = S_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = S_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (2.17)$$

$$\phi_H(n, z, t) = S_3(n, z, t) + \chi_H(n, z, t).$$

Подстановка (2.17) в (2.13) – (2.16) при удовлетворении условий:

$$\left(\frac{C_{13}}{C_{11}} j_n S_1 + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial z} \right)_{|z=0} = B_{1H}(0), \quad \left(\frac{C_{13}}{C_{11}} j_n S_1 + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial z} \right)_{|z=h} = B_{1H}(h),$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial z} - j_n S_2 \right)_{|z=0,h} = \frac{C_{11} e_{15}}{C_{55} e_{33}} j_n V_H, \quad S_{3|z=0,h} = V_H, \quad (2.18)$$

$$\left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial z} \right)_{|h_1+0} = \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial z} \right)_{|h_1-0}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial z} \Big|_{h_1+0} = \frac{\partial S_1}{\partial z} \Big|_{h_1-0}$$

$$S_1(h_1+0) = S_1(h_1-0), \quad S_2(h_1+0) = S_2(h_1-0), \quad S_3(h_1+0) = S_3(h_1-0) = B_{2H};$$

позволяет получить новую краевую задачу относительно функций U_H, W_H, χ_H .

В этом случае правые части дифференциальных уравнений $R_{1H} \div R_{3H}$ (2.13) и начальные условия $u_{0H}, \dot{u}_{0H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}$ (2.16) следует заменить на $F_{1H} \div F_{3H}, U_{0H}, \dot{U}_{0H}, W_{0H}, \dot{W}_{0H}$:

$$F_{1H} = R_{1H} + \left(j_n^2 - \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) S_1 + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_3}{\partial z},$$

$$F_{2H} = R_{2H} + \left(\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 - \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) S_2 - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \left(\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S_3,$$

$$F_{3H} = R_{3H} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \left(\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S_2 + \left(\frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \right) S_3,$$

$$U_{0H} = u_{0H} - S_{1|t=0}, \quad \dot{U}_{0H} = \dot{u}_{0H} - \dot{S}_{1|t=0}, \quad W_{0H} = w_{0H} - S_{2|t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \dot{S}_{2|t=0}.$$

Начально–краевую задачу (2.13) – (2.16) относительно функций U_H, W_H, χ_H решаем путем введения на сегменте $[0, h]$ вырожденное конечное интегральное

преобразование (КИП) [44,45] с неизвестными компонентами вектор–функции ядра $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (U_H K_{1in} + W_H K_{2in}) dz, \quad (2.19)$$

$$\{U_H, W_H, \chi_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} \{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (2.20)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h (K_{1in}^2 + K_{2in}^2) dz,$$

где λ_{in} – параметры, образующие для каждого $n = \overline{0, \infty}$ счетное множество.

Спектр частот собственных осесимметричных колебаний пластины ω_{in} определяется с помощью следующей зависимости:

$$\omega_{in} = \lambda_{in} b^{-1} \sqrt{C_{11}/\rho}. \quad (2.21)$$

Кусочно–гладкий характер функций $U_H(n, z, t)$, $W_H(n, z, t)$, $\chi_H(n, z, t)$ определяет следующий вид компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$:

$$\{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} = \{K_{1in}^{(A)}, K_{2in}^{(A)}, K_{3in}^{(A)}\} H(h_1 - z) + \{K_{1in}^{(B)}, K_{2in}^{(B)}, K_{3in}^{(B)}\} H(z - h_1). \quad (2.22)$$

Здесь $H(\tilde{z})$ – единичная функция Хэвисайда (при $\tilde{z} < 0$ $H(\tilde{z}) = 0$, при $\tilde{z} \geq 0$ $H(\tilde{z}) = 1$) [14], индексы «А» и «В» соответственно обозначают верхнюю и нижнюю пьезокерамические пластины. Здесь и ниже $H(\tilde{z})$ определяет область изменения компонент вектор–функции ядра преобразований, и не используется в качестве обобщенной функции.

Процедурная часть алгоритма метода КИП [44, 45] состоит в выделении сопряженного оператора ядра преобразований по отношению к исходному (2.13). Для этого умножаем первое уравнение (2.13) и начальные условия для функции $U_H(n, z, t)$ на $K_1(\lambda_{in}, z)$, второе уравнение (2.13) и начальные условия для функции $W_H(n, z, t)$ на $K_2(\lambda_{in}, z)$, а третье равенство (2.13) на $K_3(\lambda_{in}, z)$. Выполняя затем

интегрирование в интервале $[0, h]$ с учетом (2.22), и складывая полученные уравнения, а также попарно начальные условия, имеем

$$\Phi(U_H, W_H, \chi_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \chi_H L_3) dz - \dot{G}(\lambda_{in}, n, t) = F(\lambda_{in}, n, t), \quad (2.23)$$

$$t=0: \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_0(\lambda_{in}, n), \quad \dot{G}(\lambda_{in}, n, t) \Big|_{t=0} = \dot{G}_0(\lambda_{in}, n). \quad (2.24)$$

Здесь введены такие обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(U_H, W_H, \chi_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h &= \Phi(U_H, W_H, \chi_H, K_{1in}^{(A)}, K_{2in}^{(A)}, K_{3in}^{(A)}) \Big|_0^h + \\ &+ \Phi(U_H, W_H, \chi_H, K_{1in}^{(B)}, K_{2in}^{(B)}, K_{3in}^{(B)}) \Big|_0^h = \sum_{p=A}^B \left\{ \left[\frac{C_{55}}{C_{11}} \left(\frac{\partial U_H}{\partial z} - U_H \frac{d}{dz} \right) - \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n W_H - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n \chi_H \right] K_{1in}^{(p)} + \left[\frac{C_{33}}{C_{11}} \left(\frac{\partial W_H}{\partial z} - W_H \frac{d}{dz} \right) + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n U_H + \frac{\partial \chi_H}{\partial z} - \chi_H \frac{d}{dz} \right] K_{2in}^{(p)} + \right. \\ &\left. + \left[\frac{C_{33}}{C_{11}} \left(\frac{\partial W_H}{\partial z} - W_H \frac{d}{dz} \right) + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - W_H \frac{d}{dz} - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \left(\frac{\partial \chi_H}{\partial z} - \chi_H \frac{d}{dz} \right) \right] K_{3in}^{(p)} \right\}, \end{aligned}$$

$$L_1 = -j_n^2 K_{1in} + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{3in}}{dz},$$

$$L_2 = -\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 K_{2in} + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{3in} + \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2},$$

$$L_3 = \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{2in} + \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 K_{3in} - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2},$$

$$F(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (F_{1H} K_{1in} + F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_3) dz, \quad (p = A, B)$$

$$G_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^h (U_{0H} K_{1in} + W_{0H} K_{2in}) dz, \quad \dot{G}_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^h (\dot{U}_{0H} K_{1in} + \dot{W}_{0H} K_{2in}) dz.$$

Используя далее два условия

$$\int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \chi_H L_3) dz = -\lambda_{in}^2 \int_0^h (U_H K_{1in} + W_H K_{in}) dz, \quad (2.25)$$

$$\Phi(U_H, W_H, \chi_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in})|_0^h = 0,$$

первое из которых представляет операционное свойство, а второе – отсутствие вне интегральных членов в уравнении (2.23), приходим к счетной системе задач Коши для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\ddot{G}(\lambda_{in}, n, t) + \lambda_{in}^2 G(\lambda_{in}, n, t) = -F(\lambda_{in}, n, t), \quad (n = \overline{0, \infty}, i = \overline{1, \infty}) \quad (2.26)$$

$$t=0 \quad G(\lambda_{in}, n, 0) = G_0(\lambda_{in}, n), \quad \dot{G}(\lambda_{in}, n, t)|_{t=0} = \dot{G}_0(\lambda_{in}, n), \quad (2.27)$$

и, с учетом граничных условий (2.14), (2.15), следующую однородную задачу относительно компонент ядра преобразований $K_{1in}^{(p)}, K_{2in}^{(p)}, K_{3in}^{(p)}$:

$$(\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{1in}^{(p)} + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{d^2 K_{1in}^{(p)}}{dz^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dK_{2in}^{(p)}}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{3in}^{(p)}}{dz} = 0, \quad (2.28)$$

$$\left(\lambda_{in}^2 - \frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 \right) K_{2in}^{(p)} + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{d^2 K_{2in}^{(p)}}{dz^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dK_{1in}^{(p)}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{3in}^{(p)} + \frac{d^2 K_{3in}^{(p)}}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{1in}^{(p)}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{2in}^{(p)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(p)}}{dz^2} + \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 K_{3in}^{(p)} - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 K_{3in}^{(p)}}{dz^2} = 0;$$

$$z=0, h \quad \frac{C_{13}}{C_{11}} j_n K_{1in}^{(p)} + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dK_{2in}^{(p)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(p)}}{dz} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{dK_{1in}^{(p)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(p)} = 0, \quad K_{3in}^{(p)} = 0;$$

$$z = h_1 \quad \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dK_{2in}^{(B)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(B)}}{dz} \right)_{|z+0} = \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dK_{2in}^{(A)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(A)}}{dz} \right)_{|z-0}, \quad \frac{dK_{1in}^{(B)}}{dz} \Big|_{z+0} = \frac{dK_{1in}^{(A)}}{dz} \Big|_{z-0}, \quad (2.30)$$

$$K_{1in}^{(B)}(z+0) = K_{1in}^{(A)}(z-0), \quad K_{2in}^{(B)}(z+0) = K_{2in}^{(A)}(z-0), \quad K_{3in}^{(B)}(z+0) = K_{3in}^{(A)}(z-0) = 0.$$

Решение уравнения (2.26), с учетом условий (2.27), записывается в виде:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_0 \cos(\lambda_{in} t) + \dot{G}_0 \lambda_{in}^{-1} \sin(\lambda_{in} t) + \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in} (t - \tau) d\tau. \quad (2.31)$$

При решении однородной задачи (2.28) – (2.30) необходимо рассмотреть два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$.

Когда $n = 0$ продольно–поперечные колебания становятся несвязанными. В результате формируются две начально–краевые задачи относительно функции $K_{1i0}^{(p)}$ и $K_{2i0}^{(p)}, K_{3i0}^{(p)}$:

$$\text{a) } \frac{d^2 K_{1i0}^{(p)}}{dz^2} + \lambda_{i0}^2 \frac{C_{11}}{C_{55}} K_{1i0}^{(p)} = 0, \quad (2.32)$$

$$z = 0, h \quad \frac{dK_{1i0}^{(p)}}{dz} = 0, \quad (2.33)$$

$$z = h_1 \quad \frac{dK_{1i0}^{(B)}}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dK_{1i0}^{(A)}}{dz} \Big|_{z=0}, \quad K_{1i0}^{(B)}(z+0) = K_{1i0}^{(A)}(z-0);$$

$$\text{б) } \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2 K_{3i0}^{(p)}}{dz^2} + \lambda_{i0}^2 \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{C_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2} K_{3i0}^{(p)} \right) = 0, \quad K_{2i0}^{(p)} = - \frac{C_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2}{e_{33}^2 \lambda_{i0}^2} \frac{d^2 K_{3i0}^{(p)}}{dz^2}; \quad (2.34)$$

$$z = 0, h \quad \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dK_{2i0}^{(p)}}{dz} + \frac{dK_{3i0}^{(p)}}{dz} = 0, \quad K_{3i0}^{(p)} = 0; \quad (2.35)$$

$$z = h_1 \quad \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dK_{2i0}^{(B)}}{dz} + \frac{dK_{3i0}^{(B)}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = \left(\frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dK_{2i0}^{(A)}}{dz} + \frac{dK_{3i0}^{(A)}}{dz} \right) \Big|_{z=0},$$

$$K_{2i0}^{(B)}(z+0) = K_{2i0}^{(A)}(z-0), \quad K_{3i0}^{(B)}(z+0) = K_{3i0}^{(A)}(z-0) = 0;$$

Общие решения уравнений (2.32), (2.34), с учетом (2.22), записываются следующим образом:

$$K_{1i0} = \left[D_{1i0}^A \sin(a_{1i} z) + D_{2i0}^A \cos(a_{1i} z) \right] H(h_1 - z) + \left[D_{1i0}^B \sin(a_{1i} z) + D_{2i0}^B \cos(a_{1i} z) \right] H(z - h_1), \quad (2.36)$$

$$K_{2i0}(\lambda_{in}, z) = \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \left\{ \left[D_{3i0}^A \sin(a_{2i} z) + D_{4i0}^A \cos(a_{2i} z) \right] H(h_1 - z) + \left[D_{3i0}^B \sin(a_{2i} z) + D_{4i0}^B \cos(a_{2i} z) \right] H(z - h_1) \right\},$$

$$K_{3i0}(\lambda_{in}, z) = \left[D_{3i0}^A \sin(a_{2i} z) + D_{4i0}^A \cos(a_{2i} z) + D_{5i0}^A z + D_{6i0}^A \right] H(h_1 - z) + \left[D_{3i0}^B \sin(a_{2i} z) + D_{4i0}^B \cos(a_{2i} z) + D_{5i0}^B z + D_{6i0}^B \right] H(z - h_1),$$

$$\text{где } a_{1i} = \lambda_{i0} \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{55}}}, \quad a_{2i} = \lambda_{i0} \sqrt{\frac{C_{11}\varepsilon_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2}}.$$

Подстановка (2.36) в граничные условия (2.33), (2.35) позволяет определить постоянные интегрирования $D_{1i0}^A \div D_{6i0}^A, D_{1i0}^B \div D_{6i0}^B$ и собственные значения λ_{i0} :

$$\text{а) } D_{1i0}^A = D_{1i0}^B = 0, \quad D_{2i0}^A = D_{2i0}^B = (-1)^i, \quad \lambda_{i0} = \frac{i\pi}{h} \sqrt{\frac{C_{55}}{C_{11}}} \quad (i=1, 2, 3...); \quad (2.37)$$

$$\text{б) } D_{4i0}^A = -D_{6i0}^A = 1, \quad \lambda_{i0} = -\frac{D_{5i0}^A}{D_{3i0}^A} \frac{e_{33}^2}{\sqrt{C_{11}\varepsilon_{33}(C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2)}},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{2i}e_{2i}e_5 & -a_{2i}e_{1i}e_5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e_{1i} & e_{2i} & h & 1 \\ e_{4i}e_5 & a_{2i}^{-1} & -e_{4i}e_5 & e_{3i}e_5 & a_{2i}^{-1} & 0 \\ -e_{3i} & 0 & e_{3i} & e_{4i} & 0 & 0 \\ e_{3i} & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{3i} & e_{4i} & h_1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} D_{3i0}^A \\ D_{4i0}^A \\ D_{3i0}^B \\ D_{4i0}^B \\ D_{5i0}^B \\ D_{6i0}^B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{3i}e_5 \\ e_{4i} \\ 1 - e_{4i} \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$e_{1i} = \sin a_{2i}h, \quad e_{2i} = \cos a_{2i}h, \quad e_{3i} = \sin a_{2i}h_1, \quad e_{4i} = \cos a_{2i}h_1, \quad e_5 = \frac{C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2}{e_{33}^2}.$$

Система дифференциальных уравнений (2.28) при $n \neq 0$ сводится к следующему разрешающему уравнению VI –го порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $K_{2in}^{(p)}$:

$$\left(\frac{d^6}{dz^6} + k_{1in} \frac{d^4}{dz^4} + k_{2in} \frac{d^2}{dz^2} + k_{3in} \right) K_{2in}^{(p)} = 0, \quad (2.38)$$

$$\text{где } k_{1in} = \frac{b_{8n}b_{10n} + b_{8n}(b_{2n}b_{8n} - b_{3n}b_{9n}) + b_{9n}(b_{2n}b_{7n} - b_{4in}b_{9n})}{b_{11in}},$$

$$k_{2in} = \frac{b_{7n}b_{10in} + b_{8n}(b_{2n}b_{7n} - b_{4in}b_{9n}) + b_{2n}b_{6in}b_{9n}}{b_{11in}}, \quad k_{3in} = \frac{b_{6in}(b_{10in} + b_{2n}b_{8n})}{b_{11n}},$$

$$b_{1in} = \lambda_{in}^2 - j_n^2, \quad b_{2n} = \frac{C_{55}}{C_{11}} - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{3n}, \quad b_{3n} = -\frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{1n},$$

$$\begin{aligned}
b_{4in} &= -\frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{2in}, & b_{5in} &= -j_n^2 \left(\frac{C_{55}}{C_{11}} + \frac{e_{15}}{e_{33}} s_{2in} \right) + \lambda_{in}^2, \\
b_{6in} &= \frac{C_{33}}{C_{11}} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 s_{1n} + s_{2in}, & b_{7n} &= s_{1n}, & b_{8n} &= \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 s_{3n}, \\
b_{9n} &= s_{3n}, & b_{10in} &= b_{1in} b_{9n} - b_{2n} b_{8n}, & b_{11n} &= b_{9n} (b_{2n} b_{8n} - b_{3n} b_{9n}), \\
s_{1n} &= -s_{4n} (e_{33}^{-2} C_{33} \varepsilon_{33} + 1), & s_{2in} &= s_{4n} e_{33}^{-2} [j_n^2 (e_{15} e_{33} + C_{55} \varepsilon_{33}) - \lambda_{in}^2 C_{11} \varepsilon_{33}], \\
s_{3n} &= -s_{4n} j_n e_{33}^{-2} [\varepsilon_{33} (C_{13} + C_{55}) + e_{33} (e_{31} + e_{15})], & s_{4n} &= \frac{e_{33}^3}{j_n^2 C_{11} (\varepsilon_{11} e_{33} - \varepsilon_{33} e_{15})},
\end{aligned}$$

Уравнение (2.38) допускает факторизацию на коммутативные дифференциальные сомножители, т.е. оно может быть представлено в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_{4in} \right) \left(\frac{d^4}{dz^4} + k_{5in} \frac{d^2}{dz^2} + k_{6in} \right) K_{2in}^{(p)} = 0, \quad (2.39)$$

где $k_{5in} = k_{1in} - k_{4in}$, $k_{6in} = k_{3in} k_{4in}^{-1}$, k_{4in} — действительный корень следующего кубического уравнения:

$$k_{4in}^3 - k_{1in} k_{4in}^2 + k_{2in} k_{4in} - k_{3in} = 0.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения вида (2.39), с учетом (2.22), имеет вид:

$$K_{2in}(\lambda_{in}, z) = \sum_{p=1}^6 D_{pin}^A R_{pin}(z) H(h_1 - z) + \sum_{p=1}^6 D_{pin}^B R_{pin}(z) H(z - h_1). \quad (2.40)$$

В общем случае имеют место три варианта соотношения коэффициентов:

- а) $k_{4in} < 0$, $k_{5in}^2 < 4k_{6in}$; б) $k_{4in} > 0$, $k_{5in}^2 > 4k_{6in}$, $k_{6in} > 0$;
в) $k_{4in} > 0$, $k_{5in}^2 > 4k_{6in}$, $k_{6in} < 0$.

Тогда частные решения $R_{pin}(z)$ уравнения (2.39) имеют вид:

$$R_{1in} = \begin{cases} a) \exp(\sqrt{-k_{4in}} z) \\ б), в) \cos(\sqrt{k_{4in}} z) \end{cases}, \quad R_{2in} = \begin{cases} a) \exp(-\sqrt{-k_{4in}} z) \\ б), в) \sin(\sqrt{k_{4in}} z) \end{cases},$$

$$R_{3in} = \begin{cases} a) \exp(\psi_{1in} z) \cos(\beta_{in} z) \\ \bar{b}), \bar{\epsilon}) \exp(\psi_{2in} z) \end{cases}, \quad R_{4in} = \begin{cases} a) \exp(\psi_{1in} z) \sin(\beta_{in} z) \\ \bar{b}), \bar{\epsilon}) \exp(-\psi_{2in} z) \end{cases},$$

$$R_{5in} = \begin{cases} a) \exp(-\psi_{1in} z) \cos(\beta_{in} z) \\ \bar{b}) \exp(\psi_{3in} z) \\ \bar{\epsilon}) \cos(\psi_{3in} z) \end{cases}, \quad R_{6in} = \begin{cases} a) \exp(-\psi_{1in} z) \sin(\beta_{in} z) \\ \bar{b}) \exp(-\psi_{3in} z) \\ \bar{\epsilon}) \sin(\psi_{3in} z) \end{cases},$$

где $\psi_{1in} = \frac{1}{2} \left[2(k_{6in})^{1/2} - k_{5in} \right]^{1/2}$, $\psi_{2in} = -2^{-1/2} \left[k_{5in} - (k_{5in}^2 - 4k_{6in})^{1/2} \right]^{1/2}$,

$$\psi_{3in} = 2^{-1/2} \left[k_{5in} + (k_{5in}^2 - 4k_{6in})^{1/2} \right]^{1/2}, \quad \beta_{in} = \left(\frac{k_{5in}}{2} + \psi_{1in}^2 \right)^{1/2}.$$

Выражения для K_{1in}, K_{3in} , полученные в результате приведения (2.28) к (2.39), записываются следующим образом:

$$K_{1in}(\lambda_{in}, z) = b_{1in}^{-1} \left(s_{5n} \frac{d^5}{dz^5} + s_{6n} \frac{d^3}{dz^3} + s_{7n} \frac{d}{dz} \right) K_{2in}, \quad (2.41)$$

$$K_{3in}(\lambda_{in}, z) = \left(s_{1n} \frac{d^2}{dz^2} + s_{2in} \right) K_{2in} + s_{3n} \frac{dK_{1in}}{dz};$$

где $s_{5in} = b_{2n} b_{10in}^{-1} (b_{3n} b_{9n} - b_{2n} b_{7n})$, $s_{7in} = -b_2^2 b_{5in} b_{10in}^{-1} - b_{4in}$,

$$s_{6in} = b_{2n} b_{10in}^{-1} (b_{4in} b_{9n} - b_{2n} b_{6in}) - b_{3n}.$$

Подстановка выражений (2.40), (2.41) в граничные условия (2.29), (2.30) формирует однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $D_{1in}^A \dots D_{6in}^A$, $D_{1in}^B \dots D_{6in}^B$. Приравняв нулю ее главный детерминант получаем трансцендентное уравнение для определения собственных параметров λ_{in} , а принимая $D_{6in}^B = 1$ формируем систему неоднородных уравнений для вычисления постоянных $D_{1in}^A \dots D_{6in}^A$, $D_{1in}^B \dots D_{5in}^B$.

Выражения функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$ получим, применяя к трансформанте (2.31) формулы обращения КИП (2.20) и Ханкеля (2.12). В результате, с учетом (2.8), (2.17), имеем:

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[S_1 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{1in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_1(j_n r), \quad (2.42)$$

$$W(r, z, t) = A_1(r, z, t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \left[S_2 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n r),$$

$$\phi(r, z, t) = A_2(r, z, t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-2} \left[S_3 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{3in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n r).$$

Заключительным этапом исследования является определение $S_1(n, z, t)$, $S_2(n, z, t)$, $S_3(n, z, t)$, $W_1(t)$, $N_1(z, t)$.

Функции S_1, S_2, S_3 находятся из условия упрощений правых частей (F_{1H}, F_{2H}, F_{3H}) неоднородных дифференциальных уравнений (2.13):

$$\begin{aligned} \left(j_n^2 - \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S_1 + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_3}{\partial z} &= 0, \\ \left(\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 - \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S_2 - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \left(\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S_3 &= 0, \\ -\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \left(\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S_2 + \left(\frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \right) S_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

В этом случае, принимая

$$\{S_1, S_2, S_3\} = \{S_1^{(A)}, S_2^{(A)}, S_3^{(A)}\} H(h_1 - z) + \{S_1^{(B)}, S_2^{(B)}, S_3^{(B)}\} H(z - h_1),$$

система уравнений (2.43) будет аналогична (2.28) при $\lambda_{in} = 0$ с учетом следующих соответствий $S_1^{(p)} - K_{1in}^{(p)}, S_2^{(p)} - K_{2in}^{(p)}, S_3^{(p)} - K_{3in}^{(p)}$ (переменная времени t в функциях S_1, S_2, S_3 является параметром). Тогда подстановка (2.36), (2.40), (2.41) в граничные условия (2.18) позволяет получить выражения $S_1(n, z, t)$, $S_2(n, z, t)$, $S_3(n, z, t)$.

Неизвестные функции $W_1(t)$, $N(z, t)$ определяются в следующей последовательности:

– начально–краевая задача (2.3), (2.4) – (2.8) решается в случае действия только электрической нагрузки $V(r, t)$, что позволяет с помощью (2.42) вычислить $W_1(t)$ *:

$$W_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[S_2(n, 0, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in}(\lambda_{in}, 0) \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n)^{-1},$$

а также определить характер изменения функций $W(1, z, t)$ и $N_1(z, t)$. В случае использования пьезокерамических пластин одинаковой толщины данные функции изменяется по высоте сечения по параболической зависимости симметричной относительно срединной поверхности. Принимая данный факт во внимание, представляем $N_1(z, t)$ в виде:

$$N_1(z, t) = \frac{N_0}{h_1} (2h_1 z - z^2) W_1(t);$$

– на втором этапе начально–краевая задача решается при действии функций $V(r, t)$, $N_1(z, t)$. Здесь N_0 определяется из условия равенства нулю $W(1, h_1, t)$.

Разложения (2.42) представляют общее решение рассматриваемой начально – краевой задачи электроупругости.

2.1.3. Анализ результатов расчета

В качестве примера рассматривается пластина, имеющая следующие геометрические размеры и физические характеристики пьезокерамического материала состава ЦТС–19 [3]: $b = 14 \times 10^{-3}$ м, $\rho = 7730$ кг/м³, $\{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} =$
 $= \{-4.9, 14.9, 10.6\}$ Кл/м², $\{C_{11}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{55}\} = \{10.9, 9.1, 6.1, 5.4, 2.4\} \times 10^{10}$ Н/м²,
 $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{7.73, 7.26\} \times 10^{-9}$ Ф/м.

* Слагаемые, учитывающие функцию $W_1(t)$ и входящие в трансформанту G_{in} , равны нулю: при $n = 0$, вследствие антисимметрии относительно срединной поверхности компоненты ядра преобразований K_{2i0} , а в случае $n \neq 0$, за счет использования условия $J_1(j_n) = 0$.

В таблице 2.1 приведены численные значения первых трех частот собственных осесимметричных колебаний ω_{in} ($i=1, n=1,2,3$) жестко закрепленных пластин различной толщины h^* . Верхние числа относятся к спектру частот для упругой пластины, модули упругости которой соответствуют пьезокерамическому материалу, средние – для сплошной электроупругой пластины, а нижние – для рассматриваемой биморфной конструкции.

Сравнение результатов расчета для упругой и сплошной электроупругой пластин подтверждают известный факт, что наличие электрического поля в конструкциях приводит к созданию более жесткой системы и увеличению численных значений спектра частот собственных колебаний [15]. При этом ω_{in} для сплошной пьезокерамической пластины больше, чем в биморфной конструкции за счет характера распределения электрического поля (функции $K_3(\lambda_{11}, z)$) по ее высоте.

На рисунке 2.2 показаны формы свободных осесимметричных колебаний $K_3(\lambda_{11}, z)$ пластины ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м). Цифрами 1, 2 соответственно обозначены результаты для сплошной и двухслойной пластин. В составной конструкции в центре пластины значение функции $K_3(\lambda_{11}, z)$ равно нулю, а в сплошной – принимает максимальное значение.

Для подтверждения теоретических результатов расчета по определению частоты собственных осесимметричных колебаний биморфных пластин был также проведен натурный эксперимент.

На рисунке 2.3 показаны: биморфная пластина (рис.2.3, а); конструкция, обеспечивающая жесткое закрепление образца (рис.2.3, б); низкочастотный генератор, создающий выходной синусоидальный электрический сигнал в диапазоне частот 10 Гц – 200 кГц, а также осциллограф для измерения амплитудных и временных параметров периодического электрического импульса (рис.2.3, в).

$h_1^*, \text{м}$	$\omega_{1n} \times 10^{-3}, \text{Гц}$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0.25×10^{-3}	$\frac{5.46}{6.06}$	$\frac{18.2}{20.1}$	$\frac{37.8}{41.8}$
	5.59	18.6	38.6
0.35×10^{-3}	$\frac{7.62}{8.45}$	$\frac{25.2}{28.1}$	$\frac{51.8}{56.6}$
	7.81	25.7	52.9
0.5×10^{-3}	$\frac{10.8}{12.0}$	$\frac{35.3}{39.0}$	$\frac{70.1}{78.5}$
	11.1	36.0	72.5

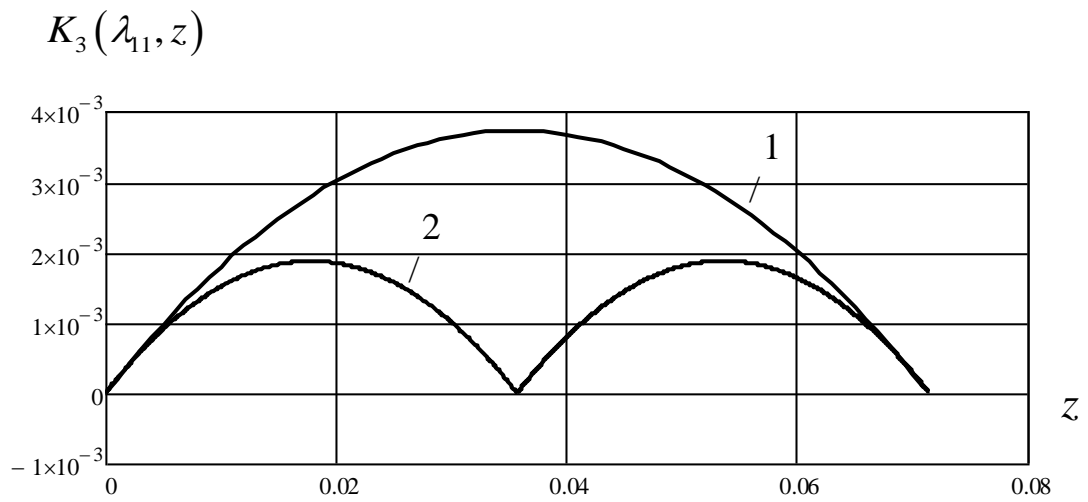
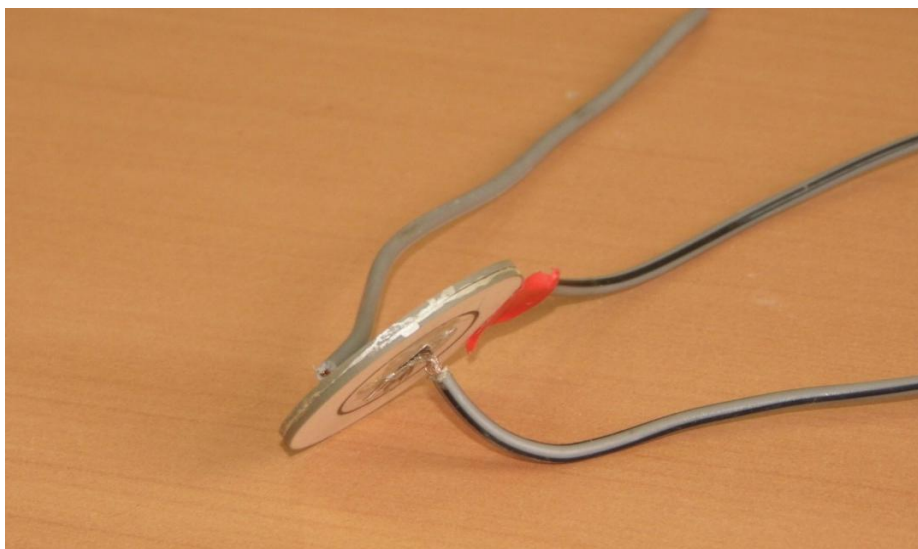


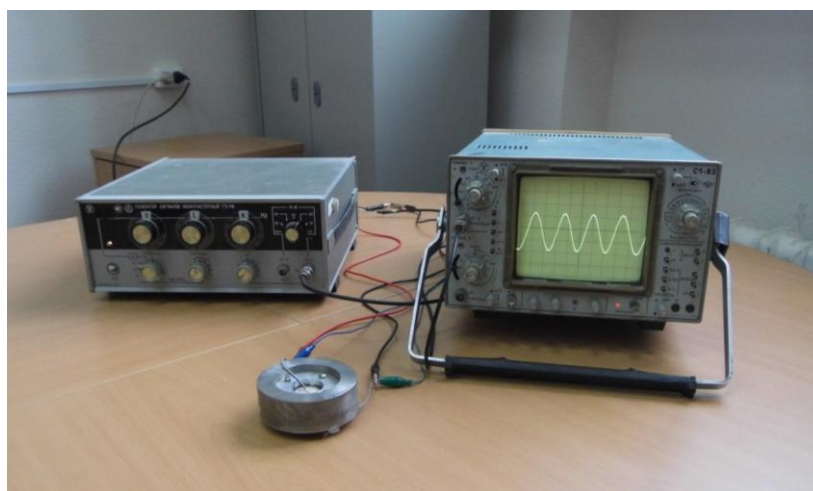
Рис.2.2. Изменение $K_3(\lambda_{11}, z)$ по координате z (1– сплошная электроупругая пластина, 2– биморфная конструкция)



а) биморфная пластина



б) конструкция для жесткого закрепления пластины



в) измерительный комплекс

Рис.2.3. Составляющие экспериментальной установки

Для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия в механические колебания на торцевых электродированных поверхностях пьезокерамических жестко закрепленных пластин необходимо использовать систему разрезных кольцевых электродов (размеры и количество электродов определяют нулевые значения функции $J_1(j_n)$) с подключением соседних электродов в противофазе [54]. Причем при сплошном электродном покрытии механические колебания в жестко закрепленной конструкции не возбуждаются.

При определении первой частоты собственных осесимметричных колебаний ω_{11} используется два круговых электрода с радиусом раздела $a = 8.8 \times 10^{-3}$ м ($R_1 = a/b = 0.628$). Верхняя пьезокерамическая пластина подключается к источнику электрического напряжения (генератору), а нижняя к осциллографу. Изменение частоты в определенном диапазоне входного электрического сигнала позволяет наблюдать резкое увеличение амплитудных значений индуцируемого электрического импульса на нижней пластине, что позволяет зафиксировать первую частоту ω_{11} .

Следует отметить хорошее совпадение численных значений частот собственных осесимметричных колебаний ω_{11} , полученных теоретически и экспериментально, для биморфных пластин различной толщины (разница составляет не более 10%).

Анализ напряженно-деформированного состояния биморфной пластины ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м) проводится при наличии двух электродов на торцевых поверхностях с радиусом раздела $a = 8.8 \times 10^{-3}$ м ($R_1 = a/b = 0.628$), т.е. конструкция работает на первой резонансной частоте. Для этого представляем электрическую нагрузку $V(r, t)$ в виде:

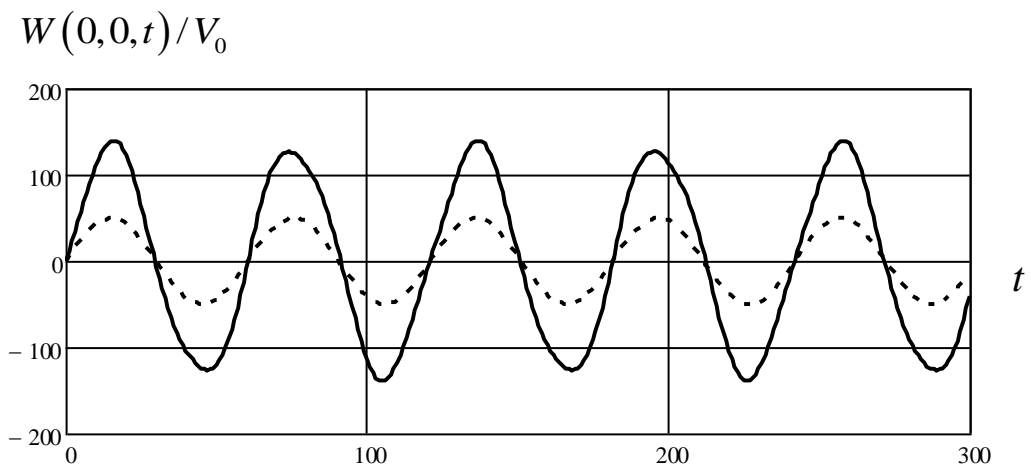
$$V(r, t) = V_0 [H(R_1 - r) - H(r - R_1)] \sin \beta t,$$

где V_0 – амплитудное значение электрической нагрузки в безразмерной форме; $\beta = \beta^* b \sqrt{\rho/C_{11}}$; β, β^* – соответственно безразмерная и размерная (круговая) частота вынужденных колебаний.

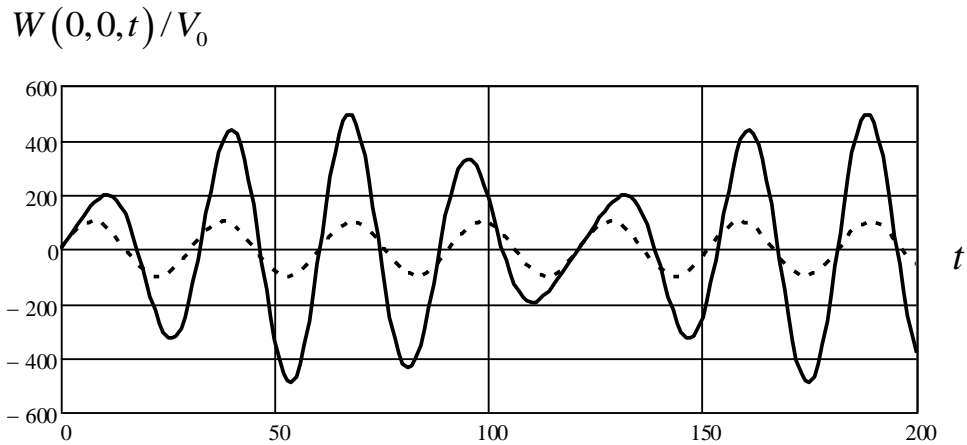
На рисунках 2.4 представлены графики изменения вертикальной компоненты вектора перемещений $W(0,0,t)$ по времени t биморфной пластины (сплошная линия) при различной частоте внешнего воздействия. Пунктирной линией показан характер изменения электрической нагрузки.

Результаты расчета показывают, что при исследовании нестационарных задач допущение об установившемся режиме вынужденных колебаний, справедливо только в случае, когда частоты внешнего воздействия β существенно меньше первой безразмерной частоты собственных колебаний λ_{11} (рис.2.4, а). Вместе с тем, использование высокочастотной нагрузки ($\beta = 0.8\lambda_{11}$) дает более сложную зависимость изменения напряженного – деформированного состояния системы во времени в виде эффекта «биения», а также приводит к увеличению амплитудных значений перемещений и механических напряжений (рис.2.4, б).

Следует отметить, что для рассматриваемой конструкции учет касательных напряжений $N_1(r,t)$ приводит к незначительному увеличению перемещений (менее 1%). Это дает возможность при проектировании тонких биморфных преобразователей существенно упростить расчет, принимая $N_1 = 0$.



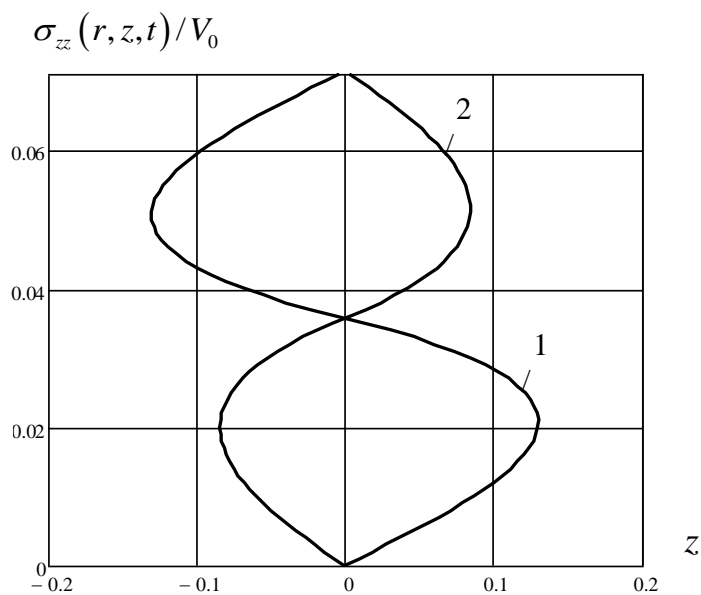
а) $\beta = 0.4\lambda_{11}$



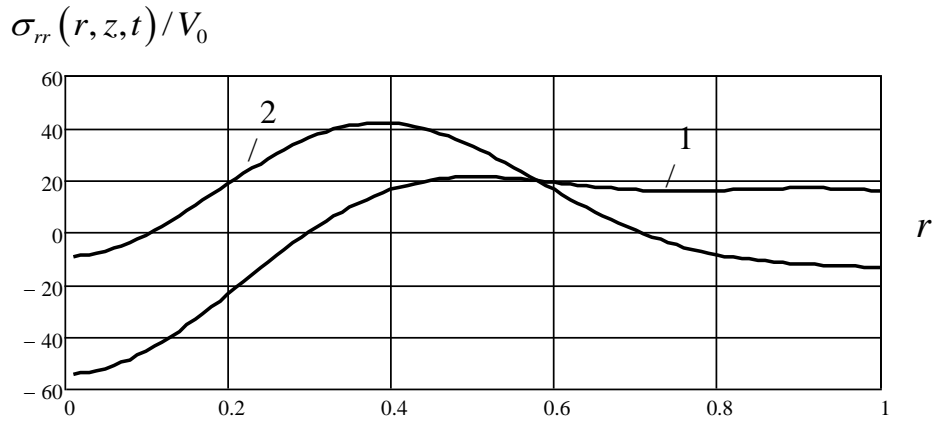
$$\text{б) } \beta = 0.8\lambda_{11}$$

Рис.2.4. Графики изменения $W(0,0,t)$ по времени t
(пунктирная линия – изменение электрической нагрузки)

Изменение амплитудных значений нормальных механических напряжений $\sigma_{zz}(r,z,t)$ по переменной z и $\sigma_{rr}(r,z,t)$ по радиальной координате r представлены на рисунках 2.5 ($\beta = 0.8\lambda_{11}$). Цифрами 1,2 на рисунке 2.5, «а» обозначены результаты соответственно для $r = 0.3, 0.8$, а на рисунке 2.5, «б» – 1– $z = 0$, 2– $z = h_1/2$.



а) графики « $\sigma_{zz} - z$ » (1– $r = 0.3$, 2– $r = 0.8$)



б) графики « $\sigma_{rr} - r$ » (1- $z = 0$, 2- $z = \frac{h_1}{2}$)

Рис.2.5. Графики изменение амплитудных значений нормальных механических напряжений

Анализ результатов (рис.2.5, а) показывает, что использование круговых разрезных электродов ($R_1 = 0.628$) и подключение их в противофазе приводит к образованию нормальных механических напряжения σ_{zz} разных знаков в пределах одной пьезокерамической пластины. При этом величина σ_{rr} (рис.2.5,б) существенно больше σ_{zz} , что подтверждает справедливость гипотезы для упругих тонких пластин об отсутствии давления волокон по высоте сечения. Однако в случае исследования биморфных пластин σ_{zz} пренебрегать нельзя, поскольку наличие именно данной компонента тензора напряжений приводит к образованию продольно– поперечных колебаний.

$$\{\sigma_{rr}(0.3, 0, t) \times 10, W(0.3, 0, t)\} / V_0$$

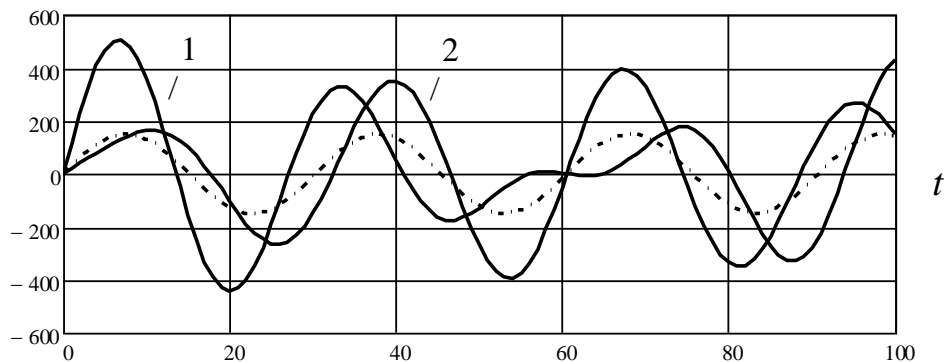


Рис.2.6. Графики изменения напряжений и перемещений по времени t (1 – σ_{rr} , 2 – W , штрих – пунктирная линия определяет характер действия электрической нагрузки)

Интересно также отметить особенность влияния инерционных свойств системы при высокочастотном воздействии на изменение во времени напряжений $\sigma_{rr}(0.3,0,t)$ (рис.2.6, «1») и перемещений $W(0.3,0,t)$ (рис.2.6, «2»). Максимальные значения рассматриваемых функций по времени не совпадают.

На рисунке 2.7 показаны графики изменение степени сжатия (растяжения) $\varepsilon(r,t)$ ($\varepsilon(r,t) = \frac{W^*(r,h_1,t) - W^*(r,0,t)}{W^*(0,0,t)} \times 100\%$) пьезокерамической пластины ($0 \leq z < h_1$) при достижении перемещений $W(r,z,t)$ амплитудных значений. В момент времени, приведенном на данном рисунке, область пластины при $0 \leq r < 0.65$ по высоте сечения испытывает растяжение, а при $r > 0.65$ – сжатие.

Данный факт объясняется подключением разрезных электродов в противофазе. Противоположная картина наблюдается в нижней пластине ($h_1 < z \leq h$) биморфной конструкции. При этом в результате деформирования толщина конструкции не меняется. Кроме того, максимальные значения $\varepsilon(r,t)$ образуются не в центре пластины, а при $r = 0.27$.

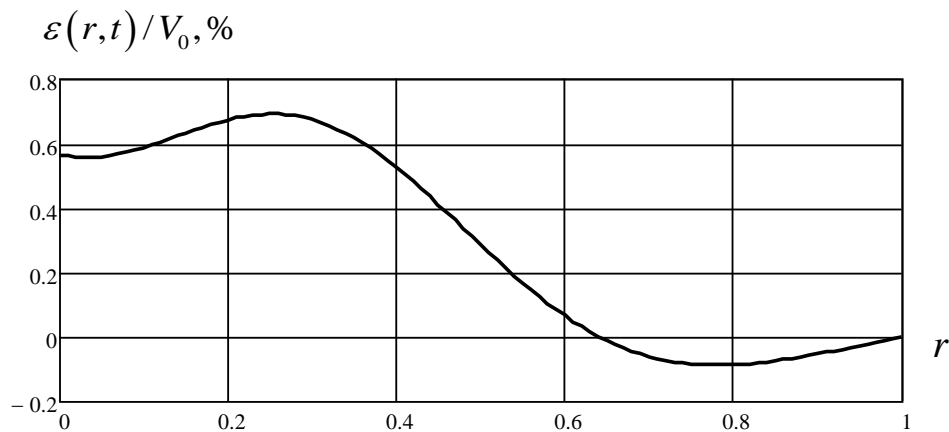


Рис.2.7. Изменение степени сжатия (растяжения) пьезокерамической пластины $\varepsilon(r,t)$ по радиальной координате

На рисунках 2.8 изображены графики, характеризующие изменение амплитудных значений составляющих электрического поля $\phi(r,z,t)$, $E_z(r,z,t)$,

$D_z(r, z, t)$ по высоте пластины различной толщины ($\beta = 0.8\lambda_{11}$). Цифрами 1,2 соответственно обозначены функции $E_z(r, z, t)$, $D_z(r, z, t)$, а пунктирной линией – электрический потенциал $\phi(r, z, t)$.

На основании анализа численных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Величина аксиальной компоненты вектора напряженности $E_z(r, z, t)$ в тонких пьезокерамических пластинах в случае действия одинаковой электрической нагрузки в основном зависит от их толщины. При этом в области соединения пластин наблюдается достаточно резкое увеличение численных значений.
2. Графики изменения аксиальной компоненты векторов индукции $D_z(r, z, t)$ и напряженности $E_z(r, z, t)$ электрического поля по высоте пластины описывается параболической зависимостью. Однако при исследовании тонких биморфных конструкций с помощью прикладных теорий без большой погрешности можно использовать гипотезы о линейном характере изменения $\phi(r, z, t)$ и постоянном значении $D_z(r, z, t)$ и $E_z(r, z, t)$ по толщине пьезокерамической пластины.
3. При проектировании изгибных преобразователей резонансного класса необходимо учитывать, что один из способов повышения чувствительности прибора является уменьшение его толщины. Это приводит к понижению жесткости конструкции и увеличению амплитудных значений вертикальных перемещений. Однако в этом случае наблюдается увеличение напряженности $E_z(r, z, t)$ (рис. 2.8, а, б). Данный факт необходимо учитывать, поскольку при больших значениях $E_z(r, z, t)$ происходит деполяризация пьезокерамического материала. В частности, образование в пьезокерамическом материале состава ЦТС–19 напряженности электрического поля более 300 кВ/м приводит к снижению численных значений коэффициентов диэлектрической проницаемости и пьезомодулей.

На рисунке 2.9 показаны графики изменения радиальных компонент вектора электрического поля $E_r(r, h_1/2, t)$, $D_r(r, h_1/2, t)$ по радиальной координате (1– E_r , 2– D_r) в биморфных пластинах различной толщины.

Сравнение графиков (рис.2.8,2.9), характеризующих компоненты электрического поля в биморфной конструкции, позволяют сделать вывод о том, что при расчете тонких пьезокерамических пластин с помощью прикладных теорий радиальными компонентами (рис.2.9) электрического поля можно пренебречь, поскольку их численные значения существенно меньше аксиальных составляющих (рис.2.8). Данный вывод позволяют в дальнейшем сформулировать гипотезы о характере распределения электрического поля в биморфных конструкциях ступенчато переменной толщины по радиальной координате и построить замкнутое решение.

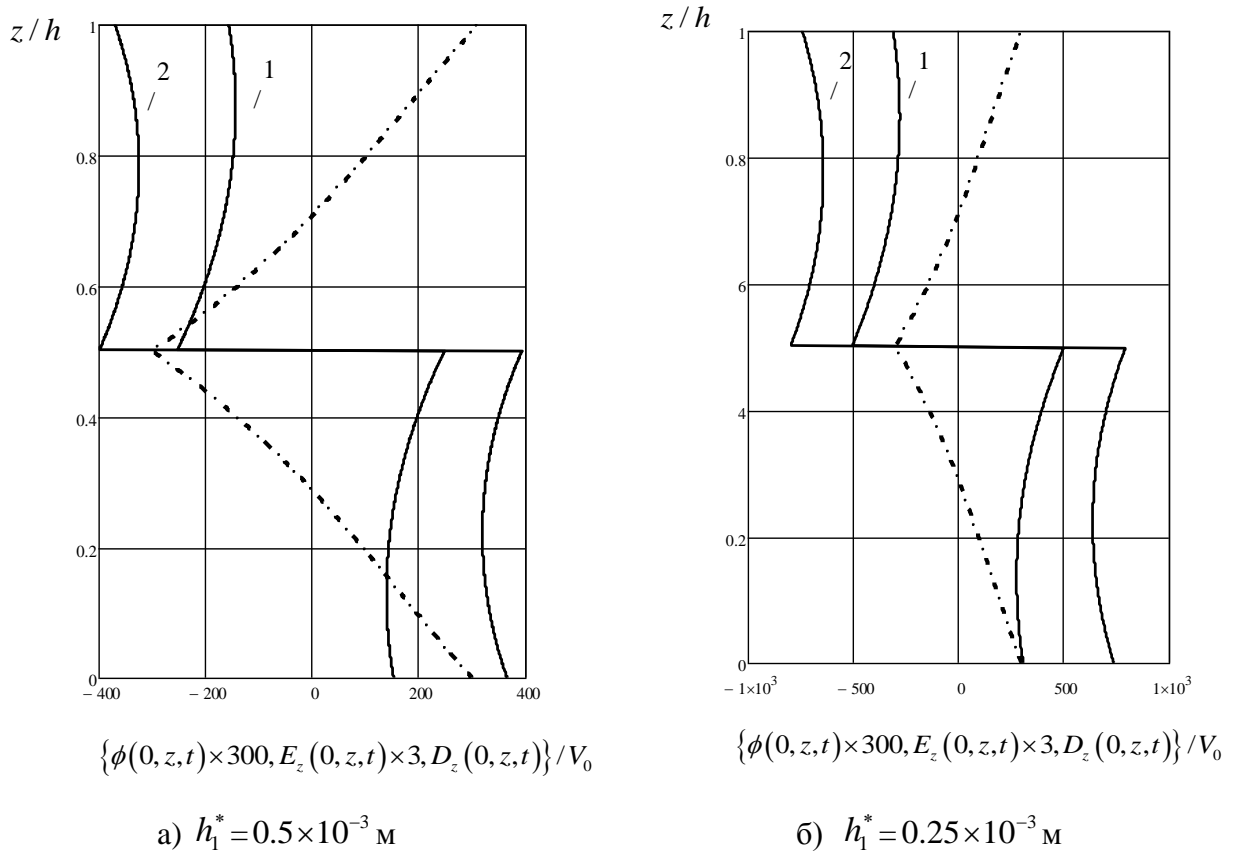
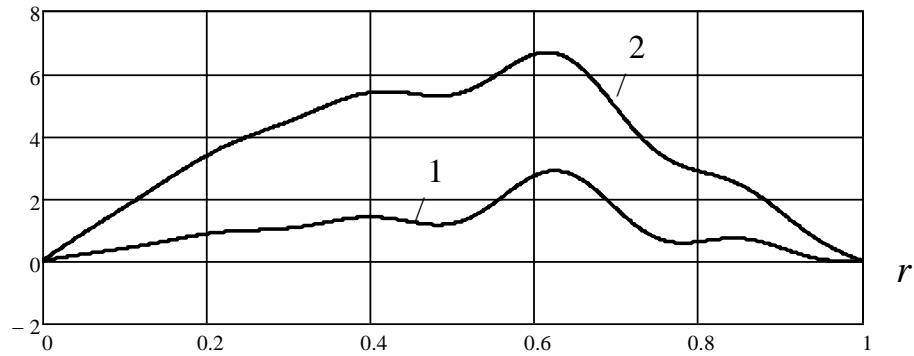


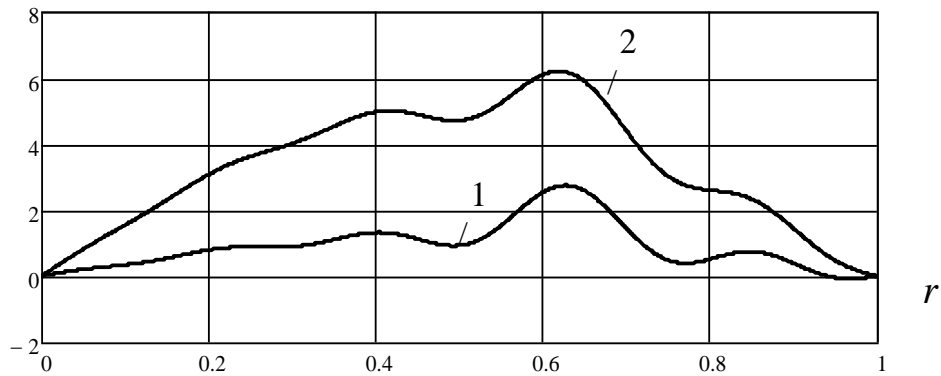
Рис.2.8. Графики изменения амплитудных значений $\phi(r, z, t)$, $E_z(r, z, t)$, $D_z(r, z, t)$ по высоте биморфной пластины при $\beta = 0.8\lambda_{11}$ (1– E_z , 2– D_z , пунктирная линия– ϕ)

$$\left\{ E_r \left(r, h_1/2, t \right) \times 5, D_r \left(r, h_1/2, t \right) \right\} / V_0$$



а) $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м

$$\left\{ E_r \left(r, h_1/2, t \right) \times 5, D_r \left(r, h_1/2, t \right) \right\} / V_0$$



б) $h_1^* = 0.25 \times 10^{-3}$ м

Рис.2.9. Графики изменения амплитудных значений радиальных компонент вектора электрического поля по радиальной координате: 1- E_r , 2- D_r ($\beta = 0.8\lambda_{11}$)

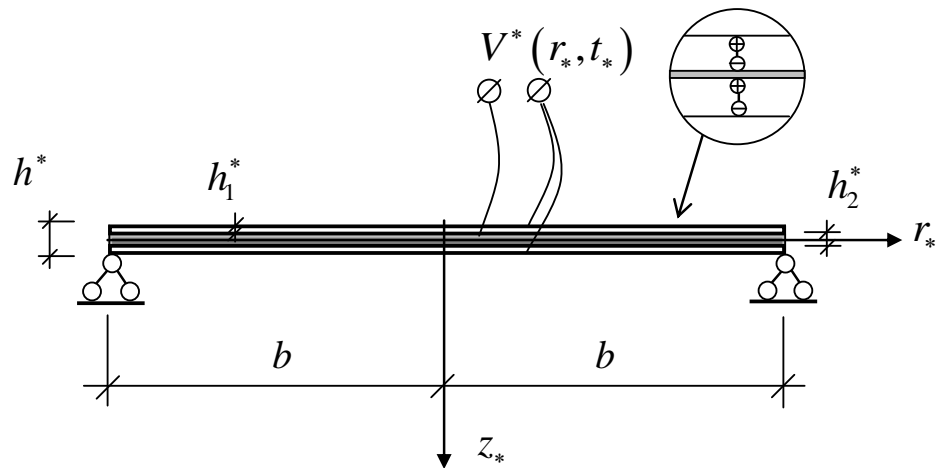
2.2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СПЛОШНОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

2.2.1. Постановка задачи

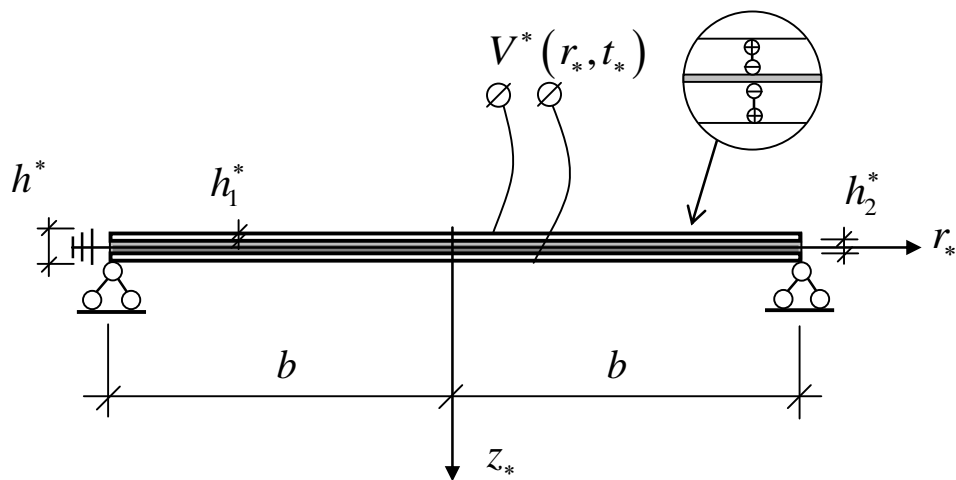
Рассматривается круглый шарнирно закрепленный биморфный преобразователь, состоящий из двух пьезокерамических пластин высотой h_1^* , которые же-

стко соединены с лицевыми поверхностям металлической подложки то лщиной h_2^* (рис.2.10). Электроупругие пластины выполнены из материала гексагональной системы класса бтт. Изгибные осесимметричные колебания в данной конструкции при исследовании задач обратного пьезоэффекта создаются в следующих случаях:

- 1) Лицевые электроды пьезопластин с параллельным направлением вектора аксиальной поляризации и металлическая подложка подключены в противофазе к источнику электрического напряжения $V^*(r_*, t_*)$ (рис.2.10, а);
- 2) Лицевые электроды пьезопластин с противоположным направлением вектора аксиальной поляризации подключены в противофазе к источнику электрического напряжения $V^*(r_*, t_*)$, а металлическая подложка заземлена (рис.2.10, б).



а)



б)

Рис.2.10. Биморфная пластина

Здесь, также как в параграфе 2.1, исследуется задача с параллельным направлением вектора поляризации пьезокерамических пластин (рис.2.10, а) с дальнейшим использованием всех качественных результатов численного расчета для второй расчетной схемы (рис.2.10, б).

Начально–краевые условия для биморфной пластины с параллельным направлением вектора поляризации пьезокерамического материала ($s=1$) и металлической подложкой ($s=2$)* в цилиндрической системе координат и безразмерной форме записываются следующим образом**:

$$r=0,1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (2.44)$$

$$\sigma_{rr|_{r=1}} = \frac{C_{11}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{12}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{U}{r} + \frac{C_{13}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0,$$

$$D_{r|_{r=1}} = -\frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0;$$

$$z=0, h \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (2.45)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi(r, z, t) = V(r, t) / 2;$$

$$z=h_1, h_1+h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (2.46)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

$$\phi = -V(r, t) / 2, \quad U(z+0) = U(z-0), \quad W(z+0) = W(z-0);$$

$$t=0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z);$$

* При исследовании упругой среды ($s=2$) в (2.44)–(2.46) не учитываются составляющие электрического поля.

** Условие закрепления цилиндрической поверхности пластины $W(1, 0, t) = 0$ удовлетворяется посредством выбора ядра интегрального преобразования по радиальной координате.

где $\{U, W, r, z, h, h_1, h_2\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*, h_1^*, h_2^*\} / b$; $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(2)} / \rho^{(2)}}$; $\sigma_{zz}(r_*, z_*, t_*)$, $\sigma_{rz}(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты тензора механических напряжений; $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ – перемещения и их скорости при $t = 0$.

Равенства (2.3), (2.44) – (2.47) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

2.2.2. Построение общего решения

Методика исследования настоящей краевой задачи аналогична алгоритму решения, построенному в первом параграфе. При этом на первом этапе процедура стандартизации краевых условий при $r = 1$ проводится в результате замены последних двух равенств (2.44) на следующие выражения:

$$W(1, z, t) = W_1(z, t), \quad \phi(1, z, t) = \phi_1(z, t). \quad (2.48)$$

где $W_1(z, t), \phi_1(z, t)$ – неизвестные функции, определяемые в процессе решения задачи из условия отсутствия касательных напряжений и радиальной компоненты вектора индукции электрического поля на цилиндрической поверхности пластины ($\sigma_{rz|_{r=1}} = 0, D_{r|_{r=1}} = 0$).

Кроме того, используются новые функции $u(r, z, t), w(r, z, t), \chi(r, z, t)$ связанные с $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)$ соотношениями:

$$U(r, z, t) = f_1(r) \frac{\partial W_1(z, t)}{\partial z} + u(r, z, t), \quad (2.49)$$

$$W(r, z, t) = f_2(r) W_1(z, t) + w(r, z, t),$$

$$\phi(r, z, t) = \phi_1(z, t) + \chi(r, z, t),$$

где $f_1(r), f_2(r)$ – стандартизирующие функции.

В результате подстановки (2.49) в (2.3), (2.44) – (2.48) и выполнения условий:

$$f_1(0) = 0, \quad \nabla f_1(r)|_{r=1} = -\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}}, \quad \frac{df_2(r)}{dr}|_{r=1} = f_2(1) = 1, \quad \frac{df_2(r)}{dr}|_{r=0} = 0, \quad (2.50)$$

получаем новую краевую задачу относительно функций u, w, χ . При этом правые части дифференциальных уравнений (2.3), первые два равенства (2.45), (2.46) становятся неоднородными с правыми частями $R_1 \div R_3, B_1 \div B_4$, начальные условия (2.44) $U, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ следует заменить на $u_0, \dot{u}_0, w_0, \dot{w}_0$:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\left[\frac{d}{dr} \nabla f_1 + \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} f_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(1)} + C_{55}^{(1)})}{C_{11}^{(1)}} \frac{df_2}{dr} - \Phi^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial W_1}{\partial z}, \\ R_2 &= -\left[\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \nabla \frac{df_2}{dr} + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} f_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(1)} + C_{55}^{(1)})}{C_{11}^{(1)}} \nabla f_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} f_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] W_1 - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2}, \\ R_3 &= -\left[\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \nabla f_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{df_2}{dr} + f_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] W_1 + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2}, \\ B_1 &= -\left(\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla f_1 + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} f_2 \right) \frac{\partial W_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, \quad B_2 = -\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{df_2}{dr} + f_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W_1, \\ B_3 &= \left(\frac{C_{13}^{(2)} - C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla f_1 + \frac{C_{33}^{(2)} - C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} f_2 \right) \frac{\partial W_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, \quad B_4 = \frac{C_{55}^{(2)} - C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{df_2}{dr} + f_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W_1, \\ u_0 &= U_0 - U|_{t=0}, \quad \dot{u}_0 = \dot{U}_0 - \dot{U}|_{t=0}, \quad w_0 = W_0 - W|_{t=0}, \quad \dot{w}_0 = \dot{W}_0 - \dot{W}|_{t=0}, \end{aligned}$$

а условия (2.44), (2.48) при $r = 1$ принимают следующий вид:

$$w(1, z, t) = 0, \quad \nabla u|_{r=1} = 0, \quad \phi(1, z, t) = 0. \quad (2.51)$$

Следует отметить, что второе равенство (2.48) формируется в случае $C_{11}^{(s)} = C_{12}^{(s)}$, а в граничных условиях относительно функций u, w, χ принимаем, что $\phi_1(z, t)|_{z=0, h_1, h_1+h_2, h} = 0$.

Применяем к краевой задаче относительно u, w, χ преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r , используя следующие трансформанты:

$$u_H(j_n, z, t) = \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.52)$$

$$\{w_H(j_n, z, t), \phi_H(j_n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \chi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr ,$$

и формулы обращения:

$$u(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.53)$$

$$w(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r) , \quad \chi(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r) ,$$

где j_n – положительные нули функции $J_0(j_n)$, расположенные в порядке их возрастания.

В пространстве изображений получаем новую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = R_{1H}, \quad (2.54)$$

$$-\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \phi_H + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = R_{2H},$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \phi_H - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} = R_{3H};$$

$$z = 0, h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad (2.55)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \phi_H = B_{2H} \quad , \quad \phi_H = V_H ;$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)} - C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = B_{3H}, \quad (2.56)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)} - C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \phi_H = B_{4H},$$

$$\phi_H = -V_H, \quad u_H(z+0) = u_H(z-0), \quad w_H(z+0) = w_H(z-0);$$

$$t = 0 \quad u_H(n, z, 0) = u_{0H}(n, z), \quad \dot{u}_H(n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(n, z), \quad (2.57)$$

$$w_H(n, z, 0) = w_{0H}(n, z), \quad \dot{w}_H(n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(n, z);$$

где $\{R_{1H}, B_{2H}, B_{4H}, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_1, B_2, B_4, u_0, \dot{u}_0\} r J_1(j_n r) dr$,

$$\{R_{2H}, R_{3H}, B_{1H}, B_{3H}, V_H, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_2, R_3, B_1, B_3, V/2, w_0, \dot{w}_0\} r J_0(j_n r) dr.$$

На втором этапе решения процедура приведения граничных условий (2.55), (2.56) к однородным выполняется при использовании следующих разложений:

$$u_H(n, z, t) = S_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad (2.58)$$

$$w_H(n, z, t) = S_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad \phi_H(n, z, t) = S_3(n, z, t) + \chi_H(n, z, t),$$

где $S_1 \dots S_3$ – дифференцируемые функции.

Подстановка (2.58) в (2.54) – (2.57), при выполнении условий

$$z = 0, h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n S_1 + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial z} = B_{1H}, \quad (2.59)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} - j_n S_2 \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n S_3 = B_{2H}, \quad S_3 = V_H;$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n S_1 + \frac{C_{33}^{(1)} - C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{\partial S_3}{\partial z} = 0, \quad (2.60)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)} - C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} - j_n S_2 \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n S_3 = B_{3H},$$

$$S_3 = -V_H, \quad S_1(z+0) = S_1(z-0), \quad S_2(z+0) = S_2(z-0);$$

позволяет получить новую краевую задачу относительно функций U_H, W_H, χ_H с однородными граничными условиями вида (2.55), (2.56). В этом случае правые части дифференциальных уравнений (2.54) и начальные условия (2.57) следует заменить на $F_{1H} \div F_{3H}, U_{0H}, \dot{U}_{0H}, W_{0H}, \dot{W}_{0H}$:

$$F_{1H} = R_{1H} + j_n^2 S_1 - \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}^{(1)} + C_{55}^{(1)})}{C_{11}^{(1)}} j_n \frac{\partial S_2}{\partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_3}{\partial z} + \Phi^{(1)} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2},$$

$$F_{2H} = R_{2H} + \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n^2 S_2 - \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2} - \frac{(C_{13}^{(1)} + C_{55}^{(1)})}{C_{11}^{(1)}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 S_3 - \frac{\partial^2 S_3}{\partial z^2} + \Phi^{(1)} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2},$$

$$F_{3H} = R_{3H} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 S_2 - \frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 S_3 + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 S_3}{\partial z^2},$$

$$U_{0H} = u_{0H} - S_{1|t=0}, \quad \dot{U}_{0H} = \dot{u}_{0H} - \dot{S}_{1|t=0}, \quad W_{0H} = w_{0H} - S_{2|t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \dot{S}_{2|t=0}.$$

Начально–краевую задачу (2.54) – (2.57) относительно функций U_H, W_H, χ_H решаем путем введения на сегменте $[0, h]$ вырожденное конечное интегральное преобразование (КИП) [44,45] с неизвестными компонентами вектор–функции ядра $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h (U_H K_{1in} + W_H K_{2in}) dz, \quad (2.61)$$

$$\{U_H, W_H, \chi_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} \{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (2.62)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h (K_{1in}^2 + K_{2in}^2) dz,$$

где λ_{in} – параметры, образующие для каждого $n = \overline{0, \infty}$ счетное множество.

Спектр частот собственных осесимметричных колебаний пластины ω_{in} определяется с помощью следующей зависимости:

$$\omega_{in} = \lambda_{in} b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(2)} / \rho^{(2)}}. \quad (2.63)$$

Принимая во внимание кусочно–гладкий характер функций $U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), \chi_H(n, z, t)$ компоненты ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{K_1, K_2, K_3\} = & \{K_1^{(A)}, K_2^{(A)}, K_3^{(A)}\} H(h_1 - z) + \{K_1^{(B)}, K_2^{(B)}, K_3^{(B)}\} H(z - h_1 - h_2) + \\ & + \{K_1^{(C)}, K_2^{(C)}\} [H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2)]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

В результате использования к краевой задаче относительно функций U_H, W_H, χ_H структурного алгоритма КИП [45,46] получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$, решение которой имеет вид:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_0 \cos(\lambda_{in} t) + \dot{G}_0 \sin(\lambda_{in} t) / \lambda_{in} + \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in}(t - \tau) d\tau, \quad (2.65)$$

и однородную задачу относительно компонент ядра преобразований $K_{1in}^{(p)}, K_{2in}^{(p)}, K_{3in}^{(p)}$:

$$\left(\Phi^{(s)} \lambda_{in}^2 - j_n^2 K_{1in}^{(p)} \right) + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 K_{1in}^{(p)}}{dz^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dK_{2in}^{(p)}}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{3in}^{(p)}}{dz} = 0, \quad (2.66)$$

$$\left(\Phi^{(s)} \lambda_{in}^2 - \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 \right) K_{2in}^{(p)} + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 K_{2in}^{(p)}}{dz^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dK_{1in}^{(p)}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{3in}^{(p)} + \frac{d^2 K_{3in}^{(p)}}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dK_{1in}^{(p)}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 K_{2in}^{(p)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(p)}}{dz^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 K_{3in}^{(p)} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 K_{3in}^{(p)}}{dz^2} = 0;$$

$$z = 0, h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n K_{1in}^{(A,B)} + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{dK_{2in}^{(A,B)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(A,B)}}{dz} = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{dK_{1in}^{(A,B)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(A,B)} = 0, \quad K_{3in}^{(A,B)} = 0;$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad K_{1in}^{(A,B)} = K_{1in}^{(C)}, \quad K_{2in}^{(A,B)} = K_{2in}^{(C)}, \quad K_{3in}^{(A,B)} = 0, \quad (2.68)$$

$$\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n K_{1in}^{(A,B)} + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{dK_{2in}^{(A,B)}}{dz} + \frac{dK_{3in}^{(A,B)}}{dz} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n K_{1in}^{(C)} + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{dK_{2in}^{(C)}}{dz},$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{dK_{1in}^{(A,B)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(A,B)} \right) = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{dK_{1in}^{(C)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(C)} \right).$$

$$\text{Здесь} \quad F(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \left[\left(\Phi^{(s)} \right)^{-1} F_{1H} K_{1in} + \left(\Phi^{(s)} \right)^{-1} F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in} \right] dz,$$

$$G_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^h (U_{0H} K_{1in} + W_{0H} K_{2in}) dz, \quad \dot{G}_0(\lambda_{in}, n) = \int_0^h (\dot{U}_{0H} K_{1in} + \dot{W}_{0H} K_{2in}) dz.$$

При исследовании системы дифференциальных уравнений (2.66) необходимо отдельно рассмотреть задачи для электроупругой ($s = 1$) и упругой ($s = 2$) среды.

Выражения $K_{1in}^{(p)}, K_{2in}^{(p)}, K_{3in}^{(p)}$ ($p = A, B$) для электроупругого материала ($s = 1$) получены при решении динамической задачи, рассмотренной в первом параграфе, и имеют вид (2.36), (2.40), (2.41).

Для упругого материала ($s = 2$) система (2.66) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно $K_{2in}^{(C)}$:

$$\frac{d^4 K_{2in}^{(C)}}{dz^4} + a_{1in} \frac{d^2 K_{2in}^{(C)}}{dz^2} + a_{2in} K_{2in}^{(C)} = 0, \quad (2.69)$$

где
$$a_{1in} = \frac{C_{11}^{(2)}}{C_{55}^{(2)}} a_{3in} + \frac{C_{11}^{(2)}}{C_{33}^{(2)}} a_{4in} + \frac{(C_{13}^{(2)} + C_{55}^{(2)})^2}{C_{33}^{(2)} C_{55}^{(2)}} j_n^2, \quad a_{2in} = \frac{(C_{11}^{(2)})^2}{C_{33}^{(2)} C_{55}^{(2)}} a_{3in} a_{4in},$$

$$a_{3in} = \lambda_{in}^2 - j_n^2, \quad a_{4in} = \lambda_{in}^2 - \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(2)}} j_n^2.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения вида (2.69) имеет вид:

$$K_{2in}^{(C)}(\lambda_{in}, z) = \sum_{p=1}^4 D_{pin}^{(C)} R_{pin}(\lambda_{in}, z). \quad (2.70)$$

Здесь имеют место три варианта соотношения коэффициентов:

а) $a_{1in}^2 < 4a_{2in}$; б) $a_{1in}^2 > 4a_{2in}$, $a_{2in} > 0$; в) $a_{1in}^2 > 4a_{2in}$, $a_{2in} < 0$.

Тогда частные решения $R_{pin}(z)$ записываются следующим образом:

$$R_{1in} = \begin{cases} a) \exp(\chi_{1n} z) \cos(\beta_n z) \\ б) \exp(\chi_{2n} z) \\ в) \exp(\chi_{2n} z) \end{cases}, \quad R_{2in} = \begin{cases} a) \exp(\chi_{1n} z) \sin(\beta_n z) \\ б) \exp(-\chi_{2n} z) \\ в) \exp(-\chi_{2n} z) \end{cases},$$

$$R_{3in} = \begin{cases} a) \exp(-\chi_{1n} z) \cos(\beta_n z) \\ б) \exp(\chi_{3n} z) \\ в) \cos(\chi_{3n} z) \end{cases}, \quad R_{4in} = \begin{cases} a) \exp(-\chi_{1n} z) \sin(\beta_n z) \\ б) \exp(-\chi_{3n} z) \\ в) \sin(\chi_{3n} z) \end{cases},$$

где
$$\chi_{1in} = \frac{1}{2} \left[2(a_{2in})^{1/2} - a_{1in} \right]^{1/2}, \quad \chi_{2in} = -2^{-1/2} \left[a_{1in} - (a_{1in}^2 - 4a_{2in})^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$\chi_{3in} = 2^{-1/2} \left[a_{1in} + (a_{1in}^2 - 4a_{2in})^{1/2} \right]^{1/2} . \quad \beta_{in} = \left(\frac{a_{1in}}{2} + \chi_{1in}^2 \right)^{1/2} .$$

Располагая (2.70), из системы (2.66) находим $K_{1in}^{(C)}$:

$$K_{1in}^{(C)}(\lambda_{in}, z) = a_{5in} \frac{d^3 K_{2in}^{(C)}}{dz^3} + a_{6in} \frac{dK_{2in}^{(C)}}{dz} , \quad (2.71)$$

где $a_{5in} = -\frac{C_{55}^{(2)} a_{7in}}{C_{11}^{(2)} a_{3in}}$, $a_{6in} = -a_{3ni}^{-1} \left(\frac{C_{13}^{(2)} + C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(2)}} j_n - a_{4in} a_{7in} \right)$,

$$a_{7in} = \frac{C_{55}^{(2)}}{(C_{13}^{(2)} + C_{55}^{(2)}) j_n} .$$

Подстановка выражений (2.36), (2.40), (2.41), (2.70), (2.71) в граничные условия (2.67), (2.68) формирует однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных $D_{1in}^{(A)} \dots D_{6in}^{(A)}$, $D_{1in}^{(B)} \dots D_{6in}^{(B)}$, $D_{1in}^{(C)} \dots D_{4in}^{(C)}$. Приравняв нулю ее главный детерминант, получаем трансцендентное уравнение для определения собственных чисел λ_{in} , а принимая $D_{6in}^{(B)} = 1$ формируем систему неоднородных уравнений для вычисления постоянных $D_{1in}^{(A)} \dots D_{6in}^{(A)}$, $D_{1in}^{(B)} \dots D_{5in}^{(B)}$, $D_{1in}^{(C)} \dots D_{4in}^{(C)}$.

Окончательные выражения функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$ получим, применяя к трансформанте (2.65) формулы обращения (2.62), (2.53). В результате, с учетом (2.49), (2.58), имеем:

$$U(r, z, t) = f_1(r) \frac{\partial W_1(z, t)}{\partial z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_1(j_n)^{-2} \left[S_1 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{1in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_1(j_n r) , \quad (2.72)$$

$$W(r, z, t) = f_2(r) W_1(z, t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_1(j_n)^{-2} \left[S_2 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n r) ,$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_1(j_n)^{-2} \left[S_3 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{3in} \|K_{in}\|^{-2} \right] J_0(j_n r) .$$

На последнем этапе исследования определяются функций $f_1(r)$, $f_2(r)$, $S_1(n, z, t)$, $S_2(n, z, t)$, $S_3(n, z, t)$, $W_1(z, t)$, входящих в разложения (2.49), (2.58).

Функции $f_1(r), f_2(r)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} = 0, \quad \frac{d^3 f_2(r)}{dr^3} = 0, \quad (2.73)$$

с учетом граничных условий (2.50). В результате имеем:

$$f_1(r) = -\frac{C_{13}^{(1)}}{2C_{11}^{(1)}} r, \quad f_2(r) = \frac{r^2 + 1}{2}. \quad (2.74)$$

Разложения S_1, S_2, S_3 записываются в виде:

$$\begin{aligned} \{S_1, S_2, S_3\} = \{S_1^{(A)}, S_2^{(A)}, S_3^{(A)}\} H(h_1 - z) + \{S_1^{(B)}, S_2^{(B)}, S_3^{(B)}\} H(z - h_1 - h_2) + \\ + \{S_1^{(C)}, S_2^{(C)}\} [H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2)] \end{aligned} \quad (2.75)$$

и определяются при решении системы дифференциальных уравнений (2.66), с учетом граничных условий (2.59), (2.60) и заменой $K_{1in} - S_1, K_{2in} - S_2, K_{3in} - S_3$, $\lambda_{in} = 0$.

Вертикальные перемещения $W_1(z, t)$ определяются из условия равенства нулю касательных напряжений на цилиндрической поверхности биморфной пластины $\sigma_{rz}|_{r=1} = 0$, а потенциал $\phi_1(z, t)$ вычисляется при учете отсутствия суммарного значения тока смещения на цилиндрической поверхности пьезокерамической пластины $\int_0^h D_{r|r=1} dz = 0$.

Для определения $W_1(z, t)$ принимаем, что вертикальные перемещения пьезокерамических пластин при $r = 1$ изменяются по линейной зависимости, а упругая пластина не сжимается. Тогда

$$W_1(z, t) = \frac{W_0}{h_1} \{zH(h_1 - z) + h_1 [H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2)] + (h - z)H(z - h_1 - h_2)\} V(1, t).$$

При выполнении условий

$$\phi_1(0, t) = \phi_1(h_1, t) = \phi_2(h_1 + h_2, t) = \phi_2(h, t) = 0,$$

функция $\phi_1(z, t)$ определяется следующим образом:

$$\phi_1(z, t) = \frac{4\phi_0}{h_1^2} \left\{ (h_1 z - z^2) H(h_1 - z) + [z^2 - (2h - h_1)z + h(h_1 + h_2)] H(z - h_1 - h_2) \right\} V(1, t).$$

Аппроксимация функции касательных напряжений $\int_0^h \sigma_{rz}|_{r=1} dz = 0$ и тока смещения $\int_0^h D_{r|r=1} dz = 0$ на цилиндрической поверхности биморфной пластины позволяет определить постоянные W_0, ϕ_0 .

Полученные расчетные соотношения (2.72) представляют замкнутое решение рассматриваемой динамической краевой задачи электроупругости.

2.2.3. Численный анализ результатов расчета

В качестве примера рассматривается биморфная пластина ($b = 30 \times 10^{-3}$ м), состоящая из пьезокерамических пластин состава ЦТС–19 [3] и металлической подложки ($h_2^* = 2h_1^*$), выполненной из различных сплавов (дюралюминий – $E = 7.3 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0.34$, $\rho = 2800$ кг/м³; латунь – $E = 9.8 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0.35$, $\rho = 8600$ кг/м³; E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность изотропного материала).

При этом принимается во внимание:

$$C_{11}^{(2)} = C_{33}^{(2)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12}^{(2)} = C_{13}^{(2)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{55}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Рассматривается работа электроупругой системы на первой резонансной частоте. В этом случае для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия используется сплошное электродное покрытие на лицевых поверхностях конструкции, а электрическая нагрузка $V(r, t)$ представляется в виде:

$$V(r, t) = V_0 \sin \beta t,$$

где V_0 – амплитудное значение электрической нагрузки в безразмерной форме;

$\beta = \beta^* b \sqrt{\rho^{(2)} / C_{11}^{(2)}}$; β, β^* – относительная (безразмерная) и круговая (размерная) частота вынужденных колебаний.

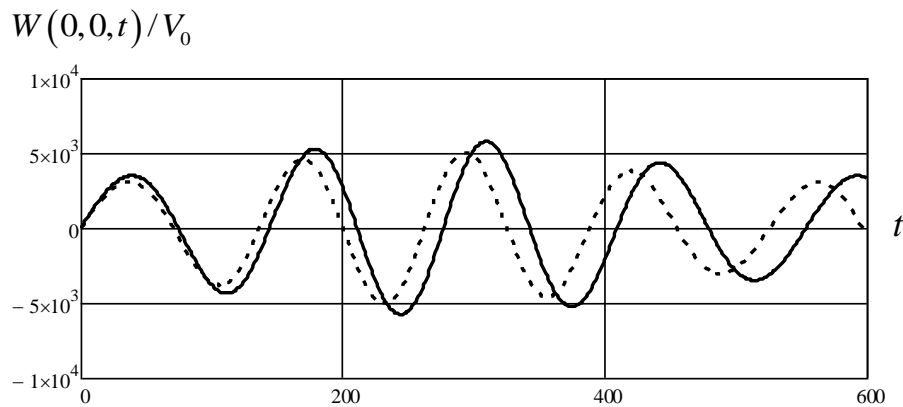
В таблице 2.2 приведены собственные значения λ_{1n} ($n = \overline{1,3}$) составной пластины различной толщины, а на рисунках 2.11 – 2.18 показаны графики изменения по пространственным координатам и времени составляющих механических и электрических полей напряжений ($\theta = 0.8\lambda_{11}$).

Анализа численных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. При заданных геометрических размерах конструкции физические характеристики материала подложки оказывают влияние на частотный спектр собственных колебаний (таблица 2.2) и практически не оказывают влияние на амплитудные значения вектора перемещений. На рисунке 2.11 пунктирной линией обозначены результате расчета, когда в качестве материала подложки используется латунь, а сплошной – дюралюминий.

Таблица 2.2

	Дюралюминий			Латунь		
	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}
$h_1^* = 0.2 \times 10^{-3}, \text{м}$	0.057	0.296	0.716	0.059	0.312	0.756
$h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}, \text{м}$	0.072	0.373	0.888	0.082	0.427	1.020



а) $h_1^* = 0.2 \times 10^{-3} \text{ м} (h_1 = 6.67 \times 10^{-3})$

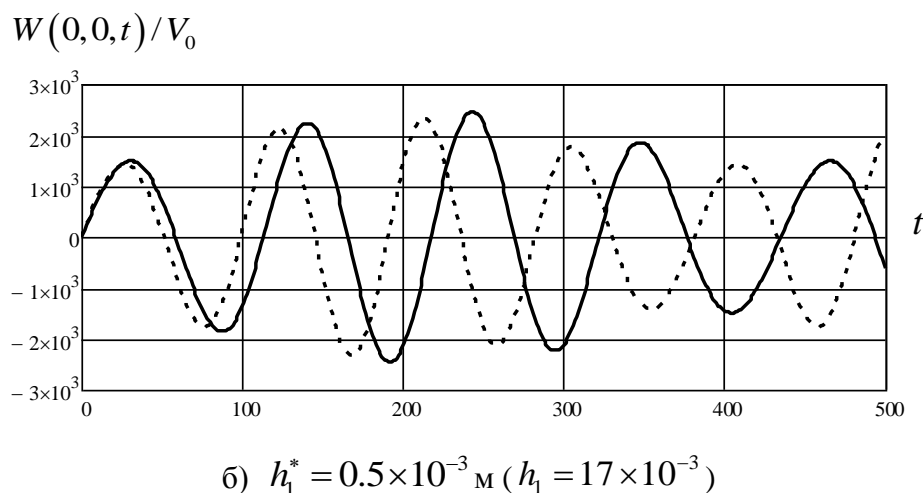
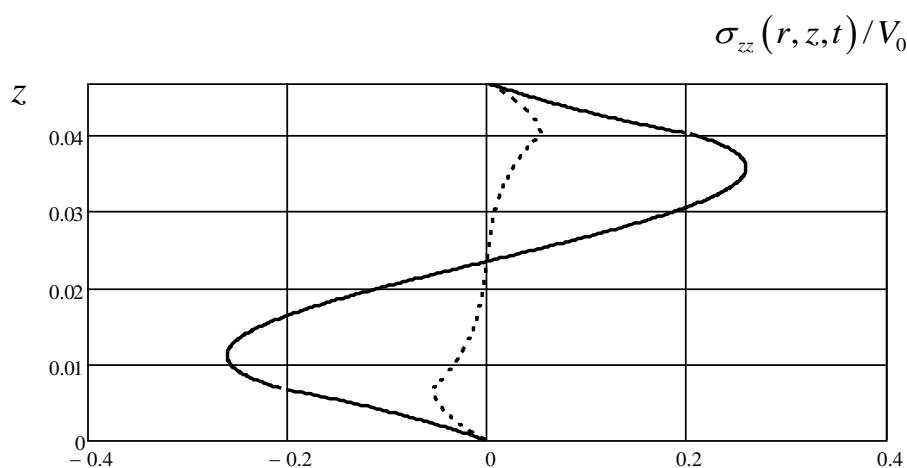
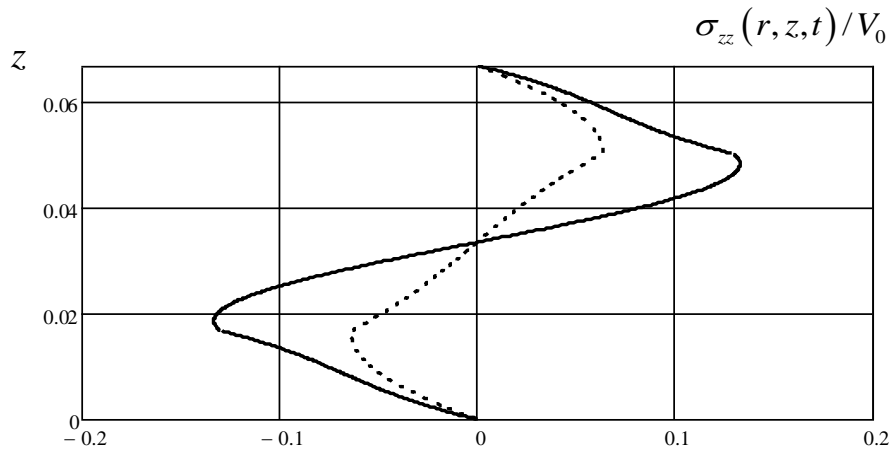


Рис.2.11. Графики изменения $W(0,0,t)$ во времени t (сплошная линия – подложка из дюралюминия, пунктирная – из латуни)

2. Наибольшее значение нормальных напряжений $\sigma_{zz}(r,z,t)$ по высоте электроупругой системы (рис.2.12, подложка–дюралюминий) наблюдается при $r=0$ в области соединения пьезокерамических пластин с подложкой ($z = h_1, h_1 + h_2$). При этом в более толстых пластинах ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ м}$) амплитудные значения $\sigma_{zz}(r,z,t)$ уменьшаются и более равномерно распределяются по радиальной координате (рис. 2.12, а,б).



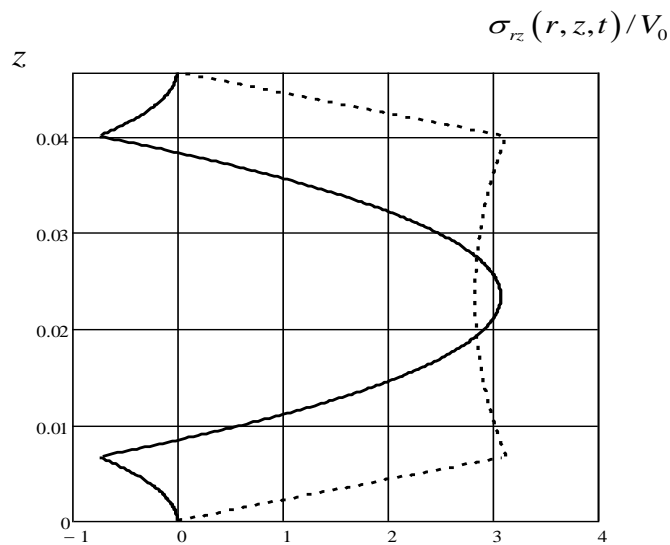
а) $h_1^* = 0.2 \times 10^{-3} \text{ м} (h_1 = 6.67 \times 10^{-3})$



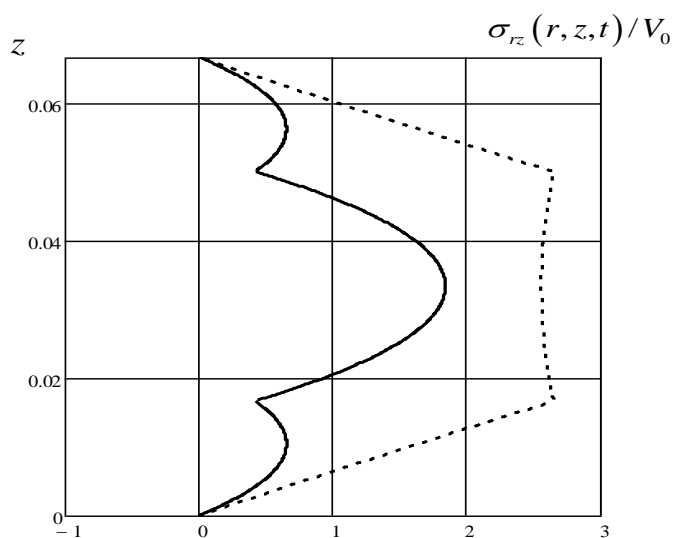
$$\text{б) } h_1^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ м (} h_1 = 17 \times 10^{-3} \text{)}$$

Рис.2.12. Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений $\sigma_{zz}(r, z, t)/V_0$ по высоте пластины h (сплошная линия – $r=0$, пунктирная – $r=0.5$)

3. Увеличение толщины пьезокерамических элементов приводит к уменьшению касательных напряжений $\sigma_{rz}(r, z, t)$ (рис.2.13, а,б). При этом в более тонких пластинах ($h_1^* = 0.2 \times 10^{-3}$ м) в случае $r=0.2$ касательные напряжения в конструкции имеют разные знаки (рис.2.13, а).



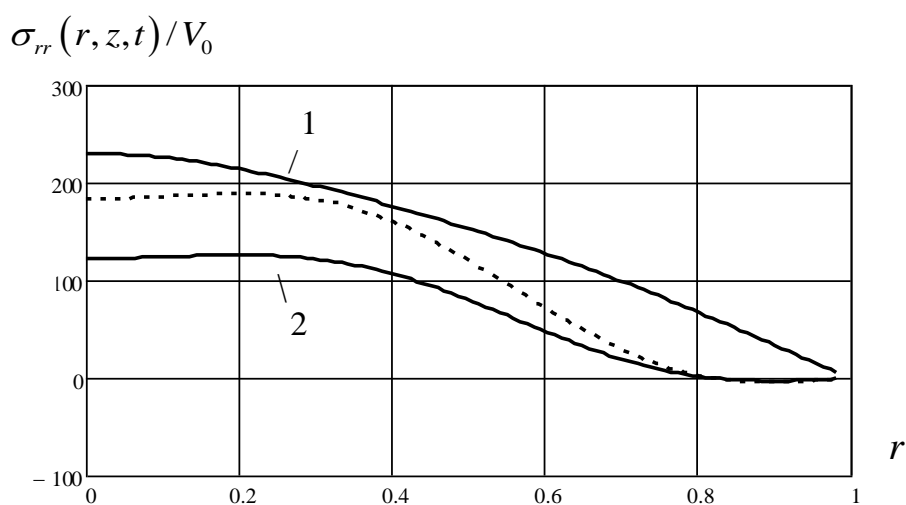
$$\text{а) } h_1^* = 0.2 \times 10^{-3} \text{ м (} h_1 = 6.67 \times 10^{-3} \text{)}$$



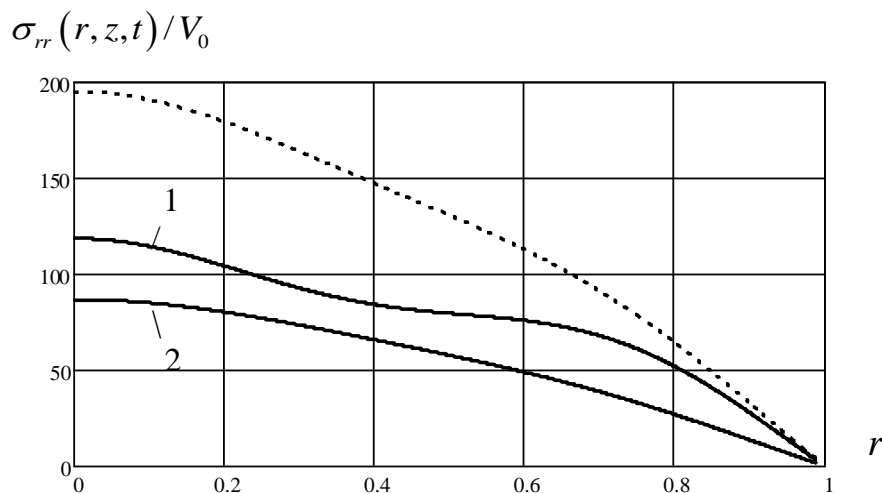
$$\text{б) } h_1^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ м } (h_1 = 17 \times 10^{-3})$$

Рис.2.13. Графики изменения амплитудных значений касательных напряжений $\sigma_{rz}(r, z, t)/V_0$ по высоте пластины h (сплошная линия – $r = 0.2$, пунктирная – $r = 0.5$)

4. Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по радиальной координате показывают, что при шарнирном закреплении пластины максимальные значения образуются в ее центре (рис.2.14). В области соединения двух элементов с разными физическими характеристиками наблюдается разное значение напряжений (рис.2.14, сплошные линии – 1, 2).



$$\text{а) } h_1^* = 0.2 \times 10^{-3} \text{ м } (h_1 = 6.67 \times 10^{-3})$$



$$\text{б) } h_1^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ м } (h_1 = 17 \times 10^{-3})$$

Рис.2.14. Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)/V_0$ по координате r (сплошная линия 1 — $z = h_1 + 0$ (подложка), сплошная линия — 2 — $z = h_1 - 0$ (пьезокерамическая пластина), пунктирная — $z = 0$)

При этом в более толстых пластинах ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м) наибольшие напряжения $\sigma_{rr}(r, z, t)$ появляются на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин (рис.2.14,б), а уменьшение их толщины (рис.2.14,а) приводит к образованию максимальных σ_{rr} на торцевой поверхности подложки (рис.2.14,а).

5. График « $U(r, z, t) - z$ » (рис.2.15) показывает, что гипотезу плоских сечений, применяемую в прикладной теории для тонких сплошных систем, можно использовать также при исследовании составных по высоте сечения тонких пластин, у которых физические характеристики (модули упругости) отличаются в 2 раза.

6. Амплитудные значения вектора напряженности электрического поля $E_z(r, z, t)$ по толщине пьезокерамической пластины изменяется по линейной зависимости и данный характер не зависит от радиальной координаты (рис.2.16, цифрами 1,2,3 обозначены результаты при $r = 0, 0.4, 0.8$). Причем наибольшие значения $E_z(r, z, t)$ наблюдаются в области соединения металлической и пьезокерамической пластин.

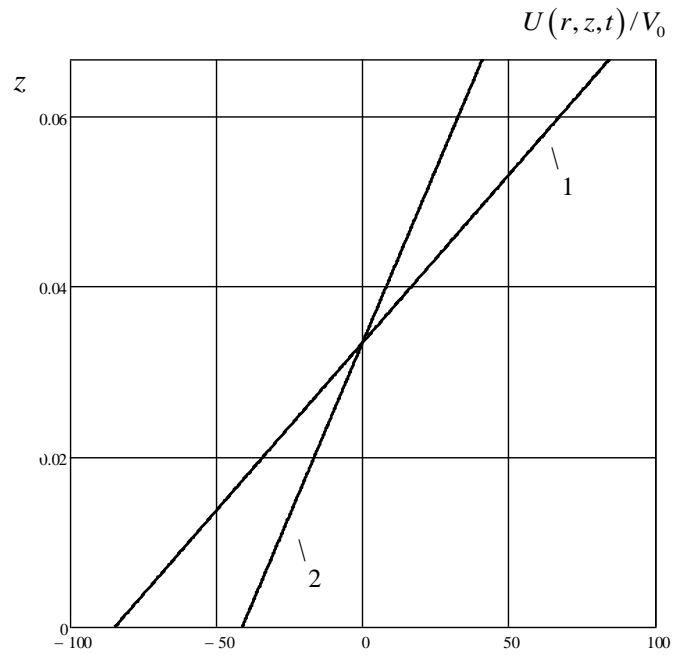


Рис.2.15. Изменения амплитудных значений $U(r, z, t)$ по высоте пластины (1- $r = 1$, 2- $r = 0.3$)

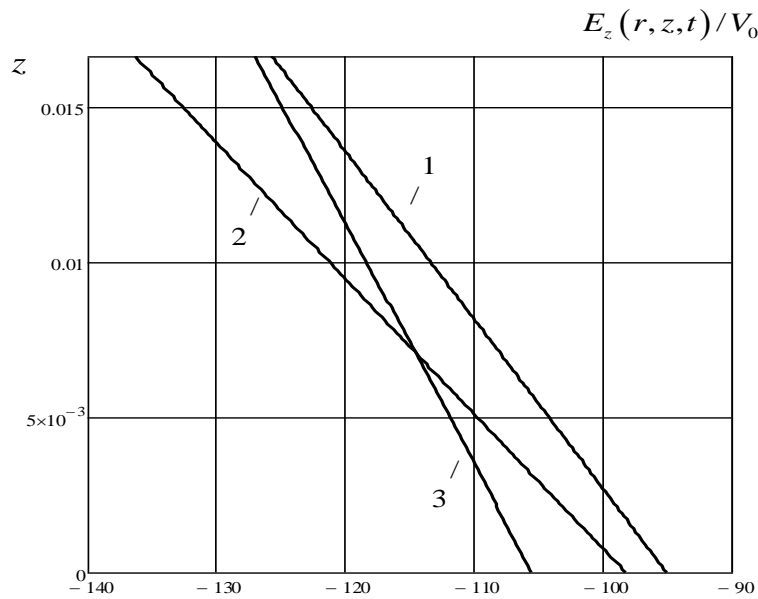


Рис.2.16. Изменения амплитудных значений $E_z(r, z, t)$ по высоте пластины (1- $r = 0$,
2- $r = 0.4$, 3- $r = 0.8$)

7. Амплитудные значения аксиальной компоненты индукции электрического поля $D_z(r, z, t)$, как и в задаче первого параграфа, практически не меняются по высоте сечения пластины (рис.2.17, цифрами 1,2,3 обозначены результаты при

$r = 0, 0.4, 0.8$). Однако вследствие разной степени деформации конструкции величина $D_z(r, z, t)$ существенно зависит от радиальной координаты.

8. Амплитудные значения радиальных компонент вектора электрического поля (рис.2.18, 1– $E_r(r, h_1/4, t)$, 2– $D_r(r, h_1/4, t)$) существенно меньше соответствующих аксиальных составляющих (рис.2.17). Это дает возможность при расчете биморфных пластин с помощью прикладных методов расчета для тонких пластин пренебречь радиальной составляющей электрического поля.

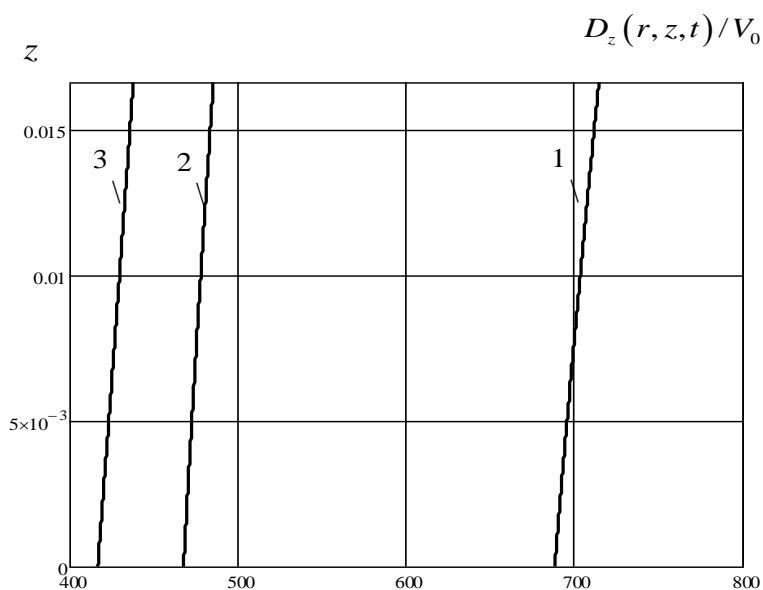


Рис.2.17. Изменения амплитудных значений $D_z(r, z, t)$ по высоте пластины (1– $r = 0$, 2– $r = 0.4$, 3– $r = 0.8$)

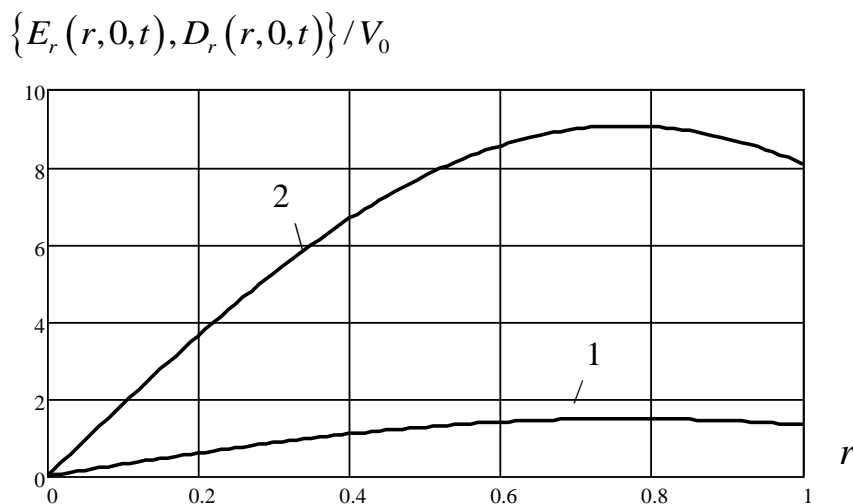


Рис.2.18. Графики изменения амплитудных значений радиальных компонент вектора электрического поля по радиальной координате: 1– E_r , 2– D_r ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м)

Следует отметить, что учет в расчетах функций $W_1(z, t), \phi_1(z, t)$ позволяют несущественно уточнить напряженно деформированное состояние и характер распределения электрического поля (менее 1%).

Глава 3.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ СПЛОШНОЙ КРУГЛОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

В настоящей главе исследуется динамическая осесимметричная задача прямого пьезоэффекта для круглой двухслойной (металл–пьезокерамика) биморфной конструкции постоянной и ступенчато переменной толщины, в случае действия на ее лицевой поверхности механической нагрузки (нормальных напряжений). Построенное замкнутое решение дает возможность научно обосновать конструктивное решение проектируемых преобразователей, определить способ фиксации электрического сигнала, подобрать их геометрические размеры, а также физические характеристики материала.

3.1.1. Постановка задачи

Пусть на круглую сплошную биморфную пластину действует произвольная осесимметричная динамическая нагрузка (нормальные напряжения) $q^*(r_*, t_*)$, являющаяся произвольной функцией радиальной координаты r_* и времени t_* (рис.3.1). Рассматриваемая конструкция состоит из пьезокерамической пластины высотой h_1^* , выполненной из аксиально поляризованного (электроупругого, $s = 1$) материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6mm, и металлической (упругой, $s = 2$) заземленной подложки толщиной h_2^* ($h^* = h_1^* + h_2^*$).

Подключение электродного покрытия, расположенного на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин, к измерительному прибору позволяет зафиксировать разность потенциалов $V^*(t_*)$. Рассматриваются случаи шарнирного и жесткого закрепления цилиндрической поверхности конструкции.

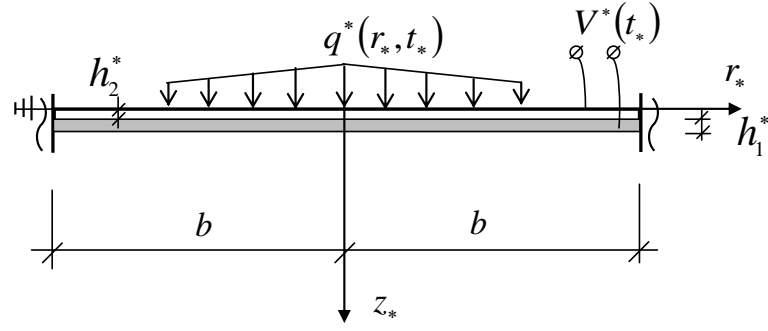


Рис.3.1. Биморфная пластина

В общем случае граничные условия на цилиндрической поверхности и в центре пластины определяются равенствами:

$$r = 0,1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (3.1)$$

$$D_{r|r=1} = -\frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0;$$

$$\text{- жесткое защемление:} \quad W(1, z, t) = 0, \quad U(1, z, t) = 0; \quad (3.2)$$

$$\text{- шарнирное закрепление:} \quad \sigma_{rz|r=1} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{rr|r=1} = \frac{C_{11}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{12}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{U}{r} + \frac{C_{13}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Граничные условия на лицевых поверхностях конструкции и области жесткого соединения двух элементов записываются следующим образом:

$$z = 0 \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} = q, \quad \sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0; \quad (3.4)$$

$$z = h_2 \quad \left(\frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|z=0} = \left(\frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)_{|z=0}, \quad (3.5)$$

$$\left[\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{|z=0} = \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|z=0},$$

$$U(z+0) = U(z-0), \quad W(z+0) = W(z-0), \quad \phi(z+0) = 0 ;$$

$$z = h \quad \sigma_{zz} = \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \nabla U + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad D_z = -\frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Равенства (3.5) учитывают жесткое соединение лицевых поверхностей элементов конструкции и заземление подложки, а последнее выражение (3.6) удовлетворяет условию подключения электродированной поверхности пьезокерамической пластины к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму «холостого хода».

Начальные условия определяют состояние пластины при $t = 0$ и записываются в виде:

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad (3.7)$$

$$W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z).$$

Функции, а также переменные в размерной и безразмерной формах связаны следующими зависимостями:

$$\{U, W, U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0, r, z, h, h_1, h_2\} = \{U^*, W^*, U_0^*, \dot{U}_0^*, W_0^*, \dot{W}_0^*, r_*, z_*, h^*, h_1^*, h_2^*\} / b,$$

$$q = \frac{q^*}{C_{11}^{(1)}}, \quad \phi(r, z, t) = \phi^*(r, z, t) \cdot e_{33} / (b C_{11}^{(1)}), \quad t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(2)} / \rho^{(2)}}.$$

3.1.2. Построение общего решения

На первом этапе выполняется следующее преобразование граничных условий по радиальной координате r^* :

– для жесткого защемления производится замена первого равенства (3.2) на условие отсутствия касательных механических напряжений при $r = 1$:

* Анализ численных результатов расчетов, выполненных в первой главе, показывает, что при заданных условиях закрепления можно использовать приближенные граничные условия (3.8), (3.9).

$$\sigma_{rz|_{r=1}} = \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0. \quad (3.8)$$

– при шарнирном закреплении необходимо заменить последнее (3.1) и первое (3.3) соотношения на условия равенства нулю потенциала, а также вертикальной компоненты вектора перемещений на цилиндрической поверхности:

$$\phi(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0. \quad (3.9)$$

Кроме того, в случае жесткого защемления пластины вводится новая функция $w(r, z, t)$, связанная с $W(r, z, t)$ соотношением:

$$W(r, z, t) = W_1(t) + w(r, z, t). \quad (3.10)$$

Здесь $W_1(t)$ – неизвестная на данном этапе решения функция, позволяющая учесть закрепление в вертикальной плоскости срединной поверхности ($z = 0$) пластины при $r = 1$.

Подстановки (3.10) в (2.3), (3.1) – (3.9) позволяет получить краевую задачу относительно функций U, w, ϕ . При этом второе дифференциальное уравнение (2.3) становится неоднородным с правой частью R_2 , начальные условия W_0, \dot{W}_0 следует заменить на w_0, \dot{w}_0 :

$$R_2 = \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}, \quad w_0 = W_0 - W_{1|_{t=0}}, \quad \dot{w}_0 = \dot{W}_0 - \dot{W}_{1|_{t=0}},$$

а граничные условия (3.1) – (3.3) принимают вид:

$$\text{– жесткое защемление:} \quad U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{z=1} = 0; \quad (3.11)$$

$$\text{– шарнирное закрепление:} \quad W(1, z, t) = 0, \quad \phi(1, z, t) = 0, \quad \nabla U \Big|_{r=1} = 0. \quad (3.12)$$

Здесь следует отметить, что последнее условие (3.12) получается при $C_{11}^{(s)} = C_{12}^{(s)}$.

Применяем к краевой задаче (2.3), (3.1) – (3.9), (3.11), (3.12) относительно функций U, w, ϕ конечные интегральные преобразования Ханкеля, используя следующие трансформанты:

$$u_H(j_n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (3.13)$$

$$\{w_H(j_n, z, t), \varphi_H(j_n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

и формулы обращения:

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z, t)}{S(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (3.14)$$

$$\{w(r, z, t), \phi(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(j_n, z, t), \varphi_H(j_n, z, t)\}}{S(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где j_n – положительные нули функций $J_0(j_n)$, $J_1(j_n)$ соответственно при шарнирном и жестком закреплении пластины, расположенные в порядке их возрастания ($n = \overline{0, \infty}$; $j_0 = 0$); $S(j_n) = J_0(j_n)$ при жестком и $S(j_n) = J_1(j_n)$ при шарнирном закреплении.

В пространстве изображений получаем новую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 u_H}{dz^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dw_H}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{d\varphi_H}{dz} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = 0, \quad (3.15)$$

$$-\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{du_H}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \varphi_H + \frac{d^2 \varphi_H}{dz^2} - \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = R_{2H},$$

$$\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{du_H}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \varphi_H - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 \varphi_H}{dz^2} = 0;$$

$$z=0 \quad \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} = q_H, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0; \quad (3.16)$$

$$z=h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)} - C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)} - C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \varphi_H = 0,$$

$$u_H(z+0) - u_H(z-0) = 0, \quad w_H(z+0) - w_H(z-0) = 0, \quad \varphi_H = 0;$$

$$z = h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n u_H + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial w_H}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n \varphi_H = 0, \quad \frac{e_{31}}{e_{33}} j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = 0;$$

$$t = 0 \quad u_H(j_n, z, 0) = u_{0H}(j_n, z), \quad \dot{u}_H(j_n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(j_n, z), \quad (3.19)$$

$$w_H(j_n, z, 0) = w_{0H}(j_n, z), \quad \dot{w}_H(j_n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(j_n, z).$$

$$\text{где } \{w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{w_0, \dot{w}_0\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$\{R_{2H}, q_H, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_2, q, u_0, \dot{u}_0\} r J_0(j_n r) dr.$$

На втором этапе решения граничные условия (3.16)–(3.18) приводятся к однородным, с помощью следующих разложений:

$$u_H(j_n, z, t) = Y_{1H}(z, t) + U_H(j_n, z, t), \quad (3.20)$$

$$w_H(j_n, z, t) = Y_{2H}(z, t) + W_H(j_n, z, t),$$

$$\varphi_H(j_n, z, t) = Y_{3H}(z, t) + \chi_H(j_n, z, t).$$

В результате подстановки (3.20) в (3.15) – (3.19), при учете соотношений:

$$z = 0 \quad \frac{C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n Y_{1H} + \frac{C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial Y_{2H}}{\partial z} = q_H, \quad \frac{\partial Y_{1H}}{\partial z} - j_n Y_{2H} = 0; \quad (3.21)$$

$$z = h_2 \quad \frac{C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} j_n Y_{1H} + \frac{C_{33}^{(1)} - C_{33}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial Y_{2H}}{\partial z} + \frac{\partial Y_{3H}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{C_{55}^{(1)} - C_{55}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial Y_{1H}}{\partial z} - j_n Y_{2H} \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n Y_{3H} = 0,$$

$$Y_{1H}(z+0) - Y_{1H}(z-0) = 0, \quad Y_{2H}(z+0) - Y_{2H}(z-0) = 0, \quad Y_{3H} = 0;$$

$$z = h \quad \frac{C_{13}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} j_n Y_{1H} + \frac{C_{33}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial Y_{2H}}{\partial z} + \frac{\partial Y_{3H}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial Y_{1H}}{\partial z} - j_n Y_{2H} \right) - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n Y_{3H} = 0, \quad \frac{e_{31}}{e_{33}} j_n Y_{1H} + \frac{\partial Y_{2H}}{\partial z} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial Y_{3H}}{\partial z} = 0;$$

получаем новую краевую задачу относительно функций U_H, W_H, χ_H с однородными граничными условиями по координате z . Правые части дифференциальных уравнений (3.15) и начальные условия $u_{0H}, \dot{u}_{0H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}$ (3.19) заменяются на

$$F_{1H} \div F_{3H}, U_{0H}, \dot{U}_{0H}, W_{0H}, \dot{W}_{0H} :$$

$$F_{1H} = R_{1H} + \left[j_n^2 Y_{1H} - \frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 Y_{1H}}{dz^2} + \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dY_{2H}}{dz} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dY_{3H}}{dz} + \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 Y_{1H}}{\partial t^2} \right],$$

$$F_{2H} = R_{2H} + \left[\frac{C_{55}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} j_n^2 Y_{2H} - \frac{C_{33}^{(s)}}{C_{11}^{(s)}} \frac{d^2 Y_{2H}}{dz^2} - \frac{(C_{13}^{(s)} + C_{55}^{(s)})}{C_{11}^{(s)}} j_n \frac{dY_{1H}}{dz} + \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 Y_{3H} - \frac{d^2 Y_{3H}}{dz^2} + \Phi^{(s)} \frac{\partial^2 Y_{2H}}{\partial t^2} \right],$$

$$F_{3H} = R_{3H} - \left[\frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{dY_{1H}}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 Y_{2H} + \frac{d^2 Y_{2H}}{dz^2} + \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 Y_{3H} - \frac{C_{11}^{(1)} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 Y_{3H}}{dz^2} \right],$$

$$U_{0H} = u_{0H}(j_n, z) - Y_{1H|t=0}, \quad \dot{U}_{0H} = \dot{u}_{0H}(j_n, z) - \dot{Y}_{1H|t=0},$$

$$W_{0H} = w_{0H}(j_n, z) - Y_{2H|t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H}(j_n, z) - \dot{Y}_{2H|t=0}.$$

Начально–краевую задачу (3.15) – (3.19) относительно функций U_H, W_H, χ_H решаем, используя обобщенный метод КИП с использованием неизвестной трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$ и компонент вектор–функции ядра преобразования $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$.

Общие решения краевых задач (3.15) – (3.19) для электроупругого ($s=1$) и упругого ($s=2$) слоев представлены в первой главе.

Окончательные выражения функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)$ получим, применяя формулы обращения КИП и (3.14). В результате, с учетом (3.10), (3.20), имеем:

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{S(j_n)^2} \left[Y_{1H}(z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{1in} \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (3.22)$$

$$W(r, z, t) = W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{S(j_n)^2} \left[Y_{2H}(z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in} \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{S(j_n)^2} \left[Y_{3H}(z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{3in} \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Заключительным этапом исследования является определение неизвестной функции $W_1(t)$ при жестком закреплении пластины, которая определяется из условия отсутствия вертикальных перемещений ее цилиндрической поверхности при $z=0$. Принимая в выражение для $W(1,0,t)$ (3.22) $R_{2H} = 0$, в результате имеем:

$$W_1(t) = 2 \left[\frac{C_{11}^{(1)}}{C_{33}^{(2)}} h_2 B_{1H} - \sum_{n=1}^{\infty} J_0(j_n)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} G_{in} K_{2in}(0) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \quad (3.23)$$

3.1.3. Численные результаты. Выводы

В качестве примера рассматривается биморфная пластина ($h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $b = 3 \times 10^{-2}$ м), состоящая из металлической подложки из латуни, а также аксиально поляризованной пьезокерамической пластины составов ЦТС–19 [3] и ЦТС–36 [39] ($\rho = 7910$ кг/м³, $\{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \{-2.1, 12.4, 11.3\}$ Кл/м², $\{C_{11}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{55}\} = \{15.3, 12.7, 8.7, 8.7, 2.6\} \times 10^{10}$ Н/м², $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{5.06, 2.69\} \times 10^{-9}$ Ф/м.).

Рассмотрим случай действия гармонической нагрузки:

$$q(r, t) = q(r) \sin \beta t,$$

где $\beta = \beta^* b \sqrt{\rho^{(2)} / C_{11}^{(2)}}$; β, β^* – относительная (безразмерная) и круговая (размерная) частота вынужденных колебаний.

А) Жесткое защемление биморфной пластины

При данном закреплении конструкции на нижней ($z=h$) поверхности пьезокерамической пластины появляются электрических зарядов разных знаков. Поэтому в случае заземления металлической подложки для регистрации разности

потенциалов $V(t)$ необходимо использовать два разрезных круговых электрода (радиус R раздела электродов определяет нулевое значение функции $J_0(j_1 r)$, $R=0.63$) с подключением их к измерительному прибору:

$$V(t) = 2 \left[\int_0^R \phi(r, h, t) r dr - \int_R^1 \phi(r, h, t) r dr \right].$$

На рисунке 3.2 приведены графики изменения $V(t)$ во времени t при действии на части (рис.3.2,а, $q(r) = q_0 H(r - 0.5)$) и всей (рис.3.2,б, $q(r) = q_0$) лицевой поверхности пластины ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м) равномерно-распределенной нагрузки.

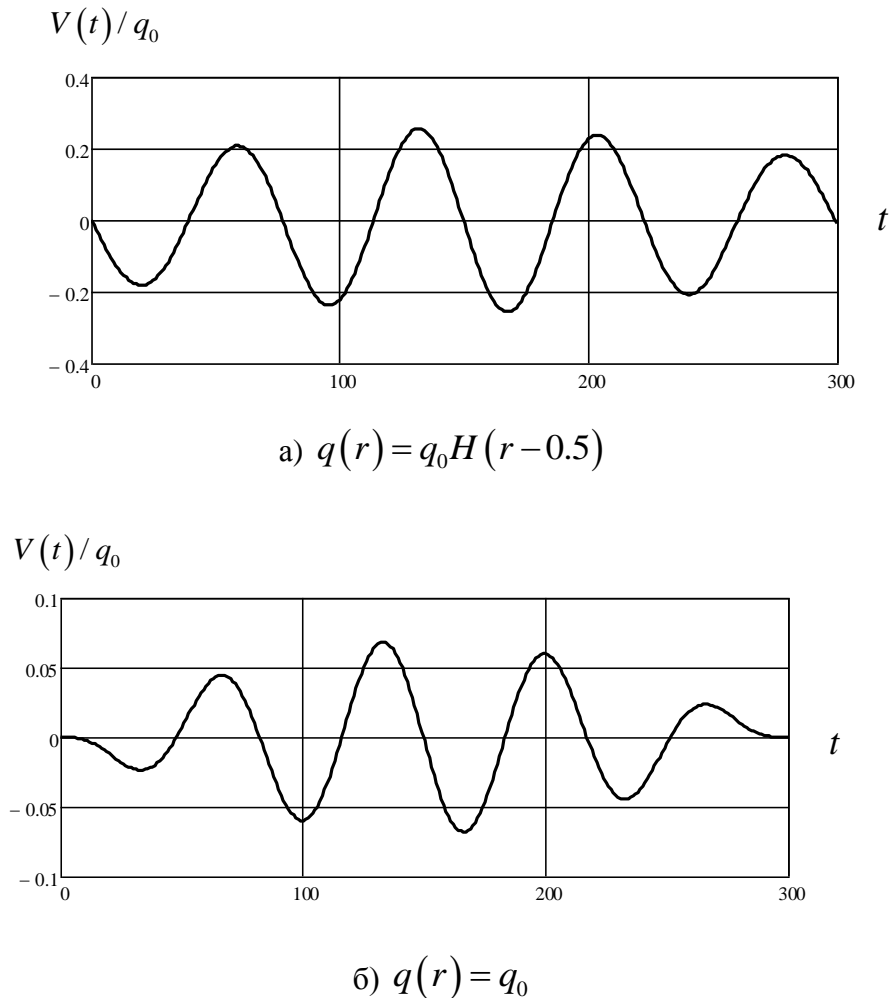
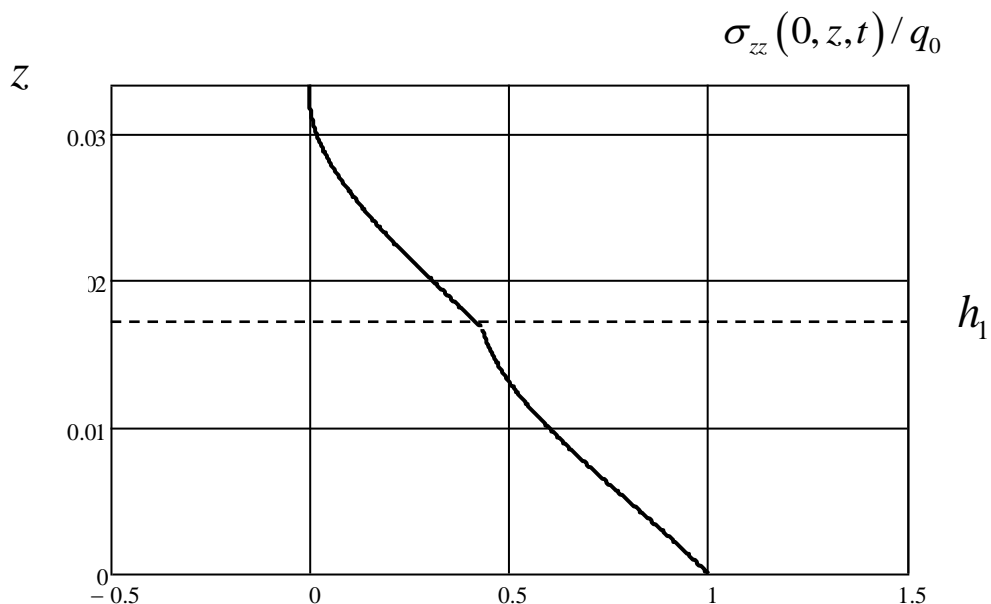


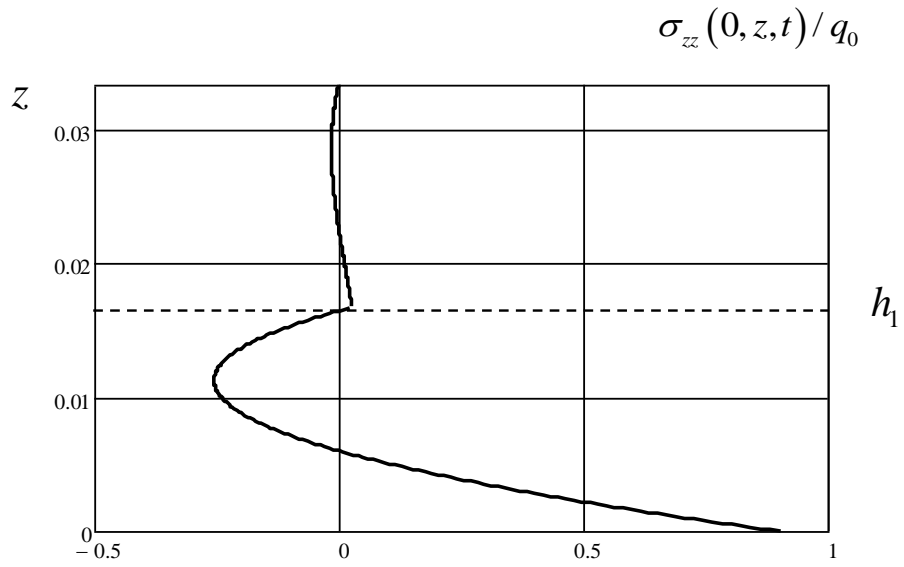
Рис.3.2. Графики изменения $V(t)$ во времени t при различных способах загрузки пластины (пьезокерамика ЦТС-19, $\beta = 0.8\lambda_{11}$)

Результаты расчета показывают, что при действии равномерно-распределенной нагрузки по всей поверхности (рис.3.2,б) разность потенциалов $V(t)$ существенно меньше варианта действия нагрузки на ее части (рис.3.2,а). Данный факт объясняется большей степенью сжатия пьезокерамической пластины при $q(r) = q_0 H(r - 0.5)$, что характеризуется величиной амплитудных значений нормальных напряжений σ_{zz} , графики которых приведены на рисунках 3.3,а,б.

На рисунке 3.4 приведены зависимости изменения амплитудных значений разности потенциалов $V(t)$ для пьезокерамической пластины различной толщины составов ЦТС-19 (рис.3.4, сплошная линия) и ЦТС-36 (рис.3.4, пунктирная линия). Данные графики для конструкции с заданной толщиной подложки позволяют определить оптимальную высоту пьезокерамической пластины, наиболее эффективно преобразующую внешнее механическое воздействие в электрический сигнал.

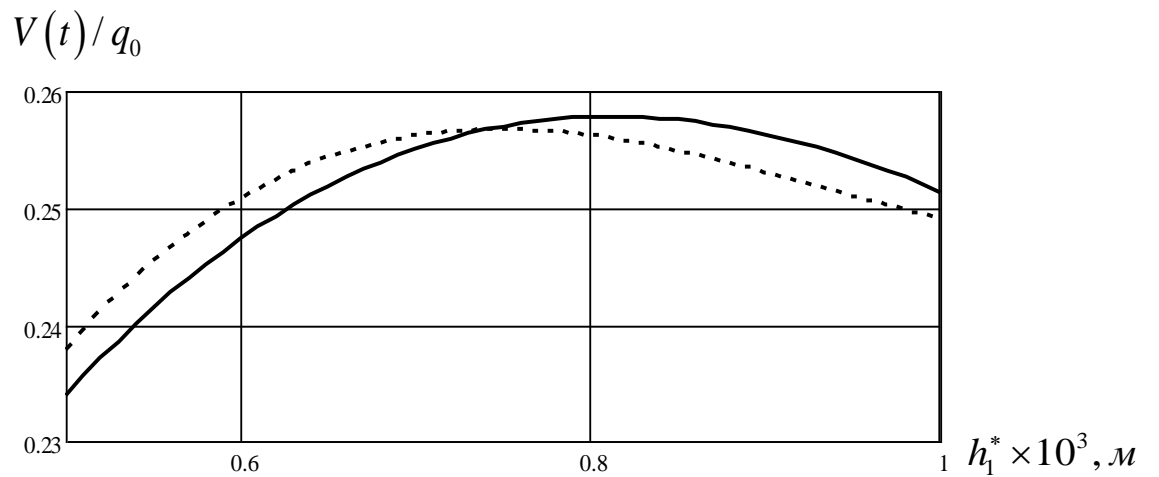


а) $q(r) = q_0 H(r - 0.5)$



б) $q(r) = q_0$

Рис.3.3. Графики изменения нормальных напряжений σ_{zz} по высоте пластины при различных способах ее загрузки (пьезокерамика ЦТС-19, $\beta = 0.8\lambda_{11}$)



а) $q(r) = q_0 H(r - 0.5)$

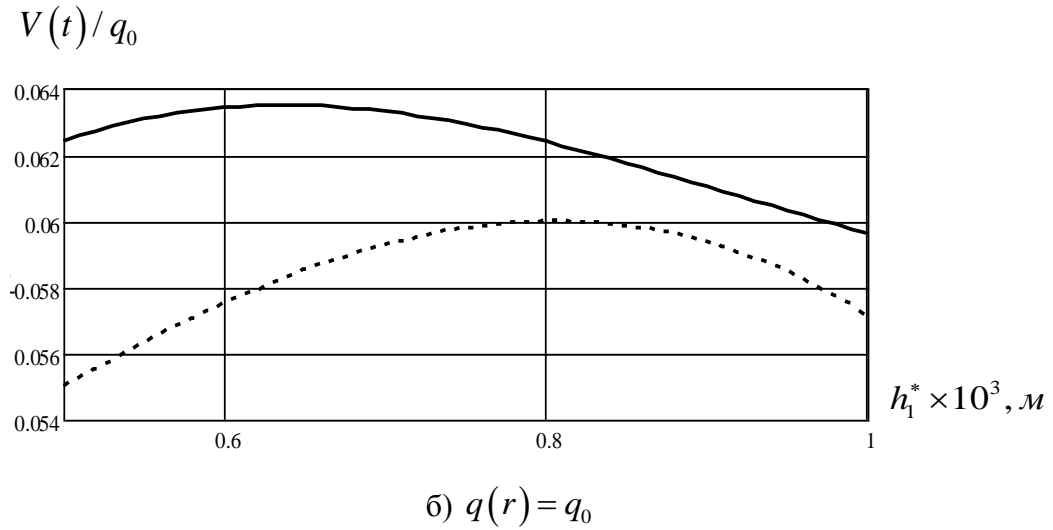


Рис.3.4. Зависимость амплитудных значений $V(t)$ от толщины пьезокерамической пластины h_1^* (м) при толщине подложки $h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) ($\beta = 0.8\lambda_{11}$, сплошная линия – пьезокерамика состава ЦТС–19, пунктирная линия – ЦТС–36)

Анализ представленных результатов расчета позволяет сделать вывод, что для металлической подложки толщиной $h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) и при действии нагрузки на части поверхности конструкции $q(r) = q_0 H(r - 0.5)$ необходимо использовать пьезокерамические пластины составов ЦТС–19, ЦТС–36 соответственно толщиной $h_1^* = 0.8 \times 10^{-3}$ (м) и $h_1^* = 0.7 \times 10^{-3}$ (м). В случае $q(r) = q_0$ – для пластины ЦТС–19 – $h_1^* = 0.63 \times 10^{-3}$ (м), а для ЦТС–36 – $h_1^* = 0.8 \times 10^{-3}$ (м).

Изменение амплитудных значений касательных напряжений $\sigma_{rz}(0.5, r, t)$ по высоте, а также нормальных напряжений $\sigma_{rr}(z, r, t)$ биморфной пластины (пьезокерамика ЦТС–19) при различных способах ее загрузки ($\beta = 0.8\lambda_{11}$) представлены на рисунках 3.5, 3.6. Численные значения данных компонент тензора напряжений при загрузке части поверхности пластины (рис.3.5,3.6, а) также выше соответствующих значений при действии равномерно–распределенной нагрузки на всей лицевой плоскости (рис.3.5,3.6, б) вследствие большей степени деформирования.

Кроме того, результаты расчета подтверждают известный факт, что численные значения радиальной компоненты нормальных напряжений σ_{rr} существенно выше остальных составляющих напряженного состояния электроупругой системы.

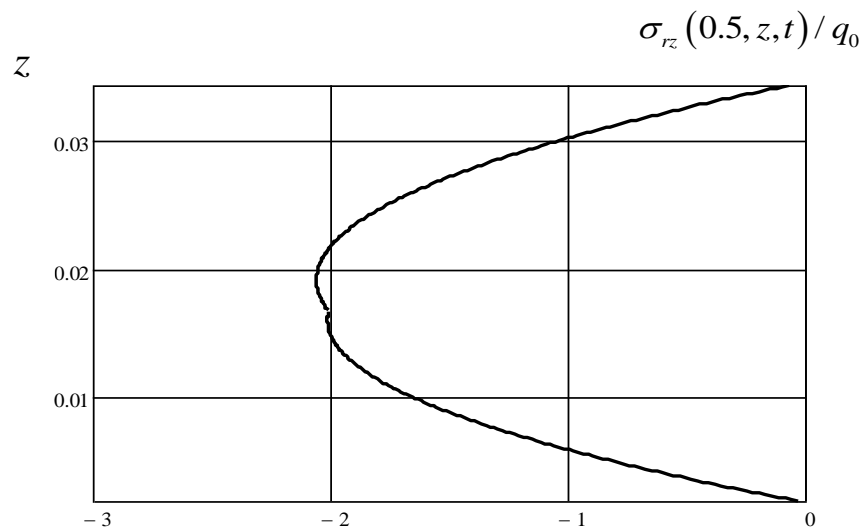
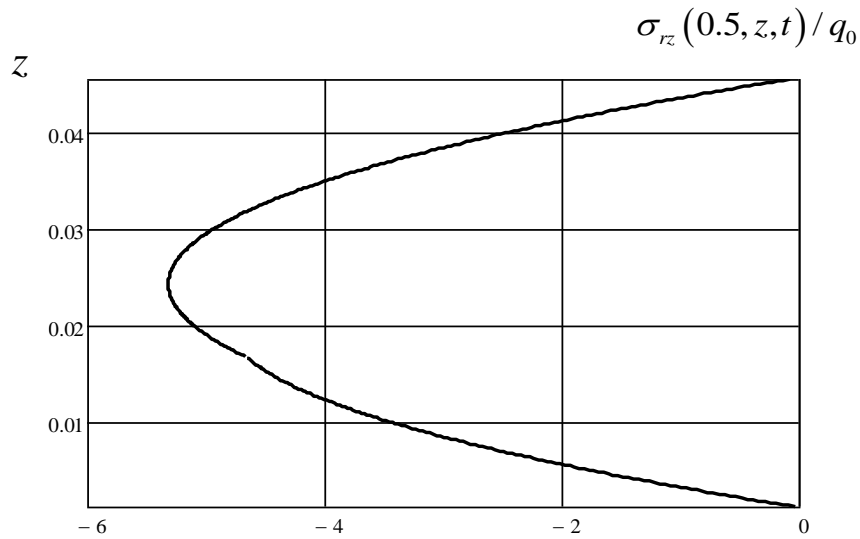


Рис.3.5. Графики изменения σ_{rz} по высоте пластины при различных способах ее загрузки ($\beta = 0.8\lambda_{11}$, пьезокерамика состава ЦТС-19)

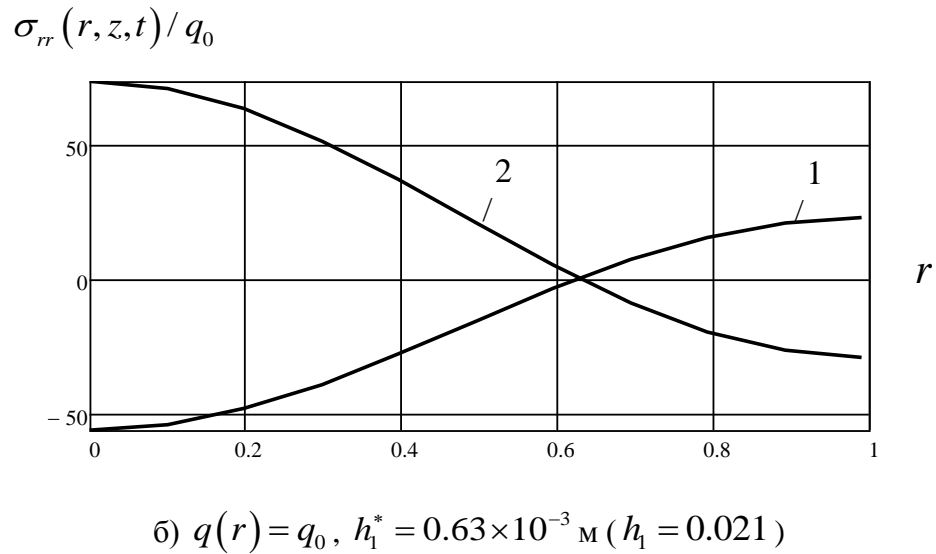
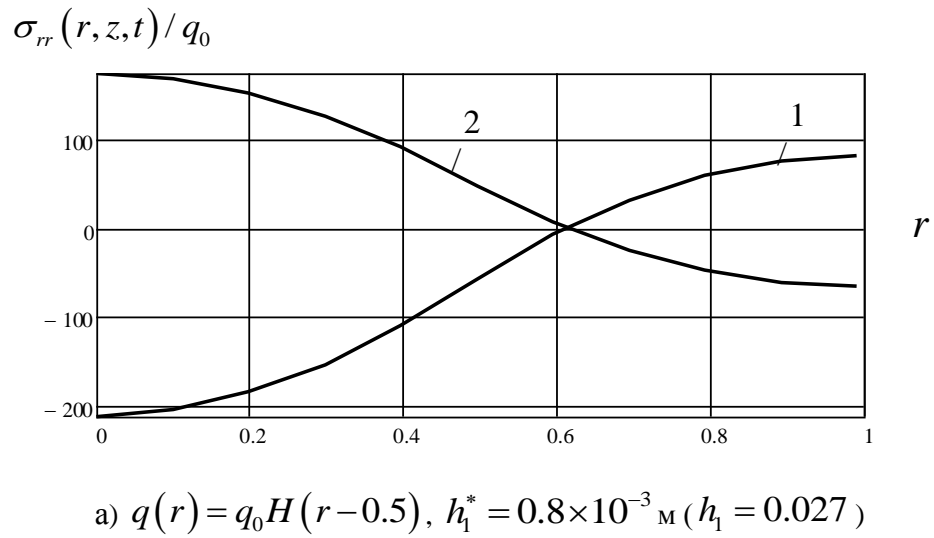


Рис.3.6. Графики изменения σ_{rr} по радиальной координате при различных способах загрузки пластины ($\beta = 0.8\lambda_{11}$, пьезокерамика состава ЦТС-19): 1 - $z = 0$, 2 - $z = h$

На рисунке 3.7 представлены графики изменения амплитудных значений радиальной компоненты вектора перемещений $U(0.5, z, t)$ по высоте сечения конструкции ($q(r) = q_0 H(r - 0.5)$, $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м). Сплошной линией обозначены ре-

зультаты справедливы для высокочастотного внешнего воздействия $\beta = 0.8\lambda_{11}$, а пунктирной когда $\beta = 0.2\lambda_{11}$.

Анализ графиков позволяет сделать вывод, что в двухслойной конструкции, выполненной из различных материалов (модули упругости латуни и пьезокерамики различаются в 1.5 раза) выполняется гипотеза плоских сечений, используемая в прикладных теориях для тонких пластин.

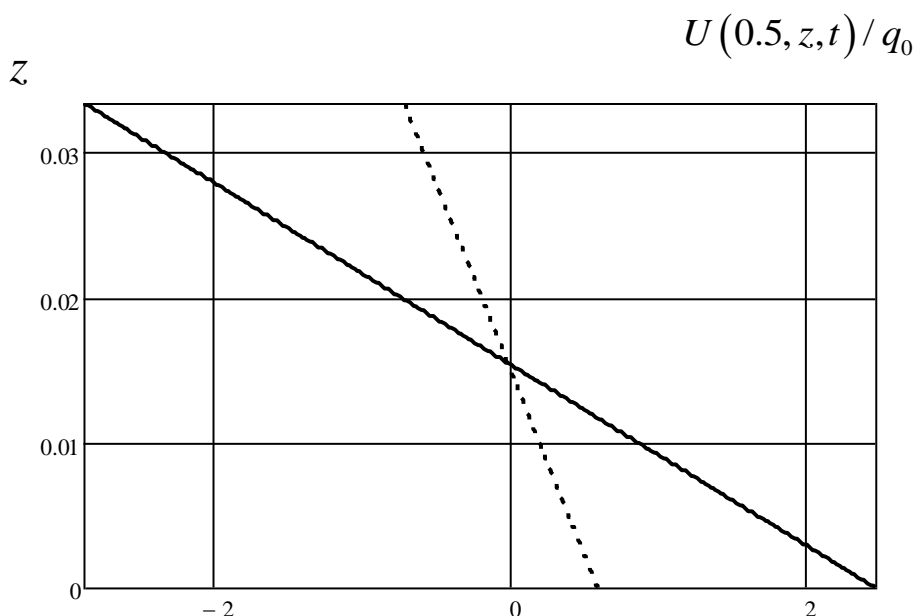
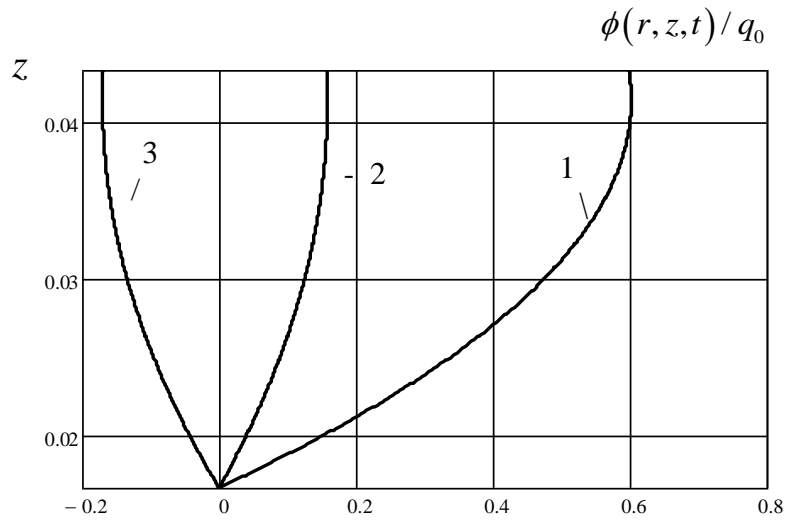


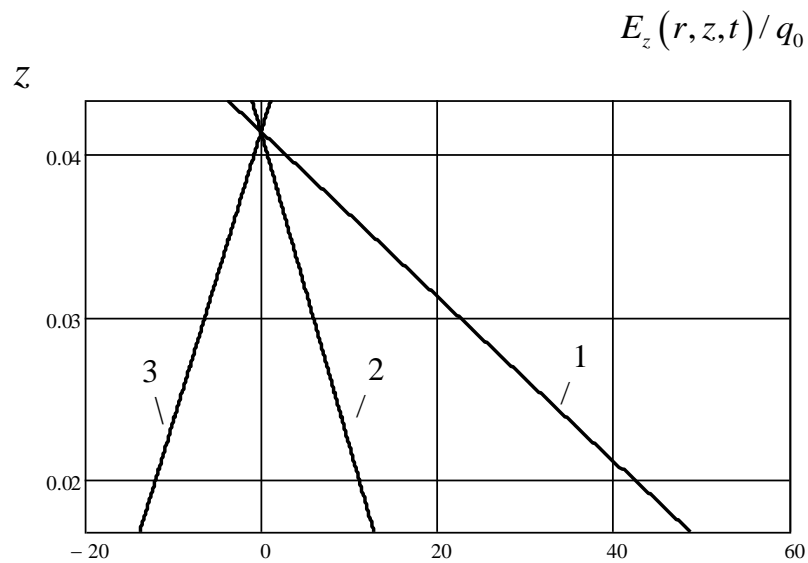
Рис.3.7. Графики изменения амплитудных значений $U(0.5, z, t)$ по аксиальной координате при различной частоте внешнего воздействия (пьезокерамика состава ЦТС-19): сплошная линия - $\beta = 0.8\lambda_{11}$, пунктирная $\beta = 0.2\lambda_{11}$

Амплитудное значение потенциала электрического поля $\phi(r, z, t)$ по высоте пьезокерамической пластины ($q(r) = q_0 H(r - 0.5)$, $h_1^* = 0.8 \times 10^{-3}$ м) изменяется по параболической зависимости (рис.3.8, а), а соответственно аксиальная компонента вектора напряженности $E_z(r, z, t)$ имеет линейную зависимость (рис.3.8, б). Аналогичная картина наблюдается при анализе биморфных пластин в задачах обратного пьезоэффекта. Кроме того, функция $E_z(r, z, t)$ на лицевой поверхности пье-

зокерамической пластины ($z = h$) при выполнении условия $D_{z|z=h} = 0$ практически равна нулю при различных значениях радиальной координаты.



а) $\phi(r, z, t) - z$



б) $E_z(r, z, t) - z$

Рис.3.8. Изменение амплитудных значений компонент электрического поля по высоте пьезокерамической пластины при шарнирном закреплении (пьезокерпмика состава ЦТС-19, $1-r=0, 2-r=0.5, 3-r=0.8$)

Б) Шарнирное закрепление биморфной пластины

В случае шарнирного закрепления пластины целесообразно использовать сплошное электродное покрытие на пьезокерамической пластине. Тогда разность потенциалов $V(t)$ между ее лицевыми поверхностями (в данном случае одна плоскость заземлена) определяется равенством:
$$V(t) = 2 \int_0^1 \phi(r, h, t) r dr .$$

На рисунке 3.9 представлен график изменения $V(t)$ во времени t при действии равномерно–распределенной нагрузки ($q(r) = q_0$) на лицевой поверхности пластины ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, ЦТС–19). Результаты расчета показывают, что амплитудные значения электрического импульса $V(t)$ при шарнирном закреплении пластины существенно больше, чем в случае жесткого защемления ее контура (рис.3.2). Причем при шарнирном закреплении нормальные механические напряжения σ_{rr} в центре электроупругой системы (рис.3.10, $1-z=0$, $2-z=h$) значительно больше соответствующих значений в случае жесткого защемления ее контура (рис.3.3, б). Данная особенность накладывает определенные ограничения на величину интенсивности нагрузки q_0 при шарнирном закреплении конструкции.

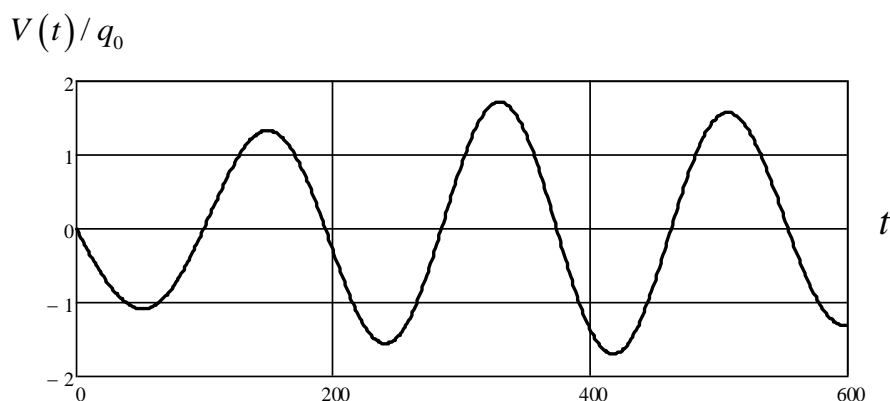


Рис.3.9. График изменения $V(t)$ во времени t ($\beta = 0.8\lambda_{11}$)

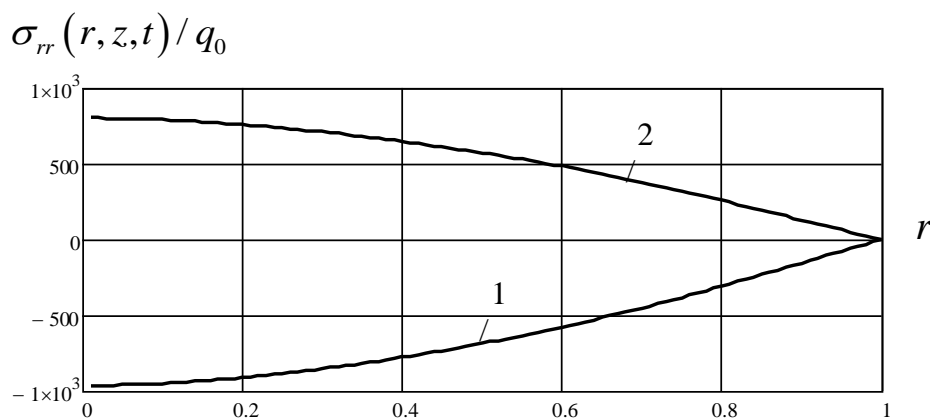


Рис.3.10. Изменение амплитудных значений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по радиальной координате ($1-z=0$, $2-z=h$)

На рисунке 3.11 показаны графики изменения амплитудных значений разности потенциалов $V(t)$ для различной толщины и составов (ЦТС–19, ЦТС–36) пьезокерамической пластины. Данные зависимости для конструкции с заданной толщиной подложки позволяют определить оптимальную высоту пьезокерамической пластины, наиболее эффективно преобразующую внешнее механическое воздействие в электрический сигнал.

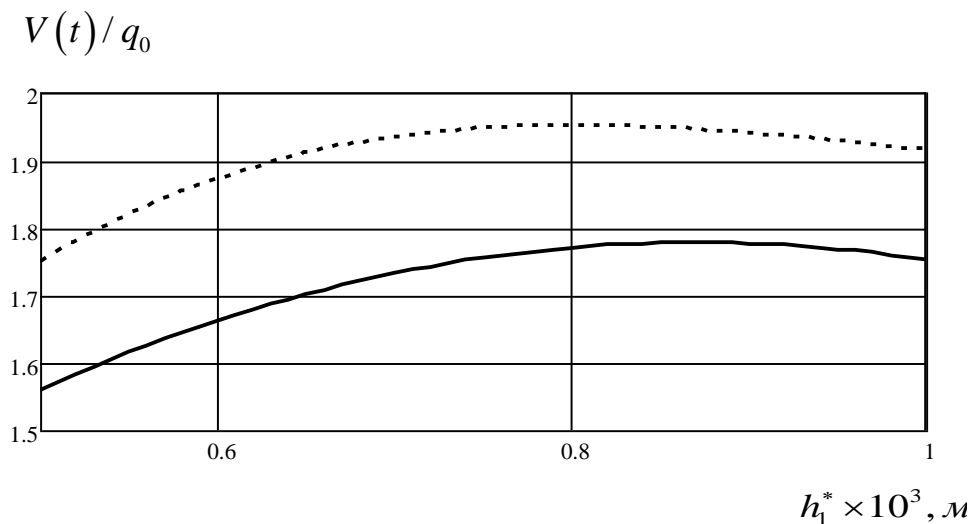
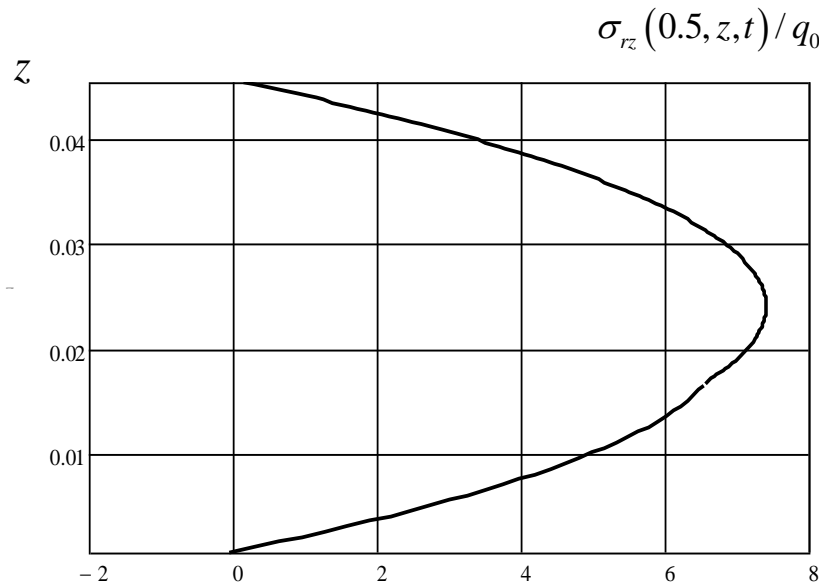


Рис.3.11. Зависимость амплитудных значений $V(t)$ от толщины пьезокерамической пластины h_1^* (м) при толщине подложки $h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) ($\beta = 0.8\lambda_{11}$)

В настоящем примере для металлической подложки толщиной $h_2^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) и при действии нагрузки на всей поверхности конструкции необходимо использовать пьезокерамические пластины составов ЦТС–19, ЦТС–36 высотой (h_1^*) соответственно 0.85×10^{-3} (м), 0.8×10^{-3} (м).

Графики изменения касательных напряжений σ_{rz} и нормальных σ_{zz} напряжений по высоте пластины представлены на рисунке 3.12. Их анализ позволяет сделать вывод, что амплитудные значения σ_{rz} в несколько раз больше σ_{zz} . Поэтому при расчете тонких пластин с помощью прикладных теорий необходимо учитывать деформации поперечного сдвига, т.е. использовать кинематические гипотезы Тимошенко.



а) $\sigma_{rz} - z$

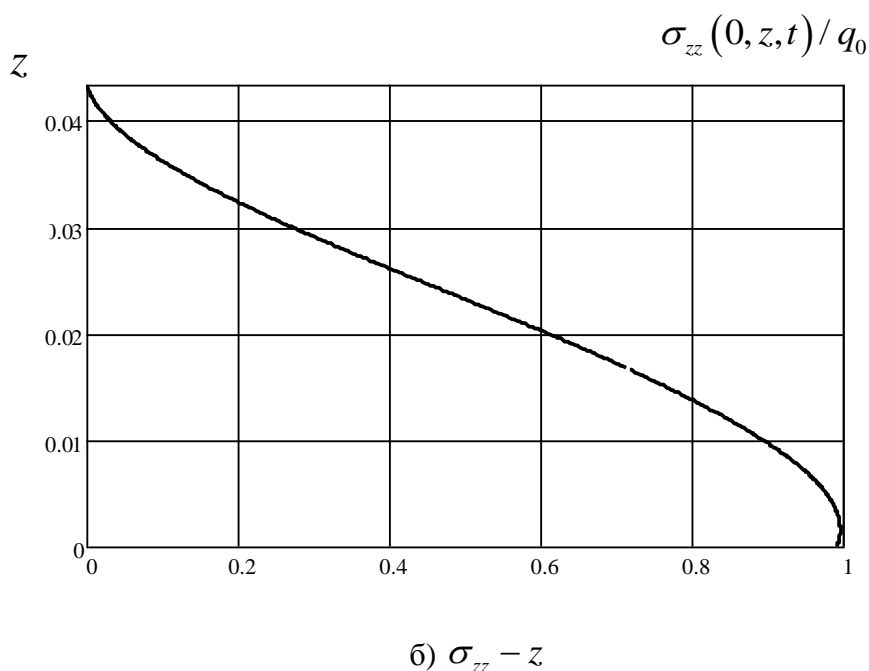


Рис.3.12. Графики изменения касательных σ_{rz} и нормальных σ_{zz} напряжений по высоте пластины ($\beta = 0.8\lambda_{11}, h_1^* = 0.8 \times 10^{-3}$ м, ($h_1 = 0.027$), пьезокерамика ЦТС-19)

Изменение амплитудные значения потенциала $\phi(r, z, t)$ и напряженности $E_z(r, z, t)$ электрического поля по высоте пьезокерамической пластины ($h_1^* = 0.8 \times 10^{-3}$ м) представлены на рисунке 3.13. Характер изменения рассматриваемых функций при шарнирном (рис. 3.13) и жестком (рис. 3.8) закреплениях практически одинаков. Вместе с тем, численные значения составляющих электрического поля при шарнирном закреплении существенно выше.

Полученные численные результаты расчета позволяют проанализировать распределение электроупругих полей напряжений в рассматриваемой биморфной пластине и подобрать ее геометрические размеры.

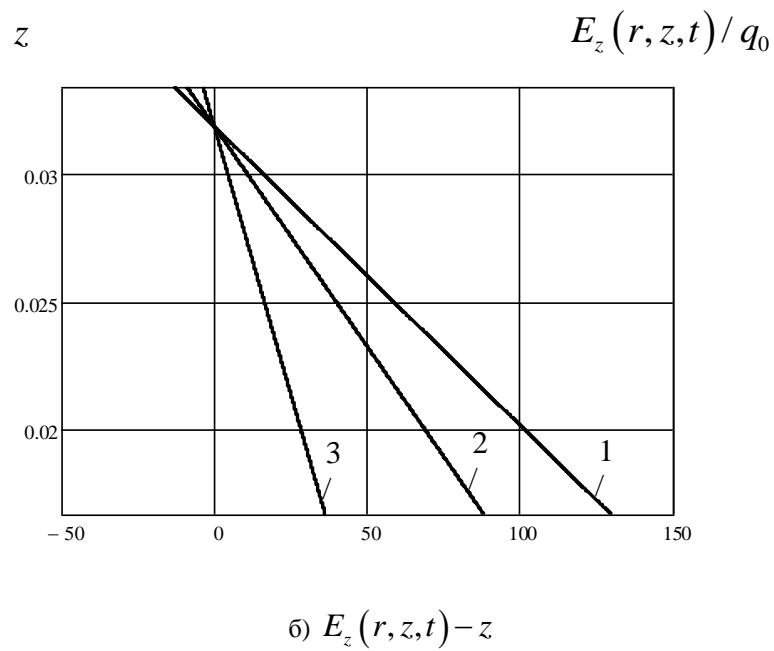
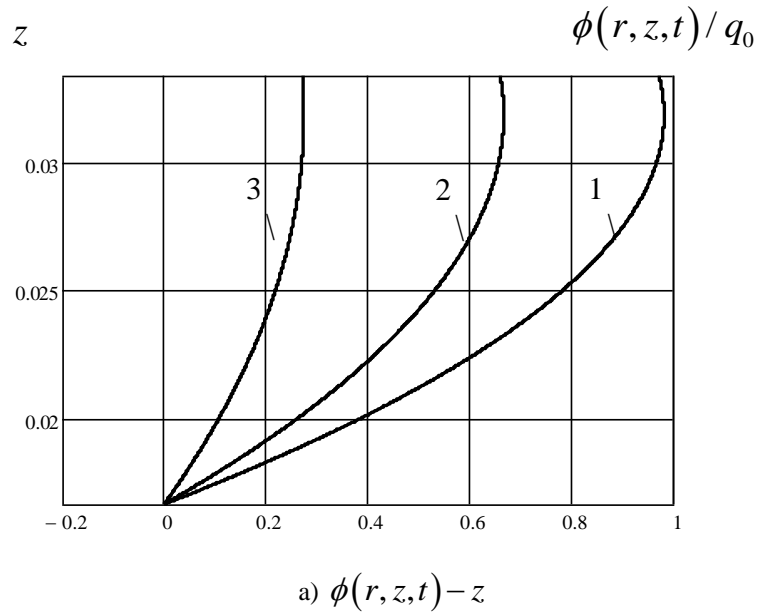


Рис.3.13. Изменение амплитудных значений компонент электрического поля по высоте пьезокерамической пластины (1- $r=0$, 2- $r=0.5$, 3- $r=0.8$, пьезокерамика ЦТС-19)

Глава 4

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АСИММЕТРИЧНОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

При проектировании жестко закрепленного пьезокерамического преобразователя прямого пьезоэффекта используется также конструктивное решение, когда диаметр электроупругой пластины меньше соответствующего размера металлической подложки. Это приводит, по сравнению с работой сплошной двухслойной системой, к понижению жесткости биморфной пластины и увеличению амплитудных значений индуцируемого электрического импульса. Данный подход был использован при проектировании на предприятие ООО «Интеб» датчика давления DP–612.5, в котором основным рабочим элементом является тонкая многослойная пластина.

Для оценки эффективности работы и исследования напряженно–деформированного состояния составных электроупругих систем ступенчатой переменной толщины обычно применяется техническая теория для тонких пластин, дополненная гипотезами о характере изменения электрического поля по высоте пьезокерамического элемента.

В данной работе для исследования асимметричной биморфной пластины ступенчато переменной толщины и жесткости используется уточненная двухмодовая теория Тимошенко для тонкостенных элементов. При этом новизна математической модели расчета заключается в выборе приведенной поверхности, относительно которой формируются исходные дифференциальные уравнения, описывающие связанные мембранные и изгибные колебания. В результате в процессе решения удается учесть все инерционных характеристик в двухслойной части конструкции.

4.1.1. Постановка задачи

Пусть круглая жестко закрепленная биморфная пластина состоит из металлической заземленной подложки радиусом $r_* = b$ и толщиной h_2 , а также пьезо-керамического аксиально поляризованного элемента с гексагональной кристаллической решеткой класса 6mm ($r_* = a$, $a < b$, h_1). Осесимметричные колебания возбуждаются за счет действия на верхней лицевой поверхности конструкции механической динамической нагрузки $q^*(r_*, t_*)$, являющейся произвольной функцией радиальной координаты r_* и времени t_* (рис.4.1). Разность потенциалов $V^*(t_*)$ фиксируется при подключении электродированных поверхностей пьезо-керамических пластин к измерительному прибору.

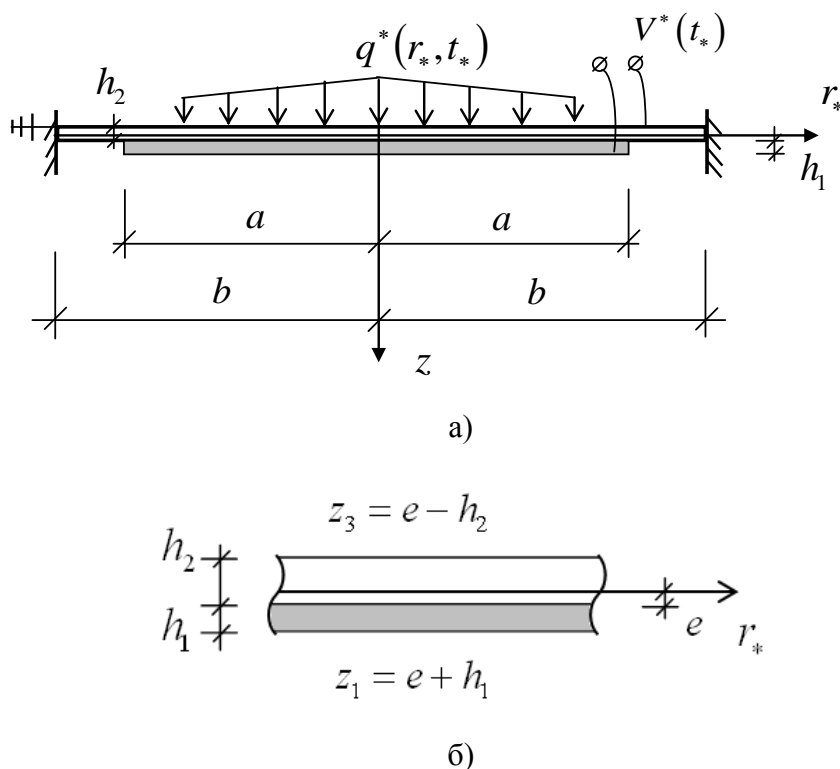


Рис.4.1. Расчетная схема биморфной конструкции

В цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) расположение приведенной поверхности $z = 0$ определяется из условия учета всех инерционных характери-

стик в двухслойной части конструкции при построении замкнутого решения. Координаты нижней плоскости пьезокерамической пластины, а также нижней и верхней поверхностей подложки, соответственно обозначены: $z_1 = h_1 + e$,

$$z_2 = e, \quad z_3 = e - h_2, \quad e = \frac{\rho^{(2)}h_2^2 - \rho^{(1)}h_1^2}{2(\rho^{(2)}h_2 + \rho^{(1)}h_1)} \quad (\rho^{(1)}, \rho^{(2)} - \text{объемная плотность пьезокерамики и металла}).$$

Дифференциальные уравнения радиальных и изгибных осесимметричных колебаний биморфной пластины относительно нормальных $N_r(r_*, t_*)$, $N_\theta(r_*, t_*)$, поперечных $Q_r(r_*, t_*)$ сил, а также изгибающих моментов $M_r(r_*, t_*)$, $M_\theta(r_*, t_*)$, при использовании следующих кинематических гипотез

$$U^*(r_*, z, t_*) = U_0^*(r_*, t_*) - z\psi(r_*, t_*), \quad W^*(r_*, z, t_*) = W^*(r_*, t_*), \quad (4.1)$$

имеют вид* :

$$\frac{\partial N_r}{\partial r_*} + \frac{N_r - N_\theta}{r_*} - a_1 \frac{\partial^2 U_0^*}{\partial t_*^2} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r_*} + \frac{Q_r}{r_*} - a_1 \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} = q^*(r_*, t_*),$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r_*} - Q_r + \frac{M_r - M_\theta}{r_*} + a_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_*^2} = 0,$$

где $N_r(r_*, t_*) = \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{rr} dz$, $N_\theta(r_*, t_*) = \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{\theta\theta} dz$, $Q_r(r_*, t_*) = \int_{z_1}^{z_3} k_j \sigma_{rz} dz$,

$$M_r(r_*, t_*) = \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{rr} z dz, \quad M_\theta(r_*, t_*) = \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{\theta\theta} z dz,$$

* В однослойной части конструкции в первом уравнении (4.2) не учитываются силы инерции вращения вследствие поворота сечения, а в третьем – отброшены тангенциальные силы инерции.

$$a_1 = \rho^{(2)} h_2 H(a - r_*) + (\rho^{(1)} h_1 + \rho^{(2)} h_2) H(r_* - a),$$

$$a_2 = \rho^{(2)} \frac{z_2^3 - z_3^3}{3} H(a - r_*) + \left(\rho^{(1)} \frac{z_1^3 - z_2^3}{3} + \rho^{(2)} \frac{z_2^3 - z_3^3}{3} \right) H(r_* - a),$$

U^*, W^*, ψ – радиальные, аксиальные перемещения и угол поворота сечения в плоскости (r, z) ; U_0^* – радиальные перемещения относительно приведенной поверхности при $z = 0$; k_j – коэффициенты поперечного сдвига, $H(\dots)$ – единичная функция Хэвисайда [14].

Использование измерительного прибора с большим входным сопротивлением требует выполнения условия об отсутствии тока смещения на внешнем лицевом электроде $D_{z|z=h_1+e} = 0$ [15], что позволяет определить аксиальную составляющую вектора напряженности электрического поля $E_z(r_*, z, t_*)$:

$$E_z(r_*, z, t_*) = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right). \quad (4.3)$$

Погонные интегральные характеристики напряженного состояния составной двухслойной конструкции, с учетом гипотез (4.1), (4.3) определяются в виде следующим соотношений:

$$N_{r(\theta)} = \left(m_{1(2)} \frac{\partial U_0^*}{\partial r_*} + m_{2(1)} \frac{U_0^*}{r_*} - m_{3(4)} \frac{\partial \psi}{\partial r_*} - m_{4(3)} \frac{\psi}{r_*} \right) H(r_* - a) + \quad (4.4)$$

$$+ \left(m_{5(6)} \frac{\partial U_0^*}{\partial r_*} + m_{6(5)} \frac{U_0^*}{r_*} - m_{7(8)} \frac{\partial \psi}{\partial r_*} - m_{8(7)} \frac{\psi}{r_*} \right) H(a - r_*),$$

$$Q_r = m_9 \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} - \psi \right) H(r_* - a) + m_{10} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} - \psi \right) H(a - r_*),$$

$$M_{r(\theta)} = \left(m_{3(4)} \frac{\partial U_0^*}{\partial r_*} + m_{4(3)} \frac{U_0^*}{r_*} - m_{11(12)} \frac{\partial \psi}{\partial r_*} - m_{12(11)} \frac{\psi}{r_*} \right) H(r_* - a) + \\ + \left(m_{7(8)} \frac{\partial U_0^*}{\partial r_*} + m_{8(7)} \frac{U_0^*}{r_*} - m_{13(14)} \frac{\partial \psi}{\partial r_*} - m_{14(13)} \frac{\psi}{r_*} \right) H(a - r_*),$$

где $m_{1(2)} = C_{11(12)}^{(2)} h_2$, $m_{3(4)} = C_{11(12)}^{(2)} m_{17}$, $m_{5(6)} = m_{1(2)} + \left(C_{11(12)}^{(1)} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}} \right) h_1$,

$$m_{7(8)} = m_{3(4)} + \left(C_{11(12)}^{(1)} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}} \right) m_{15}, \quad m_9 = k_2 C_{55}^{(2)} h_2, \quad m_{10} = k_1 \left(C_{55}^{(2)} h_2 + C_{55}^{(1)} h_1 \right),$$

$$m_{11(12)} = C_{11(12)}^{(2)} m_{18}, \quad m_{13(14)} = m_{11(12)} + \left(C_{11(12)}^{(1)} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}} \right) m_{16},$$

$$m_{15} = \frac{z_1^2 - z_2^2}{2}, \quad m_{16} = \frac{z_1^3 - z_2^3}{3}, \quad m_{17} = \frac{z_2^2 - z_3^2}{2}, \quad m_{18} = \frac{z_2^3 - z_3^3}{3},$$

e_{31}, ε_{33} – пьезомодуль и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала; $C_{mk}^{(s)}$ – модули упругости электроупругого (пьезокерамического) ($s=1$) и упругого ($s=2$) материалов ($m, k = 1, 2, 5$).

В результате подстановки (4.4) в (4.2) получаем следующую систему дифференциальных уравнений в безразмерной форме:

$$p_1 \frac{\partial}{\partial r} \nabla U_0 - p_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi - a_3 \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = 0, \quad (4.5)$$

$$p_3 \left(\nabla \frac{\partial W}{\partial r} - \nabla \psi \right) - a_3 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q,$$

$$p_4 \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi + p_3 \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi \right) - p_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla U_0 - a_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{где } \{W, U_0, r, R\} = \{W^*, U_0^*, r_*, a\} / b, \quad t = \frac{t_*}{b} \sqrt{\frac{C_{11}^{(2)}}{\rho^{(2)}}}, \quad q = \frac{q^* b}{m_1},$$

$$a_3 = \frac{a_1}{\rho^{(2)} h_2}, \quad a_4 = \frac{a_2}{\rho^{(2)} b^2 h_2}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = m_1^{-1} \begin{pmatrix} m_1 & m_5 \\ m_3 b^{-1} & m_7 b^{-1} \\ m_9 & m_{10} \\ m_{11} b^{-2} & m_{13} b^{-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H(r-R) \\ H(R-r) \end{pmatrix}.$$

Краевые условия в безразмерной форме имеют вид:

$$r=1,0 \quad U_0(1,t)=0, \quad W(1,t)=0, \quad \psi(1,t)=0, \quad (4.6)$$

$$U_0(0,t) < \infty, \quad W(0,t) < \infty, \quad \psi(0,t) < \infty,$$

$$t=0 \quad U_0(r,0)=u_0(r), \quad W(r,0)=W_0(r), \quad \psi(r,0)=\psi_0(r), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0(r), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0(r).$$

Здесь $W_0, u_0, \psi_0, \dot{W}_0, \dot{u}_0, \dot{\psi}_0$ – известные в начальный момент времени перемещение в безразмерной форме, угол поворота и их скорости.

Потенциал электрического поля $\phi(r_*, z, t_*)$, генерируемый в пьезокерамической пластине, вычисляется с помощью равенства (4.3) ($E_z = -\partial\phi/\partial z$). Тогда электрическое напряжение $V^*(t_*)$ при учете заземления металлической подложки определяется по формуле

$$V^*(t_*) = \frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}} \frac{h_1}{a} \left[2U_0^*(a, t_*) - (h_1 + 2e)\psi(a, t_*) \right]. \quad (4.8)$$

Расчетные соотношения (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) представляют математическую формулировку рассматриваемой задачи.

4.1.2. Построение общего решения

Начально – краевую задачу (4.5) – (4.7) решаем, используя структурный алгоритм метода КИП [42] при использовании неизвестных компонент $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$, $K_3(\lambda_i, r)$ вектор–функции ядра преобразования и весовых функций α, β, γ :

$$G(\lambda_i, t) = \int_0^1 [\alpha U_0(r, t) K_1(\lambda_i, r) + \beta W(r, t) K_2(\lambda_i, r) + \gamma \psi(r, t) K_3(\lambda_i, r)] r dr, \quad (4.9)$$

$$\{U_0(r, t), W(r, t), \psi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), K_3(\lambda_i, r)\} \|K_i\|^{-2}, \quad (4.10)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_0^1 [\alpha K_1^2(\lambda_i, r) + \beta K_2^2(\lambda_i, r) + \gamma K_3^2(\lambda_i, r)] r dr,$$

где λ_i – положительные параметры ($i = \overline{1, \infty}$).

Спектр частот собственных осесимметричных колебаний биморфной пластины определяется зависимостью

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{b} \sqrt{\frac{C_{11}^{(2)}}{\rho^{(2)}}}. \quad (4.11)$$

Принимая во внимание изменение физических характеристик материала по высоте пластины, и представляя функции $U_0(r, t)$, $W(r, t)$, $\psi(r, t)$ в виде

$$\{U_0, W, \psi\} = \{U_0^{(a)}, W^{(a)}, \psi^{(a)}\} H(r - R) + \{U_0^{(b)}, W^{(b)}, \psi^{(b)}\} H(R - r), \quad (4.12)$$

подвергаем систему уравнений (4.5) и начальные условия (4.7) преобразованиям КИП [42].

В результате получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_i, t)$, решение которой имеет вид

$$G(\lambda_i, t) = G_0 \cos(\lambda_i t) + \dot{G}_0 \sin(\lambda_i t) / \lambda_i - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau. \quad (4.13)$$

и, с учетом (4.6), однородную краевую задачу для компонент ядра КИП

$$p_1 \frac{d}{dr} \nabla K_1^{(j)} - p_2 \frac{d}{dr} \nabla K_3^{(j)} \psi + a_3 \lambda_i^2 K_1^{(j)} = 0, \quad (j = a, b) \quad (4.14)$$

$$p_3 \left(\nabla \frac{dK_2^{(j)}}{dr} - \nabla K_3^{(j)} \right) + a_3 \lambda_i^2 K_2^{(j)} = 0,$$

$$p_4 \frac{d}{dr} \nabla K_3^{(j)} + p_3 \left(\frac{dK_2^{(j)}}{dr} - K_3^{(j)} \right) - p_2 \frac{d}{dr} \nabla K_1^{(j)} + a_4 \lambda_i^2 K_3^{(j)} = 0,$$

$$r = 1, 0 \quad K_1^{(a)}(\lambda_i, 1) = K_2^{(a)}(\lambda_i, 1) = K_3^{(a)}(\lambda_i, 1) = 0, \quad (4.15)$$

$$\{K_1^{(b)}(\lambda_i, 0), K_2^{(b)}(\lambda_i, 0), K_3^{(b)}(\lambda_i, 0)\} < \infty,$$

$$r = R: \quad K_1^{(a)}(\lambda_i, R) = K_1^{(b)}(\lambda_i, R), \quad K_2^{(a)}(\lambda_i, R) = K_2^{(b)}(\lambda_i, R), \quad (4.16)$$

$$K_3^{(a)}(\lambda_i, R) = K_3^{(b)}(\lambda_i, R), \quad m_9 \left(\frac{dK_2^{(a)}}{dr} - K_3^{(a)} \right) \Big|_{r=R} = m_{10} \left(\frac{dK_2^{(b)}}{dr} - K_3^{(b)} \right) \Big|_{r=R},$$

$$\left(m_1 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_2 \frac{U_0}{r} - \frac{m_3}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_4}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R} =$$

$$= \left(m_5 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_6 \frac{U_0}{r} - \frac{m_7}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_8}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R},$$

$$\left(m_3 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_4 \frac{U_0}{r} - \frac{m_{11}}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_{12}}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R} =$$

$$= \left(m_7 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_8 \frac{U_0}{r} - \frac{m_{13}}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_{14}}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R}.$$

Здесь $\{K_1, K_2, K_3\} = \{K_1^{(a)}, K_2^{(a)}, K_3^{(a)}\} H(r-R) + \{K_1^{(b)}, K_2^{(b)}, K_3^{(b)}\} H(R-r)$,

$$F(\lambda_i, t) = \int_0^1 a_3^{-1} q(r, t) \beta K_2(\lambda_i, r) r dr,$$

$$G_0(\lambda_i) = \int_0^1 (\alpha u_0 K_1 + \beta W_0 K_2 + \gamma \psi_0 K_3) r dr,$$

$$\dot{G}_0(\lambda_i) = \int_0^1 (\alpha \dot{u}_0 K_1 + \beta \dot{W}_0 K_2 + \gamma \dot{\psi}_0 K_3) r dr.$$

Равенства (4.16) являются условиями неразрывности деформаций и усилий во всех точках пластины радиусом R , которые формируются при выполнении равенств:

$$U_0^{(a)}(R, t) = U_0^{(b)}(R, t), \quad W^{(a)}(R, t) = W^{(b)}(R, t), \quad \psi^{(a)}(R, t) = \psi^{(b)}(R, t),$$

$$N^{(a)}(R, t) = N^{(b)}(R, t), \quad Q^{(a)}(R, t) = Q^{(b)}(R, t), \quad M^{(a)}(R, t) = M^{(b)}(R, t).$$

Условие инвариантности исходной (4.5) и преобразованной (4.14) систем позволяют определить весовые функции

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = \frac{a_4}{a_3}.$$

Для решения краевой задачи (4.14) – (4.16) вводятся новые функции $R_1^{(j)}(\lambda_{in}, r)$, $R_2^{(j)}(\lambda_{in}, r)$, $R_3^{(j)}(\lambda_{in}, r)$ по формулам:

$$R_1^{(j)}(\lambda_{in}, r) = rK_1^{(j)}(\lambda_{in}, r), \quad R_2^{(j)}(\lambda_{in}, r) = r \frac{dK_2^{(j)}(\lambda_{in}, r)}{dr}, \quad (4.17)$$

$$R_3^{(j)}(\lambda_{in}, r) = rK_3^{(j)}(\lambda_{in}, r),$$

которые позволяют привести систему (4.14) к следующему разрешающему дифференциальному уравнению 6-го порядка относительно $R_3^{(j)}(\lambda_{in}, r)$:

$$\left(\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + f_1 \nabla^2 \nabla^2 + f_2 \nabla^2 + f_3 \right) R_3^{(j)} = 0, \quad (4.18)$$

где $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, $f_1 = \frac{n_2 + n_4}{n_1} + \frac{a_3 \lambda_i^2}{p_3}$, $f_3 = (n_1 p_3)^{-1} a_3 \lambda_i^2 n_3$,

$$f_2 = n_1^{-1} n_3 + (n_1 p_3)^{-1} (a_3 \lambda_i^2 n_2 + n_5 p_3), \quad n_2 = p_1 (a_4 \lambda_i^2 - p_3) - p_2^2 + a_3 \lambda_i^2 p_4,$$

$$n_1 = p_1 p_4, \quad n_3 = a_3 \lambda_i^2 (a_4 \lambda_i^2 - p_3), \quad n_4 = p_1 p_3, \quad n_5 = a_3 \lambda_i^2 p_3.$$

Использование порождающего уравнения

$$\nabla^2 R_3^{(j)} = -\beta_i^2 R_3^{(j)},$$

позволяет сформулировать следующее бикубическое характеристическое уравнение

$$\left(\beta_i^2\right)^3 - f_1\left(\beta_i^2\right)^2 + f_2\beta_i^2 - f_3 = 0. \quad (4.19)$$

Отношение физических характеристик материалов, используемых при изготовлении данной конструкции, позволяет получить следующие корни уравнения (4.19): β_{1i}, β_{2i} – действительные положительные числа, β_{3i} – мнимое число.

В этом случае общий интеграл дифференциального уравнения (3.40) записывается в виде:

$$R_3^{(j)}(\lambda_i, r) = r \left[\sum_{e=1}^2 D_{(2e-1)i}^{(j)} J_1(\beta_{ei}r) + D_{(2e)i}^{(j)} Y_1(\beta_{ei}r) \right] + D_{5i}^{(j)} I_1(\beta_{3i}r) + D_{6i}^{(j)} K_1(\beta_{3i}r). \quad (4.20)$$

Здесь и ниже $J_\mu(\dots), Y_\mu(\dots), I_\mu(\dots), K_\mu(\dots)$ – обыкновенные и модифицированные функции Бесселя I и II рода порядка μ ($\mu = 0,1$).

Принимая во внимание зависимости между $R_1^{(j)}, R_2^{(j)}, R_3^{(j)}$, полученные в процессе приведения (4.14) к (4.18),

$$R_2^{(j)} = \frac{p_3}{a_3 \lambda_i^2 n_4 - p_3 n_5} \left[n_1 \nabla^2 \nabla^2 + (n_2 + n_4) \nabla^2 + n_3 \right] R_3^{(j)},$$

$$R_1^{(j)} = p_2^{-1} \left[p_3 R_2^{(j)} + p_4 \nabla^2 R_3^{(j)} + (a_4 \lambda_i^2 - p_3) R_3^{(j)} \right],$$

получаем, с учетом (4.17), выражения для компонент ядра преобразования $K_1^{(j)}(\lambda_i, r), K_2^{(j)}(\lambda_i, r), K_3^{(j)}(\lambda_i, r)$.

Подстановка $K_1^{(j)}, K_2^{(j)}, K_3^{(j)}$ в граничные условия (4.15), (4.16) формирует однородную систему уравнений относительно постоянных $D_{1i}^{(a)} \dots D_{6i}^{(a)}, D_{1i}^{(b)} \dots D_{3i}^{(b)}$. Ее решение позволяет получить трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений λ_i , а также выражения для постоянных интегрирования.

Окончательные выражения функций $U_0(r, t), W(r, t), \psi(r, t)$ получим, применяя к трансформанте (4.13) формулы обращения КИП (4.10).

4.1.3. Численные результаты. Выводы.

В качестве примера рассматривается биморфная конструкция, которая является основным рабочим элементом датчика давления DP-612.5. Она состоит из металлической подложки из латуни ($h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $b = 3 \times 10^{-2}$ м,) и пьезокерамической пластины состава ЦТС-19.

Для расчета используются следующие физические характеристики материалов: латунь – $E = 9.8 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0.35$, $\rho = 8600$ кг/м³, E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность изотропного материала

$$\left(C_{11}^{(2)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12}^{(2)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{55}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \right); \quad \text{пьезокерамика –}$$

$$\varepsilon_{33} = 7.26 \times 10^{-9} \quad \text{Ф/м}, \quad \{C_{11}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} = \{10.9, 9.1, 6.1, 5.4, 2.4\} \times 10^{10} \quad \text{Н/м}^2, \quad e_{31} = -4.9$$

$$\text{Кл/м}^2.$$

В таблице 4.1 представлены собственные значения первого тона ($i=1$) осесимметричных колебаний биморфной пластины ($a = 1.86 \times 10^{-2}$ м) при различной толщине пьезокерамической пластины. Верхние значения справедливы для рассматриваемой конструкции ступенчато переменной толщины, а нижние для сплошной асимметричной электроупругой пластины, представленной в параграфе 4.1.

Очевидно, что конструкция ступенчато переменной толщины имеет меньшую жесткость по сравнению с электроупругой пластиной постоянной высоты при одинаковых значениях h_1, h_2 , что определяет более низкие величины собственных значений. Также необходимо отметить подтверждение известного факта [38,46], о совпадении численных результатов расчета при вычислении первого тона собственных колебаний, полученных с помощью прикладной модели Тимошенко и теории упругости (электроупругости) в трехмерной (пространственной) постановке.

Таблица 4.1

	Толщина пьезокерамической пластины h_1 , м		
	0.25×10^{-3}	0.5×10^{-3}	0.8×10^{-3}
Собственные значения $\frac{\lambda_1}{\lambda_{11}}$	$\frac{0.074}{0.081}$	$\frac{0.092}{0.108}$	$\frac{0.124}{0.141}$

Нестационарную осесимметричную нагрузку, действующую на биморфную пластину датчика DP–612.5, представим в виде следующей гармонической зависимости:

$$q(r, t) = q_0(1-r) \sin \chi t,$$

где q_0 – амплитудное значение интенсивности в безразмерной форме, χ – относительная частота вынужденных колебаний ($\chi = \chi^* b \sqrt{\rho^{(2)} / C_{11}^{(2)}}$, χ^* – круговая частота вынужденных колебаний).

На рисунке 4.2 – 4.6 представлены численные результаты расчета, на основании которых можно сделать выводы, позволяющие повысить эффективность работу биморфной пластины:

- 1) При высокочастотном внешнем воздействии $\chi = 0.8\lambda_1$ эффект «биения», наблюдаемый в конструкции при вычислении вертикальных перемещений $W(0, t)$, также распространяется на характер изменения $V^*(t)$ по времени (рис.4.2, сплошная линия – изменение $W(0, t)$, пунктирная линия – $V(t)$);
- 2) Анализ результатов расчета, полученных для пластины постоянной [60] и ступенчато переменной толщины, показывают, что уменьшение жесткости конструкции при $a < b$, приводит к росту перемещений $W(0, t)$ и увеличению амплитудных значений разности потенциалов $V(t)$;
- 3) Для используемой металлической подложки ($b = 3 \times 10^{-2}$ м, $h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м) биморфной пластине датчика давления DP–612.5 можно подобрать геометриче-

ские размеры пьезокерамической пластины, позволяющие наиболее эффективно преобразовать механическую нагрузку в электрический. На рисунках 4.3,4.4 показаны зависимости изменения амплитудных значений разности потенциалов $V^*(t)$ при различных значениях геометрических размеров пьезокерамической пластины. В частности, в данном случае необходимо использовать следующие параметры $R=0.62$ ($a=1.86\times 10^{-2}$ м) и $h_1=0.73\times 10^{-3}$ м;

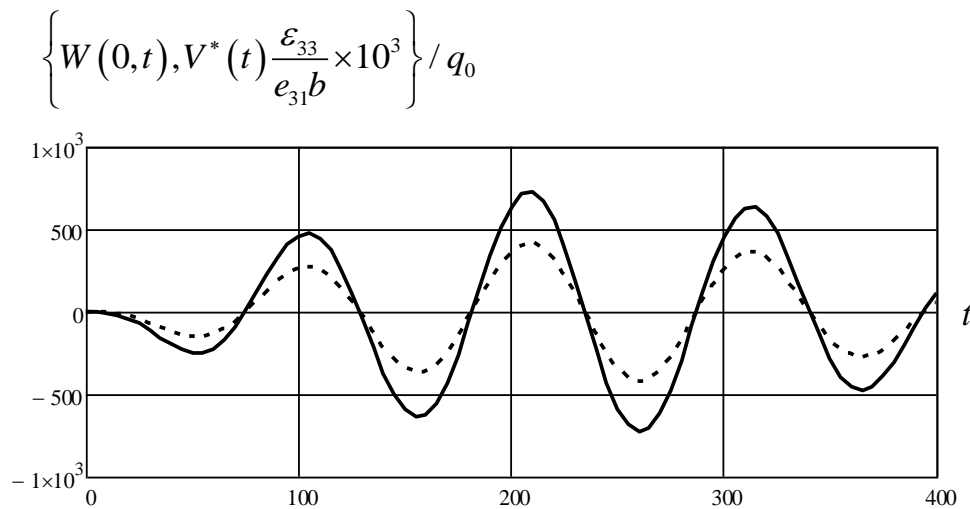


Рис.4.2. Изменение $W(0,t), V^*(t)$ по времени t ($h_1=0.5\times 10^{-3}$ м, $a=1.8\times 10^{-2}$ м, $\chi=0.8\lambda_1$)

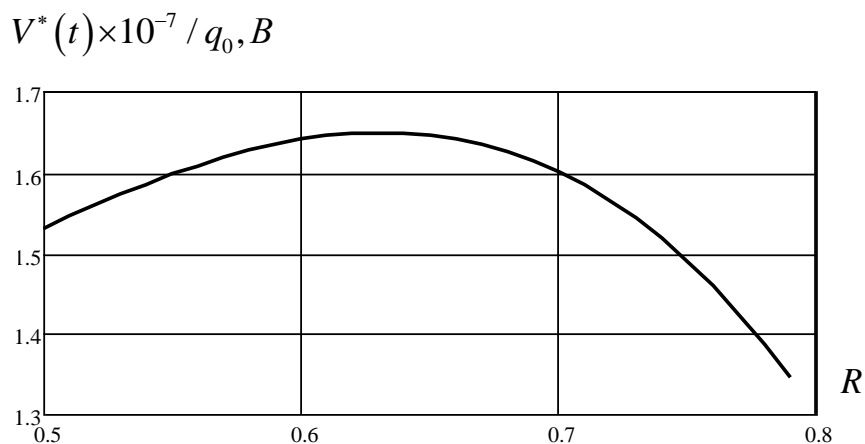


Рис.4.3. Зависимость амплитудного значения $V^*(t)$ от радиуса пьезокерамической пластины R ($\chi=0.2\lambda_1$)

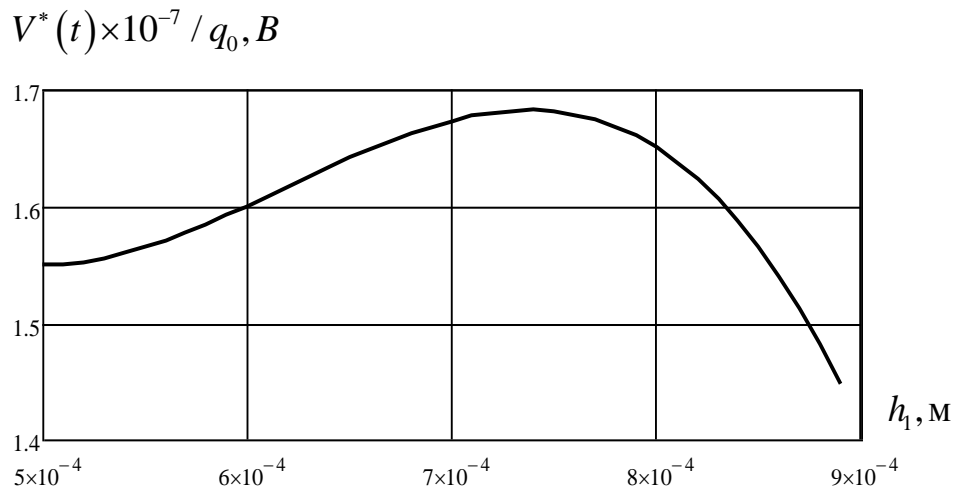


Рис.4.4. Зависимость амплитудного значения $V(t)$ от толщины пьезокерамической пластины h_1 ($\chi = 0.2\lambda_1$)

4) Для двухслойного участка конструкции можно определить плоскость, положение которой характеризуется минимальными значениями радиальной компоненты вектора перемещений (рис.4.5,а,б, $\bar{z} = -1.2 \times 10^{-4}$ м). Она не зависит от частоты внешнего воздействия, т.е. на данной поверхности нормальные радиальные и окружные механические напряжения имеют наименьшее значение. При этом в срединной поверхности однослойной части пластины присутствуют достаточно большие радиальные перемещения и следовательно нормальные напряжения (рис.4.5, в, $\bar{z} = -3.34 \times 10^{-4}$ м);

5) В двухслойной части конструкции величина нормальных погонных усилий $N_r(r,t), N_\theta(r,t)$ практически постоянна, а в однослойной части их численные значения существенно меньше (рис.4.6,а,б). При этом в области изменения структуры конструкции усилие $N_\theta(r,t)$ характеризуется разрывом численных значений (рис.4.6, б);

6) Наибольшее значение поперечного погонного усилия $Q_r(r,t)$ наблюдается не в жестком защемлении пластины, что характерно для однослойной системы, а в области ее нерегулярной структуры $r = R$. При этом нулевые значения данного усилия при $r = 0$ объясняются действием осесимметричной нагрузки (рис.4.6, в);

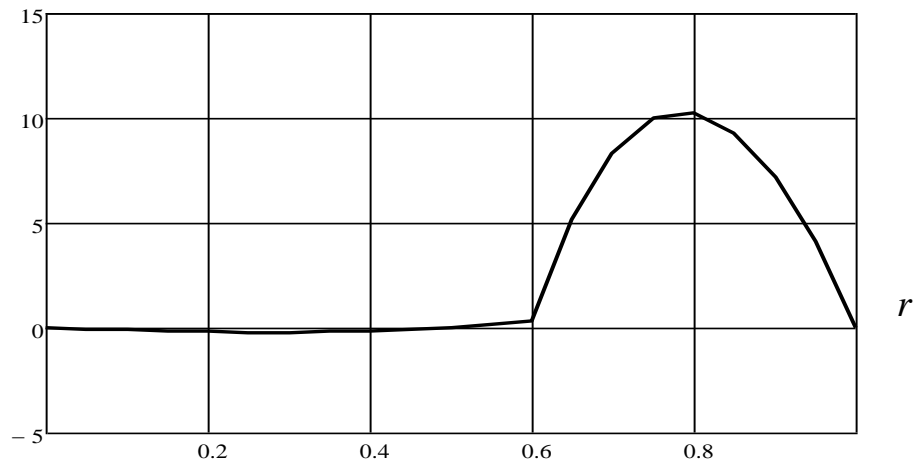
7) Максимальные значения погонных изгибающих моментов $\tilde{M}_r(r,t)$, $\tilde{M}_\theta(r,t)$ относительно срединной поверхности металлической подложки ($z = e - \frac{h_2}{2}$) наблюдаются в жестком защемлении (рис.4.6,г,д). Численные значения $\tilde{M}_r(r,t)$, $\tilde{M}_\theta(r,t)$ в жестком защемлении и в центре пластины имеют разные знаки, что объясняется растяжением в данный момент времени соответственно верхних и нижних волокон конструкции. Функции $\tilde{M}_r(r,t)$, $\tilde{M}_\theta(r,t)$ вычисляются по формулам:

$$\tilde{M}_r(r,t) = M_r(r,t) + \left(e - \frac{h_2}{2} \right) N_r(r,t),$$

$$\tilde{M}_\theta(r,t) = M_\theta(r,t) + \left(e - \frac{h_2}{2} \right) N_\theta(r,t).$$

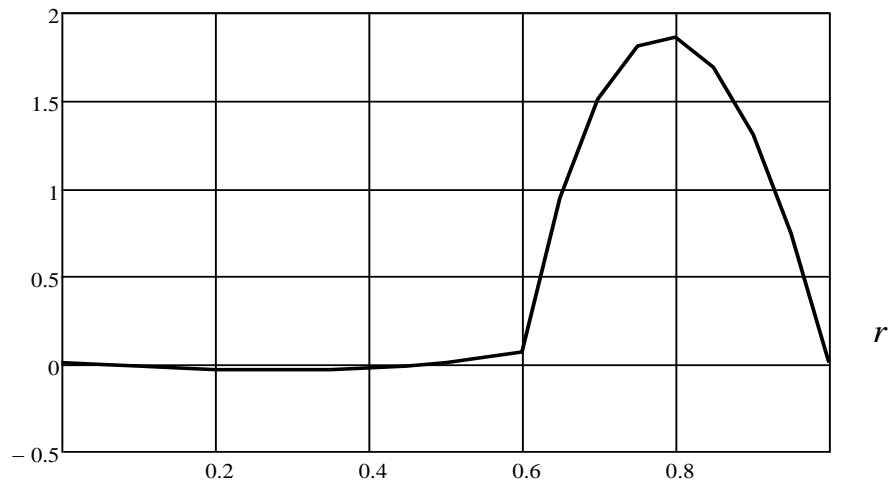
Численные значения $\tilde{M}_\theta(r,t)$ в области изменения структуры конструкции также характеризуется разрывом (рис.4.6, б).

$$U(r, \tilde{z}, t) / q_0$$



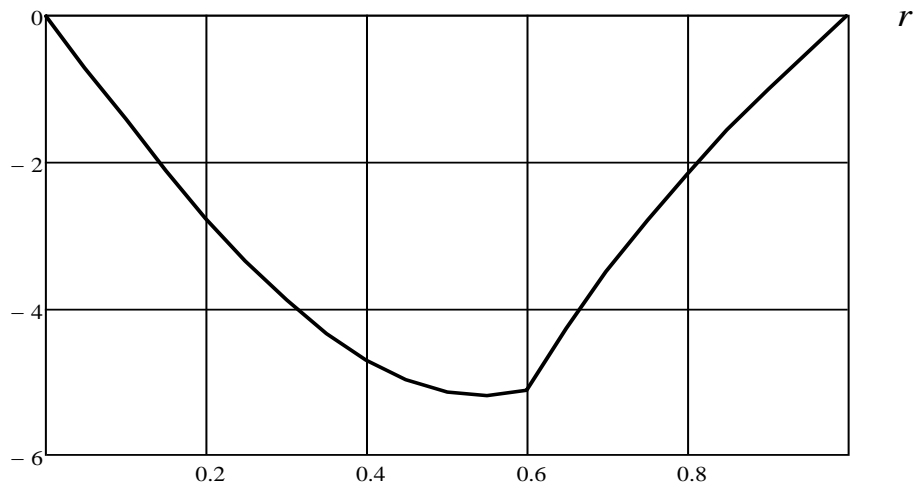
a) $\bar{z} = -1.2 \times 10^{-4} \text{ м}, \chi = 0.8\lambda_1$

$$U(r, \tilde{z}, t) / q_0$$



$$\text{б) } \bar{z} = -1.2 \times 10^{-4} \text{ м, } \chi = 0.2 \lambda_1$$

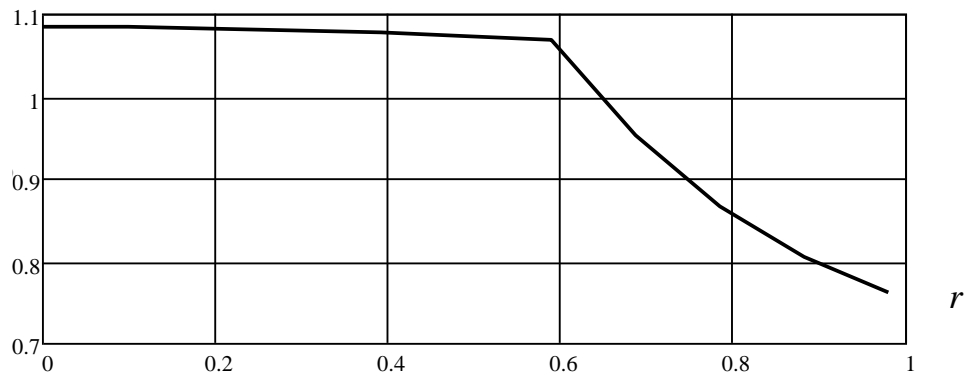
$$U(r, \tilde{z}, t) / q_0$$



$$\text{в) } \bar{z} = -3.34 \times 10^{-4} \text{ м} - \text{серединная поверхность металлической подложки, } \chi = 0.8 \lambda_1$$

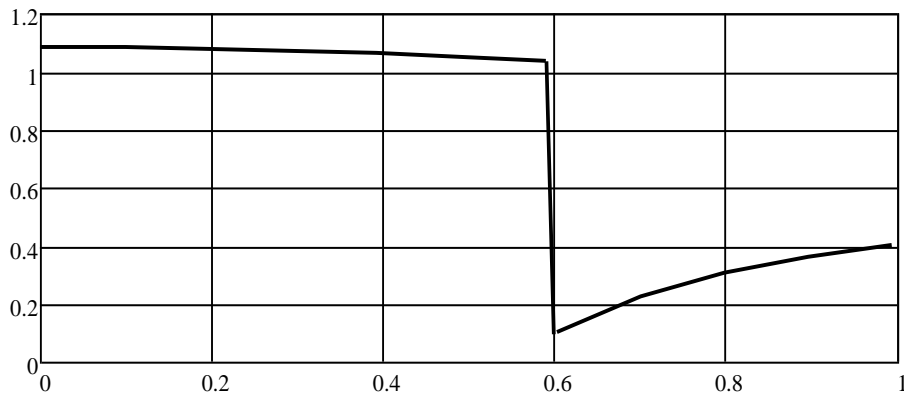
Рис.4.5. Изменение амплитудных значений планарных перемещений по радиальной координате ($b = 3 \times 10^{-2}$ м, $a = 1.86 \times 10^{-2}$ м, $h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $h_1 = 0.73 \times 10^{-3}$ м,)

$$N_r(r,t) \times 10^{-9} / q_0, H/M$$



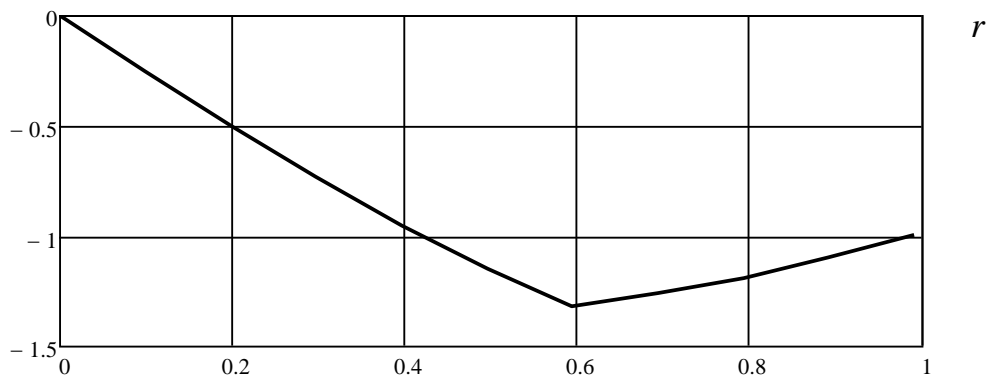
a) $N_r(r,t) - r$

$$N_\theta(r,t) \times 10^{-9} / q_0, H/M$$



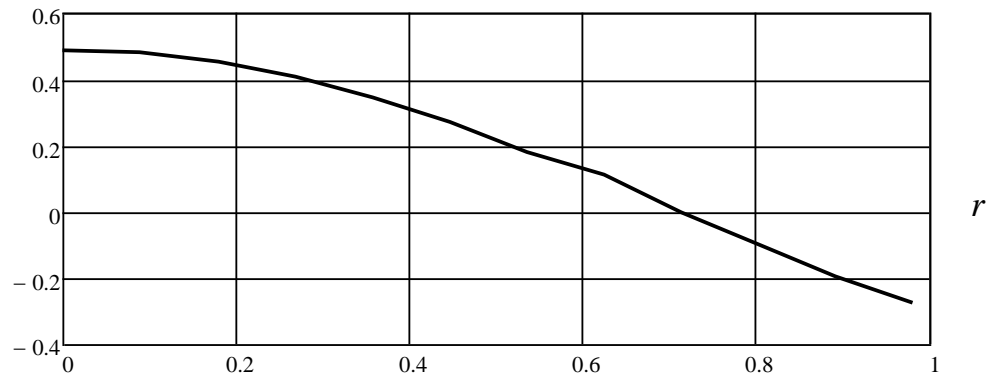
б) $N_\theta(r,t) - r$

$$Q_r(r,t) \times 10^{-8} / q_0$$



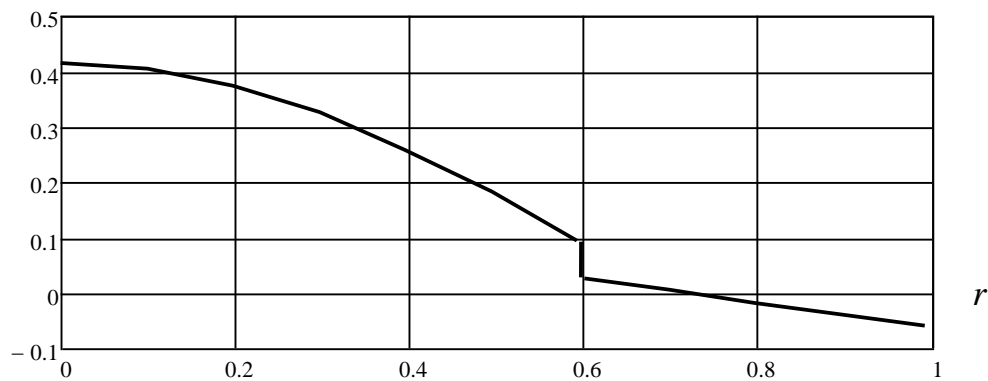
в) $Q_r(r,t) - r$

$$\tilde{M}_r(r,t) \times 10^{-8} / q_0, \frac{HM}{M}$$



Г) $M_r(r,t) - r$

$$M_\theta(r,t) \times 10^{-8} / q_0$$



Д) $M_\theta(r,t) - r$

Рис.4.6. Изменение амплитудных значений внутренних усилий по радиальной координате ($b = 3 \times 10^{-2}$ м,

$a = 1.86 \times 10^{-2}$ м ($R = 0.62$), $h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $h_1 = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $\chi = 0.8\lambda_1$)

Следует отметить, что в общем случае разработанный алгоритм может быть использован для расчета биморфных пластин ступенчато переменной толщины с произвольным количеством электроупругих слоев, асимметричных относительно приведенной поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных исследований можно сформулировать основные результаты диссертационной работы:

1. Разработана методика расчета многослойных круглых биморфных пластин, позволяющая с помощью базовых расчетных соотношений описать их работу в случае действия нестационарной осесимметричной силовой и электрической нагрузки;
2. Построены новые аналитические решения связанных нестационарных задач для пьезокерамических биморфных симметричных и асимметричных пластин постоянной толщины;
3. На основании модели Тимошенко для тонких элементов представлена математическая модель расчета и построено замкнутое решение для асимметричной биморфной пластины ступенчато переменной толщины;
4. Разработано программное обеспечение, позволяющее проводить анализ связанных электроупругих процессов в круглых многослойных преобразователях энергии;
5. Разработана экспериментальная установка по определению частот собственных осесимметричных колебаний круглых пьезокерамических пластин;
6. Сформулированы практические рекомендации по подбору геометрических размеров и материалу биморфных преобразователей, которые могут быть использованы при их проектировании.
7. Представленная методика расчета биморфных пластин нашла применение при проектировании тонкостенных многослойных элементов выполняемым ООО «Интеб» (датчик DP-612.5). Кроме того, результаты работы используются в учебном процессе при подготовке магистрантов по направлению «Строительство».

ЛИТЕРАТУРА

1. Аллавердиев, А. М. Связанные изгибно-сдвиговые колебания слойно-ступенчатых дисковых пьезокерамических преобразователей / А. М. Аллавердиев, Н. В. Ахмедов, Т. Д. Шермергор // Прикладная механика. – 1987. – Т.23, №5. – С. 59-66.
2. Афонин, С.М. Пьезопреобразователи для приводов микроперемещений / С.М. Афонин // Приборы и системы управления. – 1998. – №2. – С. 41-42.
3. Бардзокас, Д.И. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т.II: Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / Д.И. Бардзокас. – М.: Комкнига, 2005. – 376 с.
4. Барроут, Дж. Введение в физику сегнетоэлектрических явлений / Дж. Барроут. – М.: Мир, 1970. – 343 с.
5. Белоконь, А.В. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости / А.В. Белоконь, В.А. Еремеев, А.В. Наседкин, А.Н. Соловьев // ПММ. – 2000. – Т. 64. – Вып. 3. – С. 381-393.
6. Белоконь, А.В. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств / А.В. Белоконь, А.В. Наседкин, А.Н. Соловьев // ПММ. – 2002. – Т. 66. – Вып. 3. – С. 491-501.
7. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. –Т.1. – Ч.А. – С. 204-326.
8. Бобцов, А.А. Исполнительные устройства и системы для микроперемещений / А.А. Бобцов, В.И. Бойков, С.В. Быстров, В.В. Григорьев. – СПб ГУ ИТМО, 2011. –131 с.
9. Бугуславская, С.Н. Использование пьезоэлектрического эффекта в акустических измерениях / С.Н. Бугуславская, Е.В. Романенко, Л.И. Холод // Акуст.ж. – 1971. – Т.17, № 2. – С. 210-216.

10. Ватульян, А.О. Изгибные колебания пьезоэлектрического биморфа с внутренним разрезным электродом / А.О. Ватульян, А.А. Рынкова // ПМИТФ. – 2001. – Т.42, №1. – С.184-189.
11. Ватульян, А.О. К вопросу о расчете изгибных колебаний пьезокерамической биморфной пластины с разрезным электродом / А.О. Ватульян, А.А. Рынкова // Дефектоскопия. – 1998. – №3. – С. 61-66.
12. Ватульян, А.О. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях / А.О. Ватульян А.А., Рынкова // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – №4. – С. 114-122.
13. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
14. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике. / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1978. – 318 с.
15. Гринченко, В.Т. Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
16. Джагуров, Р.Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления / Р.Г. Джагуров. – СПб.: Политехника, 1994. –608 с.
17. Домаркас, В.И. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи / В.И. Домаркас, Р-И.Ю. Кажис. – Вильнюс: Минтис, 1975. – 255 с.
18. Евсейчик, Ю.Б. Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика / Ю.Б. Евсейчик // Прикладная механика. – 1990. – №12 (26). – С. 67-75.
19. Евсейчик, Ю.Б. Чувствительность гидроакустического датчика давления / Ю.Б. Евсейчик, К.В. Медведев // Гидравлика и гидротехника. Науч.- техн. сб. – Киев: НТУ. – 2008. – Вып. 62. – С. 10-16.
20. Кикучи, Е. Ультразвуковые преобразователи / Е. Кикучи. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
21. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Госиздат. техн. – теорет. лит., 1959. – 532 с.

22. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Госиздат. техн.–теорет. лит., 1955. – 491 с.
23. Матаушек, И. Ультразвуковая техника / И. Матаушек. – М.: Metallurg. издат., 1962. – 511 с.
24. Можен, Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
25. Мэзон, У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке / У. Мэзон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 447 с.
26. Никофоров, С.Н. Теория упругости и пластичности / С.Н. Никофоров. – М.: Госиздат. по арх. и стр–ву, 1955. – 284 с.
27. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / Новацкий В. – М.: Мир, 1986. – 169 с.
28. Новожилов, Ю.В. Электродинамика / Ю.В. Новожилов, Ю.А. Яппа. – М.: Наука, 1978, – 352 с.
29. Паймушин, В.Н. Соотношение теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях / В.Н. Паймушин // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т.55, №5. – С. 135-149.
30. Партон, В.З. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 470 с.
31. Петрищев, О.Н. Исследование биморфного пьезоэлектрического преобразователя в режиме излучения ультразвуковых колебаний / О.Н. Петрищев, А.Н. Шаблатович // Электроника и связь. – 2003. – №18. – С. 120-126.
32. Петрищев, О.Н. Частотная характеристика несимметричного биморфного элемента в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта. Часть 3. Расчет и исследование частотных характеристик несимметричного биморфного элемента / О.Н. Петрищев, А.Я. Мартынюк // Электроника и связь. – 2007. – №1. – С. 56-61.
33. Петрищев, О.Н. Частотная характеристика несимметричного биморфного элемента в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта. Часть 2. Общее решение задачи о вынужденных колебаниях несимметричного биморфного элемента / О.Н. Петрищев, А.Я. Мартынюк // Электроника и связь. – 2006. – №6. – С. 68-74.

34. Подводные электроакустические преобразователи. Справочник / под ред. В.В. Богородского. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
35. Ратманова, О.В. Нестационарная задача прямого пьезоэффекта для асимметричной биморфной круглой пластины ступенчато переменной толщины / О.В. Ратманова // Науч. электр. журнал. Сетевое издание. Вестник ИШ ДВФУ. – 2019. – Вып. 2 (39). – С. 13-22.
36. Ратманова, О.В. Связанная динамическая задача для круглой жестко закрепленной биморфной пластины. / О.В. Ратманова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность. АСА СамГТУ. – 2018. – С. 231-236.
37. Ратманова, О.В. Нестационарная осесимметричная задача теории электроупругости для асимметричной биморфной пластины ступенчато переменной толщины / О.В. Ратманова // Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия): в 2-х томах. Т. 1. / Под ред. В. П. Радченко. — Самара: СамГТУ. – 2019. – С. 158-161.
38. Савин, В.Г. Действие акустического импульса на плоскую электроупругую систему из биморфов / В.Г. Савин, А.Э. Бабаев // В сб. «Інформаційні системи механіка та керування». – Киев: Нац.тех.ун-т Украины. – 2009. – Вып.3. – С.30-39.
39. Сдобников, А.Н. Продольные колебания стержня при возбуждении электрическим полем / А.Н. Сдобников, С.А. Сдобников // Инженерный вестник. – 2014 – №2. – С. 568-582.
40. Сенник, Н.А. Моделирование и расчет электроупругих полей пьезокерамических оболочек и пластин: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Н.А. Сенник. – М.: 1984. – 181 с.
41. Сеницкий, Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра / Ю.Э. Сеницкий // ПММ. – 1993. – Т.57. – Вып.1. – С. 116-122.
42. Сеницкий, Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований / Ю.Э. Сеницкий – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. – 174 с.

43. Сеницкий, Ю.Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра / Ю.Э. Сеницкий // Прикл. Механика. – 1981. – Т.17, №8. – С. 95-100.
44. Сеницкий, Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям / Ю.Э. Сеницкий // Изв. Саратовского ун–та. Новая серия. Матем., механ., информатика, –2011. – № 3(1). – С. 61-89.
45. Сеницкий, Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики / Ю.Э. Сеницкий // Изв. вузов. Математика. – 1991. – №4. – С. 57-63.
46. Снеддон, И.Н. Преобразования Фурье. / И.Н. Снеддон. – М.: Изд–во иностр. лит., 1955. – 668 с.
47. Соколкин, Ю.В. Электроупругость пьезокомпози́тов с нерегулярными структурами / Ю.В. Соколкин, А.А. Паньков. – М.: Наука. Физ.–мат. лит., 2003. – 180 с.
48. Соловьев, А.Н. Прямые и обратные задачи для конечных упругих и электроупругих тел: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.02.04 / А.Н. Соловьев – РГУ, Ростов-на-Дону, 2005. – 296 с.
49. Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля / под общ. ред. И.Н. Ермолова. – М.: Машиностроение, 1986. – 280 с.
50. Устинов, Ю.А. Электроупругость. Основы теории и некоторые приложения // Соросовск. образ. журн. –1996. – Вып.3. – С. 122-127.
51. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости/ Я.С. Уфлянд. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 367 с.
52. Фридман Л.И. Нестационарная динамическая задача теории упругости для конечного цилиндра / Л.И. Фридман //Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2003. – № 2(28). – С. 113-121.
53. Шляхин, Д.А. Нестационарная осесимметричная задача обратного пьезоэффекта для круглой биморфной пластины ступенчато переменной толщины и же-

сткости / Д.А. Шляхин // Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. серия. – 2013. – №6(107). – С. 133-140.

54. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины. / Д.А. Шляхин // Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. серия. – 2011. – №8(89). – С. 142-152.

55. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины. / Д.А. Шляхин // Вестник Самарск. гос. унта. Естественнонаучн. серия. – 2012. – №6(97). –С. 124-135.

56. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания круглых многослойных биморфных пластин / Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017, – Т.21, №4. – С. 773-785.

57. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины / Д.А. Шляхин // Изв. РАН. МГТ. – 2013. –№2. – С. 77-85.

58. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины / Д.А. Шляхин // Изв. РАН. МГТ. – 2014. –№4. – С. 90-100.

59. Шляхин, Д.А. Динамическая задача электроупругости для толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины / Д.А. Шляхин // Вестник Оренбург. гос. ун-та. – 2013. – №9. – С. 288-232.

60. Шляхин, Д.А. Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для многослойной пластины / Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова (Казакова) // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность. Самара. – 2017. – С. 187-191.

61. Шляхин, Д.А. Осесимметричная задача теории упругости для круглой жесткозакрепленной пластины / Д.А. Шляхин // Известия вузов. Строительство. – 2011. – №7. – С. 3-9.

62. Шляхин, Д.А. Подбор геометрических размеров ультразвукового пьезокерамического преобразователя / Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова (Казакова) // Тради-

ции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техно-сферная безопасность. Сборник статей СГАСУ. – 2016. – С. 211-214.

63. Шляхин, Д.А. Уточненное решение динамической задачи электроупругости для биморфной пластины / Д.А. Шляхин // Вестник КРСУ. – 2016. – Т.16, №5. – С. 108-113.

64. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой биморфной пластины ступенчато переменной толщины и жесткости [Электронный ресурс] / Д.А. Шляхин // Инженерный вестник Дона. – 2013. – №1. – Режим доступа: <http://ivdon.ru>.

65. Шляхин, Д.А. Оптимальное конструктивное решение круглых многослойных биморфных пластин [Электронный ресурс] / Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова // Инженерный журнал: наука и инновации. Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2019. – №1 (85). – Режим доступа: <http://www.engjournal.ru/articles/1844/1844.pdf>.

66. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания круглых многослойных биморфных пластин. /Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова // Механика деформируемого твердого тела: сборник трудов IX Всероссийской конференции СамГТУ. – 2017. – С. 287-290.

67. Шляхин, Д.А. Оптимальный выбор геометрических размеров круглых биморфных пьезокерамических пластин. / Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова // Вестник Башкирского университета. – 2019. – Т. 24, №1. – С. 22-29

68. Шульга, М.О. Определение электродвижущей силы пластинчатых пьезоэлектрических преобразователей при динамических механических нагрузках / М.О. Шульга // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. –2012. – №.18. – С. 227-234.

69. Шульга, М.О. Определение электродвижущей силы пьезоэлектрических преобразователей при механических нагрузках / М.О. Шульга // Доклады Нац. академии наук Украины. –2009. – №.1. – С. 70-74.

70. Шульга, Н.А. Колебания пьезоэлектрических тел/ Н.А. Шульга, А.М. Болкисев. – Киев: Наук.думка, 1990. – 228 с.

71. Янчевский, И. В. Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении / И. В. Янчевский // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вып. 16. – С. 303-313.
72. Янчевский, И.В. Нестационарные колебания круглого асимметричного биморфа при электрическом нагружении/ И. В. Янчевский // Вісник Донецького нац. ун-та. – 2010. – Вып.2. – С. 101-105.
73. Янчевский, И.В. Управление колебаниями изгиба круглого асимметричного биморфного пьезопреобразователя с разрезными электродами / И. В. Янчевский // Пробл. машиностроения. – 2012. – Т.15, № 2. – С. 37-43.
74. Abedi, M. A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences and edge restraints / M. Abedi, R. Jafari-Talookolaei, P. Valvo // Computers & Structures. – 2016. – Vol. 175. – P. 144-156.
75. Adelman, N.T. Flexural-extensional behavior piezoelectric circular plates / N.T. Adelman, Y. Stavsky // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – Vol. 67, No. 3. – P. 819-822.
76. Allik, H. Finite element method for piezoelectric vibration / H. Allik, T.J.R. Hughes // Int.J.Numer.Meth.Eng. –1970. – No. 2. – P. 151-157.
77. Allik, H. Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite element / H. Allik, K.M. Webman, J.T. Hunt // J.Acoust.Soc.Amer. –1974. – No. 6(56). – P. 1782-1791.
78. Amabili, M. Shear deformable versus classical theories for nonlinear vibrations of rectangular isotropic and laminated composite plates / M. Amabili, S. Farhadi // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 320, No. 3. –P. 649-667.
79. Bendsoe, M.P. On the design of structure and controls for optimal performance of actively controlled flexible structures / M.P. Bendsoe, N. Olhoff , J.E. Taylor // -Mech. Struct. & Mach. – 1987. –Vol. 15, No. 3. – P. 265-295.
80. Berndt, E.A. Action of a smooth flat charged punch on the piezoelectric half-space possessing symmetry of class / E.A. Berndt, I. Sevostianov // International Journal of Engineering Science. – 2016. – Vol. 103. – P. 77-96.

81. Berndt, E.A. Green's function for unbounded piezoelectric material of class 6 / E.A. Berndt, I. Sevostianov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2016. – Vol. 83. – P. 81-89.
82. Chang, S.N. A piezoelectric/elastic spring-coupled surface profiler / S.N. Chang, C.C. Chou // *Sensor and Actuators*. – 2005. – Vol. 120. – P. 317-324.
83. Ding, H.J. The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane stress problems / H.J. Ding, H.M. Wang, P.F. Hou // *Int. J. Sol. and Str.* – 2003. – Vol. 40. – P. 105-123.
84. Donoso, A. Optimization of piezoelectric bimorph actuators with active damping for static and dynamic loads / A. Donoso, O. Sigmund // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2009. – Vol. 38, No. 2. – P. 171-183.
85. Gabbert, U. *Smart Structures and Structronic Systems* / U. Gabbert, H.S. Tzou. – London, Kluwer Academic Pub, 2001. – 384 p.
86. Jam, J. E. An exact solution of mechanical buckling for functionally graded material bimorph circular plates / J.E. Jam, M. Khosravi, N. Namdaran // *Metall. Mater. Eng.* – 2013. – Vol. 19, No.1. – P. 45-63.
87. Jurenas, V. Piezoelectric bimorphs for laser shutter systems: optimization of dynamic characteristics / V. Jurenas, R. Bansevicius, S. Navickaite // *Mechanika. Kaunas*. – 2010. – No. 5(85). – P. 44-47.
88. Kagawa, Y. Analysis and design of electromechanical filters by finite element technique / Y. Kagawa // *J.Acoust.Soc.Amer.* – 1971. – Vol. 49. – P. 1348-1356.
89. Kagawa, Y. Application of finite element method to vibration problems in which electrical and mechanical systems are coupled – An analysis of flexuretype vibrators with electrostrictive transducers / Y. Kagawa, G.M.L. Gladwell // *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*. – 1970. – Vol. 17. – P. 41-52.
90. Kagawa, Y. Finite element for a piezoelectric circular rod / Y. Kagawa, T. Yamabuchi // *Ibid.* – 1976. – Vol. 23. – P. 379-385.
91. Kagawa, Y. Finite element simulation of two dimensional electromechanical resonators / Y. Kagawa, T. Yamabuchi // *Ibid.* – 1974. – Vol. 21. – P. 273-280.

92. Karnaukhova, T.V. Forced vibrations and dissipative heating of a hinged bimorph rectangular plate with open electrode. / T.V. Karnaukhova // International Applied Mechanics. – 2018. – Vol. 54, No. 2. – P. 207-212.
93. Liu, X. Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates / X. Liu, Q. Wang, S.T. Quek // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39. – P. 2129-2151.
94. Ma, H. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory / H. Ma, X. Gao, J. Reddy // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56, No. 12. – P. 3379-3391.
95. Peng-Fei, H. The transient responses of magneto–electro–elastic hollow cylinders/ PengFei Hou, Andrew Y T Leung // Smart Mater. Struct. –2004. –No. 13. – P. 762-776.
96. Petrauskas, A. Design and the radiation patterns of rectangular symmetric bimorph piezoelectric transducers in cosinusoidal flexural vibration. / A. Petrauskas //Ultragarsas (Ultrasound), Kaunas: Technologija. – 2009. – Vol. 64, No. 1. – P. 29-36.
97. Qi, S. Acoustic energy harvesting based on a planar acoustic metamaterial [Электронный ресурс] / S. Qi, M. Oudich, Y. Li, B. Assouar // APPLIED PHYSICS LETTERS. – 2016. – Vol. 108, No. 26 – Режим доступа: <https://www.researchgate.net/publication/304539230>.
98. Ramegowda, P. C. A novel coupling algorithm for the electric field–structure interaction using a transformation method between solid and shell elements in a thin piezoelectric bimorph plate analysis / P. C. Ramegowda, D. Ishihara, T. Niho, T. Horie // Finite Elements in Analysis and Design. – 2019. – Vol. 159. – P. 33-49.
99. Sharapov, V. Piezoceramic sensors. / V. Sharapov. – Springer Verlag, 2010. – 498 p.
100. Sherrit, S. Flow energy piezoelectric bimorph nozzle harvester. Proceedings of SPIE / S. Sherrit, H. Jae Lee - The International Society for Optical Engineering, 2014. –Vol. 9057. – 11 p.
101. Shlyakhin, D.A. Dynamical problem in the theory of electroelasticity for an asymmetric rigid bi-morph plate / D.A. Shlyakhin // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 111. – P. 717-725.

102. Shlyakhin, D.A. Non –axil – symmetrical dynamic problem of electro elasticity for the axially–polarized piezoceramic cylinder / D.A. Shlyakhin // *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia.* – 2015. – Vol. 68, No. 2. –P. 43-52.
103. Shlyakhin, D.A. Refined Solution for Dynamic Axisymmetric Electroelasticity Problem for Rigid Bi-Morph Plate / D.A. Shlyakhin // *Procedia Engineering.* – 2016. – Vol. 150. – P. 68-73.
104. Shlyakhin, D.A. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate / D.A. Shlyakhin, O.V. Ratmanova (Kazakova) // *Procedia Engineering.* –2016. – Vol. 153. – P. 662-666.
105. Shlyakhin, D.A. Forced Axisymmetric Vibrations of Thin Circlar Plate of Step-wise Variable Thickness and Stiffness / D.A. Shlyakhin, O.V. Ratmanova (Kazakova) // *Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне: сборник статей. СГАСУ. Самара.* – 2015. – P. 116-121.
106. Shlyakhin, D.A. Non-Stationary Flexural Fluctuations of a Round Flat Bimorph Plate with Graded-Varying Thickness / D.A. Shlyakhin, O.V. Kazakova // *Procedia Engineering.* – 2014. – Vol. 91. – P. 69-74.
107. Shlyakhin, D.A. The task of direct piezoeffect for a bi-morph plate [Электронный ресурс] / D.A. Shlyakhin, O.V. Ratmanova // *MATEC Web of Conferences.* –2018. – Vol. 196. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1051/matecconf/201819601006>.
108. Shlyakhin, D.A. Dynamic Problem of Direct Piezoelectric Effect for the Circular Multilayer Plate / D.A. Shlyakhin, O.V. Ratmanova // *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering.* – 2019. – P. 89-97.
109. Shorakaei, H. Analytical Solution for Energy Harvesting from Nonlinear Transverse Vibration of an Asymmetric Bimorph Piezoelectric Plate [Электронный ресурс] / H. Shorakaei, A. Shooshtari, G. Rega // *ENOC, Budapest, Hungary.* – 2017. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1363-0>.
110. Taya et al, M. Design of bimorph piezo-composite actuators with functionally graded microstructure. / M. Taya et al // *Sensors and Actuators A.* – 2003. – Vol. 107. – P. 248-260.

111. Tithi, D. Design, Simulation and Optimization of Bimorph Piezoelectric Energy Harvester [Электронный ресурс] / D. Tithi, D. Ravishankar, A. Sumathy // Proceedings of the COMSOL Conference. Bangalore. – 2016. – Режим доступа: www.comsol.ru/paper/download/368531/desai_paper.pdf.
112. Tsaplev, V. Disk Bimorph-Type Piezoelectric Energy Harvester / V. Tsaplev, R. Konovalov, K. Abbakumov // Journal of Power and Energy Engineering. – 2015. – No. 3. – P. 63-68.
113. Vel, S.S. Analysis of piezoelectric bimorphs and plates with segmented actuators / S.S. Vel, R.C. Batra // Thin-Walled Structures. – 2001. – Vol. 39. – P. 23-44.
114. Wang, Y. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads / Y. Wang, R.Q. Xu, H.J. Ding // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 215. – P. 287-305.
115. Yoo, J. H. Piezoelectric ceramic bimorph coupled to thin metal plate as cooling fan for electronic devices/ Yoo J. H., Hong J. I., Cao W. // Sensors and Actuators. – 2000. – Vol. 79. – P. 8-12.
116. Zhang, P. Axisymmetric solutions for the multi-layered transversely isotropic piezoelectric medium / P. Zhang, J. Liu, G. Lin // Applied Mathematics and Computation. – 2016. – Vol. 290. – P. 355-375.
117. Zhao, H. Synergistic performance of piezoelectric transducers and asphalt pavement / H. Zhao, L. Qin, J. Ling // International Journal of Pavement Research and Technology. – 2018. – Vol. 11. – P. 381-387.
118. Zheng, S. Genetic algorithm based wireless vibration control of multiple modal for a beam by using photostrictive actuators / S. Zheng, J. Lian, H.Wang // Applied Mathematical Modelling. – 2014. – Vol. 38. – P. 437-450.
119. Zhou, W. Lead-Free Metamaterials with Enormous Apparent Piezoelectric Response / W. Zhou, P. Chen, Q. Pan, X. Zhang // Advanced Materials. – 2015. Vol, 27 No. 41. – P. 6349-6355.

Приложение 1



ООО Строительно-консалтинговая компания «ИНТЕБ»
ИНН/ КПП 6319169203/ 631901001.

443016, г. Самара, ул. Нагорная, д.6, оф.27
8(846) 265-43-69 ССК-ИНТЕБ@mail.ru

Утверждаю:

Директор

ООО СКК «Интеб»

к.т.н. Ильдияров Е.В.

2019 г.



АКТ

внедрения результатов диссертационной работы
ассистента кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов»
АСА СамГТУ Ратмановой О.В.

ООО «Интеб» осуществляет разработку измерительных приборов с использованием пьезокерамических материалов. В частности, выполняет проектные работы по разработке датчиков давления (DP-612.5), в которых в качестве основного рабочего элемента используется круглая многослойная пластина.

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Ратмановой О. В.: «Связанные осесимметричные задачи динамики для круглых биморфных пьезокерамических пластин», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, посвященные исследованию вынужденных колебаний биморфных пластин ступенчато переменной толщины, использованы ООО «Интеб» при проектировании датчиков давления. Это привело к существенной экономии средств за счет уменьшения объема экспериментальных исследований.

Главный инженер проекта

А.О. Лукин



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный
технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)
Академия строительства и архитектуры
(АСА СамГТУ)

ул. Молодогвардейская, 244,
гл. корпус, г. Самара, 443100
Тел.: (846) 278-43-11, факс (846) 278-44-00
E-mail: rector@samgtu.ru
ОКПО 02068396, ОГРН 1026301167683,
ИНН 6315800040, КПП 631601001

№ _____
На № _____ от _____



Директор АСА СамГТУ
И.И. Шувалов М.В.

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы
ассистента кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов»
АСА СамГТУ Ратмановой О.В.

Материалы диссертационной работы Ратмановой О.В. «Связанные осесимметричные задачи динамики для круглых биморфных пьезокерамических пластин» используются на втором курсе магистратуры по направлению подготовки 08.04.01 Строительство (Теория сооружений) при изучении следующей дисциплины «Взаимодействие упругих элементов конструкций с сопряженными полями гидроупругости, термоупругости, электроупругости».

Зав.кафедрой СМ и СМ, д.т.н., доцент

Шляхин Д.А.

Приложение 2

Типовая программа в среде MathCad–14 по определению частот собственных колебаний биморфной пластины

Исходные данные:

$$\lambda_{11} := 0.2596$$

$$bb := 14 \cdot 10^{-3} \text{ - радиус пластины (м)}$$

Физические характеристики пьезокерамики:

$$\left. \begin{array}{l} C_{11} := 109000000000 \\ C_{55} := 24000000000 \\ C_{13} := 54000000000 \\ C_{12} := 61000000000 \\ C_{33} := 93000000000 \end{array} \right\} \text{ Н/м}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} ep_{33} := 0.00000000726 \\ ep_{11} := 0.00000000773 \end{array} \right\} \text{ Ф/м}$$

$$\left. \begin{array}{l} e_{15} := 10.6 \\ e_{31} := -4.9 \\ e_{33} := 14.9 \end{array} \right\} \text{ Кл/м}^2$$

$$\rho = 7730 \text{ кг/м}^3$$

$$hh1 = 0.5 \times 10^{-3} \text{ - толщина пьезокерамич. пластины (м)}$$

Исходные данные в безразмерной форме:

-толщина пьезопластины:

$$h1 := \frac{hh1}{bb}$$

- толщина биморфа:

$$h := h1 \cdot 2$$

Собственные значения по радиальной координате:

$$jj := jj1 \quad jj1 := 3.831706$$

$$\lambda := \lambda_{11} \quad jj2 := 7.015587$$

$$jj3 := 10.17347$$

$$jj4 := 13.323692$$

$$s1 := \frac{-e_{33} \cdot (C_{33} \cdot ep_{33} + e_{33}^2)}{jj^2 \cdot (C_{11} \cdot ep_{11} \cdot e_{33} - C_{11} \cdot ep_{33} \cdot e_{15})}$$

$$s2 := \frac{e_{33}}{C_{11} \cdot ep_{11} \cdot e_{33} - C_{11} \cdot ep_{33} \cdot e_{15}} \cdot [(e_{15} \cdot e_{33} + C_{55} \cdot ep_{33}) - \lambda^2 \cdot jj^{-2} \cdot C_{11} \cdot ep_{33}]$$

$$s3 := \frac{-e_{33}}{jj \cdot (C_{11} \cdot ep_{11} \cdot e_{33} - C_{11} \cdot ep_{33} \cdot e_{15})} \cdot [e_{33} \cdot (e_{31} + e_{15}) + ep_{33} \cdot (C_{13} + C_{55})]$$

$$a1 := \lambda^2 - jj^2$$

$$a2 := \frac{C_{55}}{C_{11}} - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} \cdot jj \cdot s3$$

$$a3 := \frac{-(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \cdot jj \cdot s1$$

$$a4 := \frac{-(C13 + C55)}{C11} \cdot jj - \frac{e31 + e15}{e33} \cdot jj \cdot s2$$

$$b3 := s1$$

$$b4 := \frac{C13 + C55}{C11} \cdot jj - jj^2 \cdot \frac{e15}{e33} \cdot s3$$

$$b5 := s3$$

$$b1 := -jj^2 \cdot \frac{C55}{C11} - \frac{e15}{e33} \cdot jj^2 \cdot s2 + \lambda^2$$

$$b2 := \frac{C33}{C11} - \frac{e15}{e33} \cdot jj^2 \cdot s1 + s2$$

$$e2 := b3 + \frac{b4 \cdot (a2 \cdot b3 - a3 \cdot b5)}{a1 \cdot b5 - a2 \cdot b4} + \frac{b5 \cdot (a2 \cdot b2 - a4 \cdot b5)}{a1 \cdot b5 - a2 \cdot b4}$$

$$e3 := b2 + \frac{b4 \cdot (a2 \cdot b2 - a4 \cdot b5)}{a1 \cdot b5 - a2 \cdot b4} + \frac{a2 \cdot b1 \cdot b5}{a1 \cdot b5 - a2 \cdot b4}$$

$$e1 := \frac{b5 \cdot (a2 \cdot b3 - a3 \cdot b5)}{a1 \cdot b5 - a2 \cdot b4}$$

$$e4 := b1 + \frac{a2 \cdot b1 \cdot b4}{a1 \cdot b5 - a2 \cdot b4}$$

$$k1 := \frac{e2}{e1}$$

$$k2 := \frac{e3}{e1}$$

$$k2 := \frac{e3}{e1}$$

$$k3 := \frac{e4}{e1}$$

$$p := \frac{-k1^2}{3} + k2$$

$$qq := 2 \cdot \left(\frac{-k1}{3} \right)^3 - \frac{-k1 \cdot k2}{3} - k3$$

$$Q := \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{qq}{2} \right)^2$$

$$AA := \left(\frac{-qq}{2} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$BB := \frac{-p}{3 \cdot \left(\frac{-qq}{2} + \sqrt{Q} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$k4 := AA + BB - \frac{-k1}{3}$$

$$k5 := k1 - k4$$

$$k6 := \frac{k3}{k4}$$

$$AA1 := \frac{-0.5 \cdot k5 + \sqrt{(0.5 \cdot k5)^2 + 1 \cdot (k6 - 0.25 \cdot k5^2)}}{2}$$

$$BB1 := 0.5 \cdot k5 + AA1$$

$$A1 := \sqrt{AA1}$$

$$B1 := \sqrt{BB1}$$

$$K21(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot \cos(B1 \cdot z)$$

$$K22(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot \sin(B1 \cdot z)$$

$$K23(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot \cos(B1 \cdot z)$$

$$K24(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot \sin(B1 \cdot z)$$

$$K25(z) := e^{\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$K26(z) := e^{-\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$ff1 := \frac{-a2 \cdot (a3 \cdot b5 - a2 \cdot b3)}{a1 \cdot (a2 \cdot b4 - a1 \cdot b5)}$$

$$ff2 := \frac{-a2 \cdot (a4 \cdot b5 - a2 \cdot b2)}{a1 \cdot (a2 \cdot b4 - a1 \cdot b5)} - \frac{a3}{a1}$$

$$ff3 := \frac{a2^2 \cdot b1}{a1 \cdot (a2 \cdot b4 - a1 \cdot b5)} - \frac{a4}{a1}$$

$$ff4 := ff1 \cdot (A1^5 + 5 \cdot A1 \cdot B1^4 - 10 \cdot A1^3 \cdot B1^2) + ff2 \cdot (A1^3 - 3 \cdot A1 \cdot B1^2) + ff3 \cdot A1$$

$$ff5 := ff1 \cdot (10 \cdot A1^2 \cdot B1^3 - 5 \cdot A1^4 \cdot B1 - B1^5) + ff2 \cdot (B1^3 - 3 \cdot A1^2 \cdot B1) - ff3 \cdot B1$$

$$K11(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot (ff4 \cdot \cos(B1 \cdot z) + ff5 \cdot \sin(B1 \cdot z))$$

$$K12(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot (ff4 \cdot \sin(B1 \cdot z) - ff5 \cdot \cos(B1 \cdot z))$$

$$K13(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot (-ff4 \cdot \cos(B1 \cdot z) + ff5 \cdot \sin(B1 \cdot z))$$

$$K14(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot (-ff4 \cdot \sin(B1 \cdot z) - ff5 \cdot \cos(B1 \cdot z))$$

$$ff6 := \left[ff1 \cdot (\sqrt{-k4})^5 + ff2 \cdot (\sqrt{-k4})^3 + ff3 \cdot (\sqrt{-k4}) \right]$$

$$K15(z) := ff6 \cdot e^{\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$K16(z) := -ff6 \cdot e^{-\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$ff7 := s1 \cdot (A1^2 - B1^2) + s2 + s3 \cdot (A1 \cdot ff4 + B1 \cdot ff5)$$

$$ff8 := 2 \cdot A1 \cdot B1 \cdot s1 - s3 \cdot (A1 \cdot ff5 - B1 \cdot ff4)$$

$$ff9 := s1 \cdot (-k4) + s2 + s3 \cdot (ff6 \cdot \sqrt{-k4})$$

$$K31(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot (ff7 \cdot \cos(B1 \cdot z) - ff8 \cdot \sin(B1 \cdot z))$$

$$K32(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot (ff7 \cdot \sin(B1 \cdot z) + ff8 \cdot \cos(B1 \cdot z))$$

$$K33(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot (ff7 \cdot \cos(B1 \cdot z) + ff8 \cdot \sin(B1 \cdot z))$$

$$K34(z) := -e^{-A1 \cdot z} \cdot (-ff7 \cdot \sin(B1 \cdot z) + ff8 \cdot \cos(B1 \cdot z))$$

$$K35(z) := ff9 \cdot e^{\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$K36(z) := ff9 \cdot e^{-\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$dK11(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot [(ff4 \cdot A1 + ff5 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z) + (ff5 \cdot A1 - ff4 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z)]$$

$$dK12(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot [(ff4 \cdot A1 + ff5 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z) - (ff5 \cdot A1 - ff4 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z)]$$

$$dK13(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot [(ff4 \cdot A1 + ff5 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z) + (-ff5 \cdot A1 + ff4 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z)]$$

$$dK14(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot [(ff4 \cdot A1 + ff5 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z) + (ff5 \cdot A1 - ff4 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z)]$$

$$dK15(z) := \sqrt{-k4} \cdot ff6 \cdot e^{\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$dK16(z) := \sqrt{-k4} \cdot ff6 \cdot e^{-\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$dK21(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot (A1 \cdot \cos(B1 \cdot z) - B1 \cdot \sin(B1 \cdot z))$$

$$dK22(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot (A1 \cdot \sin(B1 \cdot z) + B1 \cdot \cos(B1 \cdot z))$$

$$dK23(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot (-A1 \cdot \cos(B1 \cdot z) - B1 \cdot \sin(B1 \cdot z))$$

$$dK24(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot (-A1 \cdot \sin(B1 \cdot z) + B1 \cdot \cos(B1 \cdot z))$$

$$dK25(z) := \sqrt{-k4} \cdot e^{\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$dK26(z) := -\sqrt{-k4} \cdot e^{-\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$dK31(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot [(ff7 \cdot A1 - ff8 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z) - (ff8 \cdot A1 + ff7 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z)]$$

$$dK32(z) := e^{A1 \cdot z} \cdot [(ff7 \cdot A1 - ff8 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z) + (ff8 \cdot A1 + ff7 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z)]$$

$$dK33(z) := e^{-A1 \cdot z} \cdot [(-ff7 \cdot A1 + ff8 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z) - (ff8 \cdot A1 + ff7 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z)]$$

$$dK34(z) := -e^{-A1 \cdot z} \cdot [(ff7 \cdot A1 - ff8 \cdot B1) \cdot \sin(B1 \cdot z) + (-ff8 \cdot A1 - ff7 \cdot B1) \cdot \cos(B1 \cdot z)]$$

$$dK35(z) := \sqrt{-k4} \cdot ff9 \cdot e^{\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$dK36(z) := -\sqrt{-k4} \cdot ff9 \cdot e^{-\sqrt{-k4} \cdot z}$$

$$D11(z) := \frac{C13}{C11} \cdot jj \cdot K11(z) + \frac{C33}{C11} \cdot dK21(z) + dK31(z)$$

$$D12(z) := \frac{C13}{C11} \cdot jj \cdot K12(z) + \frac{C33}{C11} \cdot dK22(z) + dK32(z)$$

$$D13(z) := \frac{C13}{C11} \cdot jj \cdot K13(z) + \frac{C33}{C11} \cdot dK23(z) + dK33(z)$$

$$D14(z) := \frac{C13}{C11} \cdot jj \cdot K14(z) + \frac{C33}{C11} \cdot dK24(z) + dK34(z)$$

$$D15(z) := \frac{C13}{C11} \cdot jj \cdot K15(z) + \frac{C33}{C11} \cdot dK25(z) + dK35(z)$$

$$D16(z) := \frac{C13}{C11} \cdot jj \cdot K16(z) + \frac{C33}{C11} \cdot dK26(z) + dK36(z)$$

$$D21(z) := \frac{C55}{C11} \cdot (dK11(z) - jj \cdot K21(z))$$

$$D22(z) := \frac{C55}{C11} \cdot (dK12(z) - jj \cdot K22(z))$$

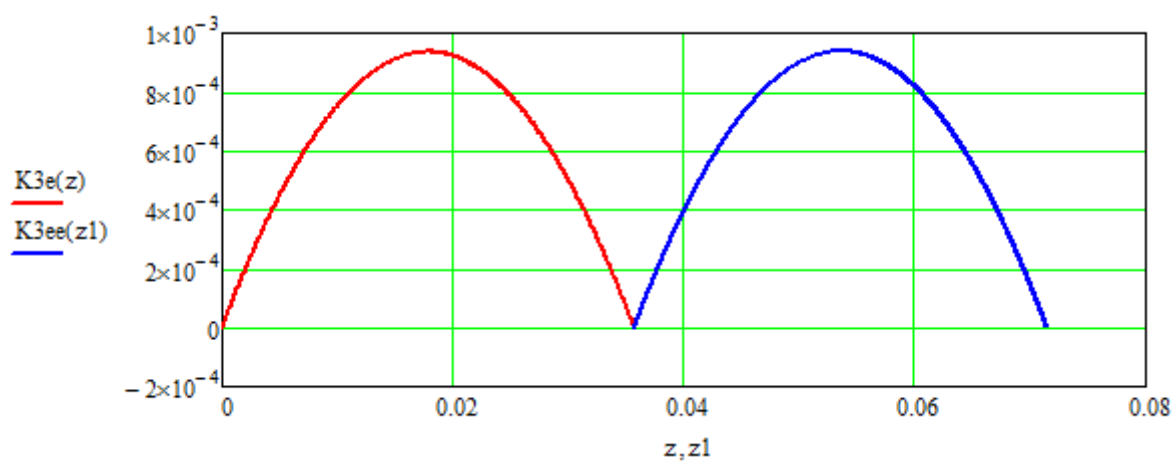
$$D23(z) := \frac{C55}{C11} \cdot (dK13(z) - jj \cdot K23(z))$$

$$D24(z) := \frac{C55}{C11} \cdot (dK14(z) - jj \cdot K24(z))$$

$$D25(z) := \frac{C55}{C11} \cdot (dK15(z) - jj \cdot K25(z))$$

$$D26(z) := \frac{C55}{C11} \cdot (dK16(z) - jj \cdot K26(z))$$

$$BBB := \begin{pmatrix} D12(0) & D13(0) & D14(0) & D15(0) & D16(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D22(0) & D23(0) & D24(0) & D25(0) & D26(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K32(0) & K33(0) & K34(0) & K35(0) & K36(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D12(h1) & D13(h1) & D14(h1) & D15(h1) & D16(h1) & -D11(h1) & -D12(h1) & -D13(h1) & -D14(h1) & -D15(h1) & -D16(h1) \\ D22(h1) & D23(h1) & D24(h1) & D25(h1) & D26(h1) & -D21(h1) & -D22(h1) & -D23(h1) & -D24(h1) & -D25(h1) & -D26(h1) \\ K32(h1) & K33(h1) & K34(h1) & K35(h1) & K36(h1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K12(h1) & K13(h1) & K14(h1) & K15(h1) & K16(h1) & -K11(h1) & -K12(h1) & -K13(h1) & -K14(h1) & -K15(h1) & -K16(h1) \\ K22(h1) & K23(h1) & K24(h1) & K25(h1) & K26(h1) & -K21(h1) & -K22(h1) & -K23(h1) & -K24(h1) & -K25(h1) & -K26(h1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K31(h1) & K32(h1) & K33(h1) & K34(h1) & K35(h1) & K36(h1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D11(h) & D12(h) & D13(h) & D14(h) & D15(h) & D16(h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D21(h) & D22(h) & D23(h) & D24(h) & D25(h) & D26(h) \end{pmatrix}$$



$$K3e(h) = 4.744 \times 10^{-6}$$

$$\lambda := \lambda_{11}$$

Частота собственных колебаний

$$\omega := \frac{\lambda}{bb} \cdot \sqrt{\frac{C11}{\rho1}}$$

$$\omega = 6.963 \times 10^4$$

$$\omega\omega := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$\omega\omega = 1.108 \times 10^4$$