

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева

Кафедра математического моделирования в механике

На правах рукописи



ЖАББАРОВ РАМИЛЬ МУРИТОВИЧ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ М. УИЛЬЯМСА:
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АСПЕКТ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Специальность: 1.1.8 – *Механика деформируемого твердого тела*

Научный руководитель:

Степанова Лариса Валентиновна

доктор физико-математических

наук, доцент

Самара - 2022

Оглавление

Введение	5
1 Аналитические методы определения напряженно-деформированного состояния у переднего края трещины, разреза или углового выреза	23
1.1 Фундаментальные положения и результаты континуальной теории разрушения	23
1.2 Многопараметрическое разложение М. Уильямса	29
1.3 Канонический формализм Колосова—Мусхелишвили	31
1.4 Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния в образцах различной конфигурации с трещинами и формами нагружений	33
1.4.1 Бесконечная пластина, ослабленная центральным разрезом	34
1.4.2 Нормальный отрыв бесконечной плоскости с двумя горизонтальными разрезами	44
1.4.3 Нагружение поперечным сдвигом бесконечной пластины с двумя коллинеарными горизонтальными разрезами	51
1.4.4 Смешанное деформирование (нормальный отрыв и поперечный сдвиг) бесконечной плоскости с двумя коллинеарными горизонтальными разрезами	55
1.4.5 Бесконечная пластина, ослабленная центральной трещиной, расклинивающейся двумя противоположно направленными сосредоточенными силами	61

1.4.6	Бесконечная пластина, ослабленная двумя боковыми надрезами, под действием двух противоположно направленных, действующих по вертикальной оси сосредоточенных сил	64
1.4.7	Напряженное состояние бесконечной линейно упругой плоскости, ослабленной краевым полубесконечным разрезом, находящимся под действием двух противоположно направленных сосредоточенных сил	70
1.4.8	Деформирование бесконечной плоскости, ослабленной двумя краевыми полубесконечными разрезами, к берегам которых приложены пары противоположно направленных сосредоточенных сил	73
1.4.9	Бесконечная пластина, ослабленная полубесконечной трещиной, с жестким плоским включением	76
1.5	Выводы и обсуждение результатов Главы 1	83
2	Экспериментальное определение масштабных коэффициентов ряда Уильямса для образцов с трещинами	85
2.1	Основной закон фотоупругости – закон Вертгейма	88
2.2	Процедура тарировки	89
2.3	Переопределенный метод для вычисления параметров механики разрушения	92
2.4	Выявление наиболее темных точек интерференционной картины — построение скелетона изохроматических полос	95
2.5	Обработка интерференционных картин, полученных в ходе натуральных фотоупругих экспериментов	98
2.6	Пластина с центральной трещиной	99

2.7	Пластина с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами равной длины	102
2.8	Пластина с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины	105
2.9	Пластина с центральной наклонной трещиной под углом 135 градусов	108
2.10	Пластина с одним краевым надрезом	111
2.11	Пластина с двумя боковыми надрезами	113
2.12	Пластина с двумя боковыми наклонными надрезами	116
2.13	Выводы по Главе 2	117
3	Конечно-элементное восстановление разложения Макса Уильямса полей, ассоциированных с вершиной трещины	119
3.1	Численный расчет коэффициентов разложения Макса Уильямса	119
3.2	Пластина с центральной наклонной трещиной (смешанное нагружение образца с трещиной)	142
3.3	Пластина с центральной трещиной с размерами, аналогичными натурному эксперименту	166
3.4	Пластина, ослабленная двумя трещинами одинаковой длины, с размерами, аналогичными размерам в натурном эксперименте и ряд других конфигураций	168
3.5	Выводы по Главе 3	173
4	Аппроксимация результатов серии конечно-элементных вычислений для моделей с трещинами	174
4.1	Аппроксимационные формулы для масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с центральной трещиной . . .	175

4.2	Аппроксимационные формулы для масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с одним боковым надрезом . . .	177
4.3	Аппроксимационные для формулы масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с двумя боковыми надрезами .	178
4.4	Аппроксимационные для формулы для масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с центральной наклонной трещиной	180
4.5	Современные тенденции механики разрушения в машиностроении	182
4.5.1	Методика оценки скорости усталостного распространения трещины (оценка ресурса трубопроводов нефтегазовой отрасли)	188
4.5.2	Цифровая модель распространения трещины в компактном образце	190
4.6	Выводы по Главе 4	197
	Заключение	198
	Литература	200
	Приложение А. Акты о внедрении результатов	226
	Приложение Б. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ	231

Введение

Асимптотическая структура полей перемещений и напряжений у переднего края трещины

Анализ структуры распределения напряжений и перемещений у переднего края поверхности разрыва (трещины, выреза или надреза) являлся и является одной из исконных проблем современной математической теории трещин и представляет фундаментальный интерес [34, 55, 64, 97, 98, 144, 181–183]. Несмотря на основополагающие теоретические и экспериментальные результаты, полученные при изучении процессов и явлений хрупкого и вязкого разрушения, и огромное количество работ, посвященных анализу напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины в различных средах, многие аспекты остаются открытыми и до сих пор требуют скрупулезного анализа [64, 144, 150]. Более того, появляющиеся в самое последнее время многосторонние возможности численного анализа [96, 111, 113, 121, 145, 188] и новые средства цифровой обработки экспериментальных данных [137, 141, 179] открывают принципиально новые возможности для исследования структуры распределения перемещений и напряжений в окрестности вершины дефекта. Настоящая диссертационная работа посвящена проблемам идентификации масштабных (амплитудных) множителей в разложении М. Уильямса полей перемещений и напряжений перед вершиной трещины или разреза в изотропном линейно упругом теле. Вопросы определения напряженно-деформированного состояния вокруг кончика трещины (надреза или разреза) в изотропном линейно упругом материале вызывали и вызывают пристальное внимание и глубокий интерес научных сообществ российских и зарубежных ученых. Важнейшие результаты механики разрушения для линейно упругих сред были по-

лучены А. Гриффитсом [89, 90], С. Инглисом [97], Н.И. Мусхелишвили [34], Г.П. Черепановым [55], Е.М. Морозовым [32, 33, 39, 40], Е.М. Морозовым и Я.Б. Фридманом [31], В.З. Партоном [35–37], Л.М. Качановым [17], Х.М. Вестергаардом [181], Дж. Р. Ирвином [98], Р. Сэнфордом [148, 149], М.Л. Уильямсом [182, 183].

Американский ученый М.Л. Уильямс (1922-2013) [182, 183], фактически явился предтечей использования процедуры метода разложения по собственным функциям (МРСФ) в механике разрушения. Он впервые представил технику МРСФ для анализа разрушения и выявил свойства сингулярного поля напряжений у вершины трещины, которые проявляют особенность вида $1/\sqrt{r}$ вблизи вершины трещины.

Для трещины, лежащей на отрицательной части оси абсцисс, с началом системы координат в вершине трещины, Макс Уильямс ввел в рассмотрение процедуру разложения по собственным функциям, предписывая разыскивать функцию напряжений Эри $\Phi(r, \theta)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению, в форме

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \lambda) = r^{\lambda+1} \{ & c_1 \sin[(\lambda + 1)\theta] + c_2 \cos[(\lambda + 1)\theta] + \\ & + c_3 \sin[(\lambda - 1)\theta] + c_4 \cos[(\lambda - 1)\theta] \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине рассматриваемой трещины или выреза, λ – собственное значение возникающей задачи на собственные значения, c_i – постоянные интегрирования бигармонического уравнения, подлежащие определению.

Выполнение краевых условий отсутствия поверхностных сил на берегах трещины $\theta = \pm\pi$ приводит к выражению для собственного значения λ

$$\lambda_n = n/2 \quad (n - \text{положительное целое число}). \quad (2)$$

В [182, 183] найдено, что четная $\Phi_e(r, \theta)$ и нечетная $\Phi_o(r, \theta)$ части функ-

ции напряжений Эри представляются выражениями

$$\begin{aligned} \Phi_e(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} a_{2n-1} r^{n+1/2} \left[-\cos \left(n - \frac{3}{2} \right) \theta + \frac{2n-3}{2n+1} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] + \right. \\ \left. + (-1)^n a_{2n} r^{n+1/2} \left[-\cos \left(n - \frac{3}{2} \right) \theta + \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_o(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} b_{2n-1} r^{n+1/2} \left[\sin \left(n - \frac{3}{2} \right) \theta - \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] + \right. \\ \left. + (-1)^n b_{2n} r^{n+1/2} \left[-\sin \left(n - \frac{3}{2} \right) \theta + \frac{2n-3}{2n+1} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Четная часть функции напряжений $\Phi_e(r, \theta)$ соответствует симметричной относительно линии продолжения трещины $\theta = 0$ деформации образца с трещиной, тогда как нечетная часть $\Phi_o(r, \theta)$ отвечает антисимметричной деформации.

Далее подход Уильямса был обобщен Сихом и Либовцем [29], которые вывели более общее асимптотическое представление полей, ассоциированных с кончиком трещины, используя канонический формализм Колосова–Мусхелишвили [34].

Для плоской задачи теории упругости Н.И. Мусхелишвили [34] показал, что функция напряжений Эри может быть представлена в терминах комплексной переменной z комплексными потенциалами Колосова–Мусхелишвили в форме:

$$\begin{aligned} \Phi &= \operatorname{Re} F(z), & F(z) &= \bar{z}\varphi(z) + \chi(z), \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2 \left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi'(z) \right], \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi(z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi'(z) = d\varphi/dz$, $\chi'(z) = d\chi/dz$, μ – модуль сдвига, κ – постоянная плоской задачи теории упругости.

В случае смешанного нагружения комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\chi(z)$

могут быть представлены с помощью соотношений

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^1 + ia_n^2) z^{\lambda_n}, \quad \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^1 + ib_n^2) z^{\lambda_n+1}, \quad (6)$$

где коэффициенты $a_n^1, a_n^2, b_n^1, b_n^2$ – вещественны.

Поскольку берега трещины должны быть свободны от нагрузок

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \theta = \pm\pi, \quad (7)$$

то справедливо соотношение

$$\lambda_n = n/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

и, следовательно, имеют место равенства

$$-b_n^1 = \frac{n/2 + (-1)^n}{n/2 + 1} a_n^1, \quad -b_n^2 = \frac{n/2 - (-1)^n}{n/2 + 1} a_n^2. \quad (9)$$

Полученные соотношения (8), (9) позволяют найти полное разложение полей перемещений и напряжений вокруг границы трещины [104–106]

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} \left\{ a_n^1 \left[\left(\varkappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] - a_n^2 \left[\left(\varkappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right\}, \quad (10)$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} \left\{ a_n^1 \left[\left(\varkappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] + a_n^2 \left[\left(\varkappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right\}, \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a_n^1 \left[\left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \alpha_n \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \beta_n \theta \right] - a_n^2 \left[\left(2 + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \alpha_n \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \beta_n \theta \right] \right\}, \quad (12)$$

$$\sigma_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a_n^1 \left[\left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \alpha_n \theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \beta_n \theta \right] - a_n^2 \left[\left(2 - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \alpha_n \theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \beta_n \theta \right] \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a_n^1 \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \beta_n \theta - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \alpha_n \theta \right] + \right. \\ \left. + a_n^2 \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \beta_n \theta - \left(\frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \alpha_n \theta \right] \right\}, \quad (14) \\ \alpha_n = n/2 - 1, \quad \beta_n = n/2 - 3. \end{aligned}$$

Коэффициенты лидирующих слагаемых компонент вектора перемещения (10), (11) и тензора напряжений (12)–(14), соответствующих $n = 1$, a_1^1 и a_1^2 связаны с коэффициентами интенсивности напряжений первой и второй мод нагружения (нормальным отрывом и поперечным сдвигом) равенствами:

$$a_1^1 = K_I / \sqrt{2\pi}, \quad a_1^2 = -K_{II} / \sqrt{2\pi}.$$

Хотя решение (10)–(14) не является решением в замкнутой форме, оно имеет широкий спектр применений. Это разложение в ряд широко используется для расчета коэффициентов интенсивности напряжений многих типов образцов, обычно используемых в механике разрушения.

Второе слагаемое в (12)–(14) отвечает однородному нормальному растягивающему напряжению $\sigma_x = T = 4a_2^1$, действующему в направлении плоскости трещины. Данное поле напряжений получило название T -напряжений. В течение длительного времени коэффициент интенсивности напряжений (КИН), который соответствует первому члену асимптотического поля у вершины трещины в представлениях (12)–(14), использовался в качестве единственного параметра разрушения для прогнозирования распространения трещины в хрупких материалах и материалах с ограниченной вязкостью. Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$ от полярного угла θ определяет направление распространения трещины (на основании критерия максимального окружного напряжения). За последние десятилетия появилось множество методов расчета КИН для различных практически и теоретически важных конфигураций и видов нагружения [129, 174].

В числе методов, позволяющих найти точные аналитические выражения для КИН, можно выделить методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) [93, 94, 153]. Техника ТФКП может быть применена только к достаточно простым задачам (для тел с простой конфигурацией и простой системой нагрузок), таким как центральная трещина в бесконечной линейно упругой пластине [93], две полубесконечные коллинеарные горизонтальные трещины в полосе [153], бесконечная пластина с боковыми разрезами с приложенными парами сосредоточенных сил [94], бесконечная пластина с двумя коллинеарными горизонтальными трещинами [170]. Среди полуаналитических методов коллокационный метод граничных элементов [87] долгое время был основным. В последние годы для определения КИН последовательно использовались метод граничных элементов [63] и другие численные методы, основанные на разложении Уильямса [91, 107]. В [63] Алиабади подробно рассказал об исторических разработках метода граничных элементов для механики разрушения. Было упомянуто [63], что применение метода граничных элементов к задачам механики разрушения началось с 1970-х годов. Основная характеристика метода граничных элементов концептуально заключается в том, что аналитический подход к решению осуществляется путем введения весовых функций, называемых фундаментальными решениями, которые удовлетворяют определяющему уравнению задачи.

Численные методы позволяют оценить КИН в большинстве задач для тел с несовершенствами (с трещинами, надрезами и вырезами). Для вычисления КИН широко используется традиционный метод конечных элементов [50, 121, 190]. Благодаря своей гибкости МКЭ используется повсеместно при анализе задач механики разрушения [96, 111, 113]. Тем не менее, у МКЭ есть некоторые недостатки, например, методы повторного разбиения на конечные элементы (для растущей трещины) для прогнозирования

распространения трещин, которые привели к появлению расширенного метода конечных элементов (XFEM). Для обеспечения точности результатов обычно требуются весьма мелкая сетка и специальные сингулярные элементы.

В целом, в настоящее время для расчета КИН широко применяются несколько классов численных методов, таких как метод конечных элементов, расширенный метод конечных элементов, метод граничных элементов. Тем самым, подытоживая, можно резюмировать, что на сегодняшний день численные методы, такие как метод конечных элементов, расширенный метод конечных элементов и метод граничных элементов, стали важными инструментами для широкого спектра приложений в механике разрушения.

Тем не менее, методы расчета КИН до сих пор представляют собой актуальную многоаспектную задачу современной континуальной теории разрушения и привлекают внимание представителей многих научных школ [50, 70, 71, 117, 118, 121, 150, 170, 190]. Однако, исследования, проведенные в последние 5-10 лет показали ясную и насущную необходимость сохранения в представлении М. Уильямса регулярных (неособых) слагаемых высоких порядков [70, 71, 117–119, 170, 184].

Многокомпонентное разложение М. Уильямса

Классическая линейная механика упругого разрушения, безусловно, является наиболее распространенным инструментом для оценки поведения разрушения различных конструкций и материалов. Классическая механика разрушения рассматривает КИН как единственный параметр, выражающий амплитуду поля напряжений у устья трещины и контролирующий (не)стабильный рост трещины. Данная хорошо известная теория предложена для хрупких материалов и достаточно подробно описана в целом ряде

монографий и периодических изданий [17, 32, 144, 150]. Тем не менее, существуют материалы, в которых разрушение происходит не только вблизи вершины трещины (и в непосредственной близости от нее), но и в большей зоне перед трещиной. Для таких материалов было показано [117–119] что так называемый многопараметрический подход для аппроксимации полей напряжений и смещений у вершины трещины, зиждущийся на сохранении регулярных (неособых) слагаемых высокого порядка в ряде Уильямса, может помочь лучше выразить распределение напряжений, по сравнению с использованием только одного или двух параметров в разложении Уильямса (как это происходит в большинстве случаев).

Кроме того, сложные процессы разрушения в квазихрупких материалах происходят не только в непосредственной близости от вершины трещины (вершину трещины практически невозможно различить), и поэтому поле напряжений/смещений должно быть известно на большом расстоянии от нее. Как следствие, при анализе разрушения необходимо учитывать не только первый (сингулярный) член аппроксимации Уильямса асимптотического поля у вершины трещины [117–119], но и другие (более высокого порядка) члены.

В целой серии работ [70, 71, 76, 84, 106, 118, 119, 125, 127, 130, 160, 167, 169] было обнаружено, что члены более высокого порядка степенного разложения Уильямса, полученные для описания поля напряжений/смещений в образце с несовершенствами (трещина, надрез), играют ключевую роль, если требуется знание точных полей напряжений/смещений не только очень близко к вершине трещины, а на удалении от нее. Количество членов более высокого порядка, необходимых для точного описания поля напряжений и перемещений внутри тела с трещиной, зависит от размера рассматриваемой области; исследования показывают, что, вне всякого сомнения, следует принимать во внимание более одного или двух слагаемых ряда [117–119],

которые обычно используются в качестве хорошо известной одно- или двух-параметрической механики разрушения. Например, в случае квазихрупких материалов, где распределение напряжений должно быть известно также дальше от вершины трещины, использование членов ряда Уильямса более высокого порядка может способствовать более точному и надежному анализу разрушения и прогнозированию поведения конструкции.

Актуальность работы

За последние два десятилетия сложилось четкое и ясное представление о необходимости многопараметрической аппроксимации для моделирования полей напряжений и перемещений в окрестности трещины [66, 127, 130, 138–140]. В целом ряде исследований подчеркивается, что использование многопараметрических разложений поля напряжений – это не просто академическое любопытство, а – практическая необходимость применения концепций механики разрушения для решения реальных жизненных проблем. Кроме того, показано [138], что многопараметрическое решение позволяет собирать экспериментальные данные из большей зоны, что помогает упростить сбор данных из экспериментов. Когда пытаются применить для решения реальных задач только первый член (сингулярное решение) этих многопараметрических уравнений, получаются ошибочные результаты [66, 127, 130, 138–140].

Роль и значение высших приближений в аппроксимирующем поле напряжений ряде Уильямса отчетливо и явственно проявляется при обработке всей совокупности экспериментальных данных, нацеленной на определение механических полей впереди устья трещины, надреза и выреза [66, 127, 130, 138–140, 158]. Реконструкция асимптотической аппроксимации М. Уильямса поля напряжений и поля перемещений вокруг кончика трещины с помощью интерференционно-оптических методов снискала большую популярность в последнее время [95, 100–103, 127, 128, 137, 142, 163–167].

Зачастую анализируемые экспериментальные точки из интерференционных картин и число удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса выбираются без должного теоретического обоснования. По всей видимости, впервые мысль об оперировании высшими приближениями в аппроксимации М. Уильямса была отточена в связи с насущной необходимостью корректной и аккуратной обработки экспериментальных точек, взятых из интерференционных картин изохроматических полос, получаемых методом фотоупругости [83]. Именно задачи правильной обработки картин изохроматических полос в окрестности вершин разрезов, трещин и угловых вырезов привели к устремлению сохранить слагаемые высших порядков [133, 138, 139]. Именно оперирование многокомпонентной аппроксимацией М. Уильямса принудило выработать основы и отточить процедуры переопределенного метода, нацеленного на вычисление амплитудных (масштабных) коэффициентов ряда Макса Уильямса. Успехи в экспериментальном определении масштабных множителей (чаще всего с помощью метода цифровой фотоупругости) переопределенным методом инициировали приложение переопределенного метода к данным, взятым из результатов конечно-элементного эксперимента.

Признание значимости и роли неособых слагаемых в ряде Уильямса привело исследователей к учету эффекта высших приближений, и за последние два десятилетия были разработаны методы нахождения многопараметрических рядов, ассоциированных с полями перемещений и напряжений [20, 110]. Тем не менее, невзирая на то, что данная концепция уже довлеет в теории хрупкого разрушения и прочно укоренилась в экспериментальной механике, многие вопросы остаются открытыми. К таким вопросам относятся: определение количества слагаемых, подлежащих удержанию в ряде Уильямса, на основании строгих теоретических решений механики сплошных сред (математической теории упругости и континуаль-

ной теории разрушения); выяснение общих закономерностей при усечении аппроксимирующего ряда Уильямса; формулировка критериев (рекомендаций) для выбора усеченных разложений для различных конфигураций тел с трещинами; экспериментальная проверка и обоснование этих теоретических гипотез относительно числа удерживаемых слагаемых; апробация рекомендаций и критериев на основе широкого вычислительного конечно-элементного эксперимента; получение общих аппроксимирующих формул для вычисления амплитудных (масштабных) коэффициентов асимптотического разложения Макса Уильямса. Вопросам такого моделирования посвящена настоящая диссертация.

Цели и задачи исследования

Одним из важных вопросов в области анализа и проектирования конструкций является наличие трещин, поскольку у вершины трещины напряжения и деформации сильно увеличиваются и образуется зона концентрации напряжений. Кроме того, они приводят к снижению статической прочности конструкции. Механика разрушения в настоящее время является хорошо зарекомендовавшей себя дисциплиной, включающей широкий спектр методологий, которые помогают инженерам в проектировании и обслуживании элементов и деталей ответственных и конструкций. Увеличение напряжений и деформаций вблизи вершины трещины может быть определено с использованием коэффициентов интенсивности напряжений в задачах, связанных с механикой разрушения. Наличие трещин увеличивает время и усилия, затрачиваемые на ремонт/техническое обслуживание ответственных элементов. Поскольку трещины не могут быть устранены, необходимо разработать процедуру для количественной оценки и прогнозирования поведения компонентов/конструкций с трещинами в условиях эксплуатации. Необходимо планировать систематические научные процедуры для харак-

теристики трещин и последствий их распространения в деформируемых телах. В настоящее время развитие вычислительных разработок в области интерактивных численных методов позволяет аналитикам более доступно определять явления разрушения при выполнении инженерных анализов.

Целью настоящей диссертационной работы является теоретический, экспериментальный и численный анализ поля напряжений вблизи поверхности разрыва (переднего края трещины или надреза) в изотропном линейно упругом материале на основе многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса с удержанием регулярных (неособых) слагаемых высокого порядка.

Задачами исследования являются:

1) теоретическое сопоставление различных конфигураций тел с трещинами, допускающих аналитическое решение задачи отыскания напряженно-деформированного состояния у вершины дефекта, с целью выявления зависимости числа удерживаемых слагаемых от расстояния до устья трещины и анализ вклада высших приближений в описание полей перемещений и напряжений, ассоциированных с вершиной трещины;

2) проведение цикла экспериментальных исследований с помощью интерференционно-оптических методов механики деформируемого твердого тела (методики цифровой фотоупругости) для новых конфигураций образцов, предназначенных для изучения проблем смешанного нагружения тел с трещинами;

3) разработка и применение цифрового приложения, нацеленного на цифровую обработку всей совокупности экспериментальных данных, получаемых методом фотоупругости;

4) численное определение амплитудных (масштабных) параметров ряда М. Уильямса с удержанием неособых слагаемых высших порядков на основе переопределенного метода, базирующегося на поле напряжений.

5) получение аппроксимационных формул для вычисления параметров разрушения – коэффициентов разложения М. Уильямса, содержащего слагаемые более высоких порядков.

Положения, выносимые на защиту

1) Теоретическое сопоставление асимптотических распределений напряжений у вершин надрезов и трещин, полученных с помощью усеченных на разном количестве слагаемых рядов М. Уильямса, и сравнение их с точными аналитическими решениями, построенными посредством теории функции комплексного переменного, и анализ вклада высших приближений в описание полей напряжений и перемещений, ассоциированных с вершиной трещины. Выявленные закономерности зависимости количества удерживаемых слагаемых от расстояния до вершины трещины.

2) Цикл экспериментальных исследований, проведенных с помощью метода цифровой фотоупругости, для новых конфигураций образцов, предназначенных для изучения проблем нормального отрыва и смешанного нагружения (образцы с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, образцы с одним боковым и двумя боковыми горизонтальным надрезами, образцы с двумя боковыми наклонным надрезами) и экспериментальное определение коэффициентов ряда Уильямса с учетом неособых слагаемых высшего порядка.

3) Разработка и применение нового цифрового приложения, нацеленного на цифровую обработку всей совокупности экспериментальных данных, получаемых методом фотоупругости (построение скелетона картин изохроматических полос и запись в текстовый файл координат точек с наименьшей освещенностью, принадлежащих изохроматическим полосам различных порядков).

4) Численное определение амплитудных (масштабных) параметров ряда М. Уильямса с удержанием неособых слагаемых высших порядков на ос-

нове переопределенного метода, базирующегося на поле напряжений, найденного методом конечных элементов в многофункциональном расчетном комплексе SIMULIA Abaqus, для серии образцов с размерами и системами нагружений, идентичным рассмотренным в натурном эксперименте.

5) Аппроксимационные формулы для вычисления параметров механики разрушения – амплитудных (масштабных) коэффициентов разложения М. Уильямса, содержащего слагаемые более высоких порядков, для широкой серии образцов.

6) Усовершенствованная методика оценки усталостного роста трещины на основе размаха функции плотности энергии упругой деформации. Реализация методики расчета постоянных обобщенного закона Париса на основе функции плотности энергии упругой деформации, учитывающей мультипараметрическое разложение М. Уильямса.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) Впервые проведен сопоставительный теоретический анализ вклада слагаемых высокого порядка малости в асимптотическом разложении М. Уильямса. Показано, что область действия разложения М. Уильямса может быть существенно расширена за счет увеличения числа удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса.

2) Разработана и применена новая программа цифровой обработки данных, получаемых методом фотоупругости, позволяющая с высокой точностью найти точки изохроматических полос с наименьшей освещенностью.

3) Получены аппроксимационные формулы для вычисления параметров механики разрушения – амплитудных (масштабных) коэффициентов разложения М. Уильямса, содержащего слагаемые более высоких порядков.

4) Предложена усовершенствованная методика оценки усталостного ро-

ста трещины, основанная на учете многопараметрического ряда Уильямса.

Практическая значимость

Практическая ценность результатов диссертации заключается в том, что эти результаты связаны с разработкой эффективных методов решения одной из коренных проблем современной континуальной теории разрушения – задачи количественной оценки и прогнозирования поведения компонентов и конструкций с трещинами.

Методология и методы исследования

В диссертации используются аналитические, экспериментальные и численные (метод конечных элементов) методы построения асимптотического представления полей перемещений, деформаций и напряжений в плоских образцах с трещинами в условиях нормального отрыва и смешанного нагружения.

Степень достоверности полученных результатов

Степень достоверности полученных результатов подтверждается сравнением значений амплитудных множителей ряда М. Уильямса, найденных теоретически, экспериментально и численно методом конечных элементов для ряда конфигураций образцов с трещинами и надрезами; использованием классических математических методов механики сплошных сред: методы ТФКП, методы численного анализа (метод конечных элементов).

Основные публикации по теме диссертации

Результаты диссертационной работы отражены в 10 научных публикациях, из которых одна входит в список, рекомендованный Высшей Аттестационной Комиссией (ВАК) [14], и три индексируются библиографическими базами данных Scopus и WebofScience [168, 188, 189].

Апробация работы

Результаты работы докладывались на следующих международных и российских конференциях и семинарах:

1. 23 Европейская конференция по разрушению, 27 июня – 1 июля 2022, Фуншал, Мадейра, Португалия (the 23rd European Conference on Fracture – ECF23, 2022, June 27 – July 1, 2022, Funchal, Madeira, Portugal).

2. XVI Международная конференция памяти академика Эдуарда Степановича Горкунова "Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций", 16-20 мая 2022 г., Екатеринбург, Россия.

3. 1st Virtual European Conference on Fracture, VECF 2020, Virtual, Online, 29 июня – 01 июля 2020 года.

4. XXIX Всероссийская школа-конференция "Математическое моделирование в естественных науках", 07–09 октября 2020 года, Пермь, Россия.

5. XXVIII Всероссийская школа-конференция "Математическое моделирование в естественных науках", 2-5 октября 2019 года, Пермь, Россия.

6. Перспективные информационные технологии (ПИТ 2017), Международная научно-техническая конференция, 14–16 марта 2017 года, Самара, Россия.

Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ: Жаббаров Р.М. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022618998, 18.05.2022. Заявка №2022618077 от 21.04.2022.

Работа была поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №19-31-90100 и частично №19-01-00631).

Методика расчета результатов

Все численные результаты диссертации получены с помощью программ, написанных в системе символьных вычислений Waterloo Maple, и с помощью моделирования в МКЭ-пакете SIMULIA Abaqus, с лицензиями Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.

Структура и объем диссертации

Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, заключе-

ния, четырех приложений и списка литературы. Изложена на 231 странице, содержит 160 рисунков, 20 таблиц, 2 приложения. Список литературы включает 191 наименование.

Глава 1. Аналитические методы определения напряженно-деформированного состояния у переднего края трещины, разреза или углового выреза

1.1. Фундаментальные положения и результаты континуальной теории разрушения

Определение полей напряжений, ассоциированных с окрестностью вершины дефекта, в частности, у вершины острого края трещины, включения или острого выреза, является классической и в то же время актуальной проблемой континуальной механики разрушения [17, 32, 64, 112, 144, 146]. Для отыскания напряженно-деформированного состояния – полей напряжений, деформаций и перемещений – у переднего края поверхности разрыва применяются теоретические [1, 6, 9, 20, 26–28, 34, 42, 53, 59, 68, 83, 93, 93, 94, 104–106, 112, 114, 118, 119, 123, 146, 148, 149, 156, 176, 182, 186], численные [13, 20, 22, 23, 44, 45, 50–52, 57, 58, 61, 62, 65, 76–79, 84, 100, 127, 162, 181] и экспериментальные методы и подходы [2–5, 7, 10, 12, 13, 15, 18, 19, 21, 22, 24, 30, 38, 41, 43, 44, 46–50, 56, 66, 74–76, 78, 84, 85, 88, 92, 100–102, 109, 110, 112, 120, 122, 123, 128, 143, 152, 156, 161, 161, 165, 171, 173]. Классическая континуальная механика разрушения позволяет получить аналитические выражения для полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины, острого выреза или включения [34], [59] для сред, поведение которых представляется законом Гука. Аналитические подходы (методы ТФКП) дают возможность найти решения для простейших конфигураций тел с трещинами [34, 93, 94, 146, 148, 149, 181]. Однако замкнутые решения невозможно распространить на сложные конфигурации тел с дефектами со сложной системой нагрузок. В случае сложной конфигурации и систем нагружений анализ напряженно-деформированного состояния у поверхности разреза

эффективно достигается с помощью экспериментальных средств [66, 156] и использования численных методов и вычислительных технологий [143, 155]. Среди классических и новейших экспериментальных методов особенно выделяются интерференционно-оптические методы, чаще всего метод корреляции цифровых изображений [95, 145, 151], а также классические оптические методы: спекл-интерферометрия, цифровая голография и цифровая фотоупругость [141, 142, 156]. На сегодняшний день поляризационно-оптические методы особенно часто используются для задачи восстановления ряда Уильямса – проблемы отыскания коэффициентов многопараметрического ряда Уильямса [66, 128, 133, 160, 161, 163–165], который позволяет получить описание полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины дефекта. Долгое время, применяя экспериментальные подходы с целью определения напряженно-деформированного состояния, исследователи сводили свои задачи лишь к определению КИН [115], а позднее к искомым величинам добавились T -напряжения [26–28], являющиеся первыми регулярными слагаемыми многопараметрического разложения Уильямса. Вычисление T -напряжений дало значительное уточнение оценок всех искомым механических величин [26–28]. Сегодня вычислительные системы, зиждущиеся на методе конечных элементов, позволяют без дополнительных алгоритмов сразу определить T -напряжения [50, 84].

В большинстве случаев целью исследователя является экспериментальное и (или) численное определение параметров механики хрупкого разрушения, таких как КИН и T -напряжения [26–28] посредством наложения асимптотического решения М. Уильямса на экспериментально полученную интерференционную картину или численно полученные в ходе конечно-элементного моделирования распределения перемещений, напряжений и деформаций. В случае экспериментального извлечения параметров механики разрушения, независимо от применяемого поляризационно-оптического

метода, при выборе точек из экспериментально зафиксированной интерференционной картины, исследователь априори не знает, какое количество слагаемых аппроксимирующего ряда Уильямса необходимо учитывать для получения достоверного решения, поэтому учет недостаточного количества удерживаемых слагаемых в ряде Уильямса может являться причиной ошибок при обработке совокупности экспериментальной информации [50, 84]. Та же проблема присуща популярным на сегодня вычислительным техникам, зиждимым на методе конечных элементов, при которых искомые параметры механики разрушения определяются из конечно-элементных расчетов. Данный подход состоит в определении коэффициентов асимптотического ряда Уильямса из конечно-элементного решения задачи для тел с дефектами на основании переопределенного метода. Причиной ошибки может являться рассмотрение усеченного ряда без должного теоретического анализа.

Необходимость сохранения первых двух несингулярных слагаемых в асимптотическом ряде Уильямса для корректной оценки данных фотоупругого эксперимента показана в работе Шона, Ирвина и Шукла [83], на основании результатов которой можно сформулировать следующие положения: 1) картины изохроматических полос в окрестности вершины плоского дефекта являются удобным средством получения информации для их использования впоследствии для оценки напряженно-деформированного состояния; 2) применение трехпараметрической модели значительно расширяет область измерений, извлекая точки из которой можно получить точные значения параметров механики разрушения; 3) сохранение двух регулярных слагаемых значительно уменьшает разброс в расчетных значениях параметров для быстрорастущих трещин. Исключение неособых членов более высокого порядка способно повлечь за собой возникновение серьезных ошибок даже в небольших областях измерений; 4) компоненты

напряжений, включающие более чем два параметра, зачастую являются необходимыми для более качественного анализа фотоупругих данных.

Судя по всему, работа [83] стала мощным толчком для развития направления исследований в области механики хрупкого разрушения, касающейся роли регулярных (неособых) слагаемых в асимптотическом разложении Макса Уильямса с целью более точного представления полей перемещений и напряжений, ассоциированных с вершиной трещины. Сегодня понимание насущной необходимости сохранения высших приближений отражается во многих работах [68, 69, 130, 147].

Но при этом, многие авторы даже в более поздних работах в своих исследованиях учитывают в основном лишь два параметра, и, таким образом, вводится в рассмотрение разложение из двух членов ряда, описывающее поля напряжений, деформаций и перемещений. Ю.Г. Матвиенко приводит в своем исследовании [26] перспективные и современные методы анализа и критерии на основе двухпараметрического асимптотического ряда, воспроизводящего поля напряжений вокруг вершины трещиноподобного дефекта. Теоретические и экспериментальные подходы, приведенные в работе, основаны на сохранении регулярного слагаемого в разложениях полей напряжений и деформаций в окрестности вершины дефекта, что позволяет дать более точную оценку характера распространения трещины и спрогнозировать надежность рассматриваемого элемента конструкции.

Исследованию траектории распространения трещины посвящена работа [9], в рамках которой предложено учитывать T -напряжения и слагаемые более высокого порядка малости в асимптотическом представлении в окрестности вершины трещины. Авторами представлен преобразованный критерий разрушения, основанный на критерии максимального тангенциального напряжения, учитывающего T -напряжения у вершины трещины.

Авторами [25] предлагается исследование, состоящее из двух частей. В

рамках первой части изложен разработанный авторами модифицированный метод последовательного наращивания длины трещины (МПНДТ). Теоретические результаты, полученные авторами, стали основой для новой техники экспериментального определения механических параметров. Разработанный подход характеризуется комбинацией МПНДТ и интерференционно-оптических техник определения изменения деформаций при малом удлинении трещины. Основой для определения напряженно-деформированного состояния является учет двух слагаемых асимптотического разложения: лидирующего слагаемого с КИН и регулярного слагаемого — T -напряжения. Автором [23] предложена процедура определения регулярных слагаемых асимптотического разложения, аппроксимирующего поля напряжений и деформаций вокруг вершины трещины или надреза с минимизацией погрешностей искомым величин, возникших из-за неточности измеренных данных. Показано, что примененный МРСФ решения плоских задач для областей с двугранными углами позволяет экспериментально определить механические параметры с достаточной точностью даже при наличии высокой степени погрешности в эксперименте. В рамках данной работы [23] автор учитывает только T -напряжения.

Тырымовым А.А. [51, 52] представлены результаты исследований, посвященные вычислению регулярных слагаемых — T -напряжений в разложении механических величин в окрестности вершины центральной трещины в растягиваемой пластине с помощью графового метода.

Использование двухпараметрического асимптотического разложения Уильямса довольно распространено [28, 57, 58, 61] и даже появился термин двухпараметрическая механика разрушения [26].

Постепенно исследователи, занимающиеся анализом количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении, приходят к умозаключению о связи необходимого количества слагаемых для описа-

ния исходных экспериментальных данных, получаемых поляризационно-оптическими методами, с размерами исследуемой области. Независимые друг от друга исследования показывают, что для получения наиболее точных оценок параметров механики разрушения из экспериментальных данных необходимо удержание в разложении Уильямса высших приближений, если экспериментальные точки берутся из достаточно большой области [20, 110, 118, 119].

По всей видимости, первый детальный анализ напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины для образцов с несовершенствами различной конфигурации с использованием метода цифровой фотоупругости с учетом регулярных слагаемых был выполнен в диссертации [122]. Результатом работы [122] стало появление программного обеспечения, которое выполняет функцию утонения изохроматических полос, а также усиления яркости изображений с целью расширения области, из которой происходит выбор экспериментальных точек. Судя по всему, в работе [122] впервые изучены смешанные формы деформирования в образце с двумя взаимодействующими дефектами. Также впервые в работе предложен метод линеаризации, в дальнейшем получивший название переопределенного метода. В 1997 году переопределенный метод достиг своего окончательного становления — его разработка была выполнена К. Рамешем [138] и описана в книге [139]. После 2000 г. многочисленные исследования, в особенности касающиеся приложений интерференционно-оптических методов к краевым задачам механики разрушения, посвящаются построению многокомпонентных асимптотических разложений Уильямса. В то же время сложилось четкое представление о необходимости учета слагаемых высокого порядка малости в асимптотическом представлении полей, ассоциированных с трещиной. Поэтому появилась насущная необходимость теоретического анализа вклада регулярных слагаемых в общее многопараметри-

ческое разложение М. Уильямса. Этим вопросам и посвящена настоящая диссертационная работа.

1.2. Многопараметрическое разложение М. Уильямса

М. Уильямсом [182, 183] было предложено ставшее на сегодня классическим асимптотическое представление полей напряжений $\sigma_{ij}(r, \theta)$ вокруг устья трещины или углового выреза в изотропной линейно упругой среде:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{m,ij}^{(k)}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1.1)$$

где введены следующие обозначения: $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ — универсальные угловые функции напряжений, получаемые из решения краевых задач о нагружении трещины нормальным отрывом и поперечным сдвигом; r, θ — полярные координаты, связанные с вершиной трещины; a_k^m — масштабные (амплитудные) множители, обуславливаемые геометрией рассматриваемой модели с дефектом и приложенными силами; индекс m характеризует вид нагружения и может принимать два значения: $m = 1$ для растяжения пластины, $m = 2$ для поперечного сдвига (рисунок 1.1).

Угловые распределения тензора напряжений $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ известны и находятся в ходе решения задач на собственные значения, следующих из краевой задачи для бигармонического уравнения [93, 94, 104–106]:

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= \frac{k}{2} \left[- \left(\frac{k}{2} + (-1)^k\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$f_{2,11}^{(k)}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right],$$

$$f_{2,22}^{(k)}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right],$$

$$f_{2,12}^{(k)}(\theta) = \frac{k}{2} \left[-\left(\frac{k}{2} - (-1)^k\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \right].$$

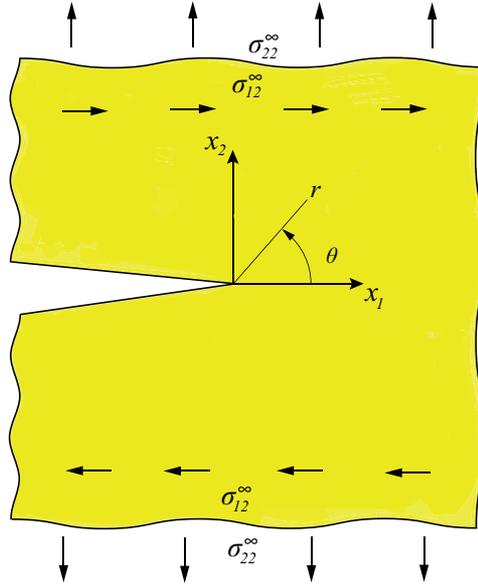


Рисунок 1.1 – Схематичное изображение модели пластины с трещиной под действием растягивающего и сдвигового нагружения (окрестность вершины трещины и системы координат, связанные с ней)

С помощью асимптотического ряда также можно описать компоненты вектора перемещений вблизи вершины разреза или трещины:

$$u_i(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m r^{k/2} g_{m,i}^{(k)}(\theta), \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} g_{1,1}^{(k)}(\theta) &= (\varkappa + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2)\theta - (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta, \\ g_{1,2}^{(k)}(\theta) &= (\varkappa - k/2 - (-1)^k) \sin(k/2)\theta + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \\ g_{2,1}^{(k)}(\theta) &= -(\varkappa + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2)\theta + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \\ g_{2,2}^{(k)}(\theta) &= (\varkappa - k/2 + (-1)^k) \cos(k/2)\theta + (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где для плоской задачи теории упругости константа κ принимает значение $3 - 4\nu$ в случае плоского деформированного состояния, либо $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ при плоском напряженном состоянии [49, 157, 158]. Радиальное и угловое распределения напряженно-деформированного состояния вблизи вершины дефекта носят универсальный характер и не зависят от конфигурации рассматриваемой модели и характера приложенной нагрузки — решение задач механики разрушения сводятся к отысканию коэффициентов a_k^m многопараметрического асимптотического ряда М. Уильямса [93]. Поскольку энергия деформации в окрестности вершины дефекта является конечной величиной и компоненты вектора перемещений ограничены, то в (1.1) справедливо отбросить слагаемые с индексом $k \leq 0$. Можно еще раз отметить понимание научным сообществом необходимости учета в разложении Уильямса (1.1) высших приближений, регулярных слагаемых более высокого порядка малости по сравнению с первыми двумя упомянутыми членами ряда Уильямса [130], о чем свидетельствуют работы последних 10-12 лет. Понимание необходимости учета 10-15 слагаемых многопараметрического ряда Уильямса имеет ключевое значение при осуществлении и обработке экспериментальных данных: в этом случае экспериментатору представляется важным иметь теоретическое обоснование количества удерживаемых слагаемых в ряде Уильямса. С этой целью можно обратиться к математическому аппарату ТФКП и решениям плоских задач теории упругости для тел с дефектами различной конфигурации.

1.3. Канонический формализм Колосова—Мусхелишвили

Классическая техника представления полей напряжений плоской задачи теории упругости с помощью комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили является и по сей день эффективным методом определения

напряженно-деформированного состояния в плоских образцах с дефектами [79, 94, 114, 124, 146]. Согласно плоской задаче теории упругости для полей напряжений и перемещений, затухающих в бесконечно удаленной точке, справедливы соотношения, базирующиеся на подходах ТФКП, носящие название классического представления Колосова—Мусхелишвили [6, 34, 59]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* &= 4\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)], \\ \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* &= 2[\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \chi^{*'}(z)], \\ 2\mu(u_1^* + iu_2^*) &= \kappa\varphi^*(z) - z\overline{\varphi^{*'}(z)} - \overline{\chi^*(z)},\end{aligned}\tag{1.5}$$

где обозначения соответствуют принятым в [6] обозначениям: $\varphi^{*'}(z)$, $\chi^{*'}(z)$ — комплексные потенциалы — функции комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, черта сверху означает знак комплексного сопряжения, μ — модуль сдвига, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν — коэффициент Пуассона. Условие симметрии задачи $\sigma_{12}^*(x_2 = 0) = 0$ можно удовлетворить, приняв $\chi^*(z) = \varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z)$. Решение задачи можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: растяжение плоскости без разреза напряжениями σ_{22}^∞ , действующими на бесконечности, и нагружение плоскости с трещиной длины $2a$ напряжениями $-\sigma_{22}^\infty$, приложенными к берегам разреза. Напряжения, отвечающие каждой из задач, обозначены через σ_{ij}^I и σ_{ij}^* соответственно. Следовательно, для компонент тензора напряжений справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{22}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{12}^* &= -2x_2\operatorname{Re}[\varphi^{*''}(z)].\end{aligned}\tag{1.6}$$

Для того чтобы найти функцию $\varphi^{*'}(z)$, необходимо сформулировать смешанную краевую задачу для верхней полуплоскости: действительная часть комплексного потенциала удовлетворяет условию $\operatorname{Re}[\varphi^{*'}] = -\sigma_{22}^\infty/2$ на берегах трещины $|x_1| < l, x_2 = 0$, а на остальной части действитель-

ной оси мнимая часть должна обращаться в нуль: $Im [\varphi^{*'}(z)] = 0$, $|x_1| > l$.
 Общая формула Штаермана [59] позволяет сформировать структуру решения сформулированной смешанной задачи теории аналитических функций для верхней полуплоскости. Предполагается, что на вещественной оси x_1 заданы n отрезков

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \quad (1.7)$$

на которых известны значения действительной части потенциала $\varphi^{*'}(z)$, а на остальной части оси x_1 мнимая часть комплексного потенциала $\varphi^{*'}(z)$ отсутствует, при этом на бесконечности компоненты тензора напряжений и вектора перемещений стремятся к нулю. Тогда в общей форме решение смешанной задачи для верхней полуплоскости можно представить в виде [34], [59]

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \int_{a_j}^{b_j} \sqrt{\left| \prod_{j=1}^n (t - a_j)(t - b_j) \right| \frac{\sigma_{22}^*(t) dt}{t - z}} + P_{n-1}(z)}{2\pi \sqrt{\prod_{j=1}^n (z - a_j)(z - b_j)}}, \quad (1.8)$$

где $P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ – многочлен, у которого все коэффициенты c_j являются вещественными. Формула (1.8) позволяет точно определить напряженно-деформированное состояние для плоских образцов с системами трещин.

1.4. Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния в образцах различной конфигурации с трещинами и формами нагружений

В настоящем параграфе рассматривается семь различных плоских конфигураций образцов с различными видами дефектов и мод нагружений. Для

всех рассматриваемых конфигураций имеются точные решения, представленные комплексными потенциалами Колосова–Мусхелишвили. На рисунке 1.2 изображены конфигурации образцов с дефектами, для которых канонический формализм Колосова–Мусхелишвили позволяет найти точные решения. Наличие точных решений дает возможность сравнения усеченных на разном количестве слагаемых асимптотических разложений компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины. Набор конфигураций, выбранных для рассмотрения в рамках настоящего исследования, показан на рисунке 1.2: 1) бесконечная пластина с центральной трещиной с приложенной распределенной растягивающей и сдвиговой нагрузками на бесконечности; 2) бесконечная пластина, ослабленная двумя параллельными трещинами в условиях нормального отрыва и поперечного сдвига; 3) бесконечная пластина с центральной трещиной под действием двух сосредоточенных противоположно направленных сил, приложенных к берегам трещины; 4) бесконечная пластина, ослабленная двумя боковыми разрезами, находящаяся под действием противоположно направленных сосредоточенных сил; 5) бесконечная пластина, ослабленная одним боковым разрезом, находящаяся под действием противоположно направленных сосредоточенных сил, приложенных на берегах трещины; 6) бесконечная пластина, ослабленная двумя симметричными относительно вертикальной оси боковыми надрезами, находящаяся под действием сосредоточенных сил, приложенных на берегах трещин; 7) бесконечная пластина с боковым жестким включением.

1.4.1. Бесконечная пластина, ослабленная центральным разрезом

Первая рассматриваемая конфигурация (рисунок 1.3) – бесконечная пластина, ослабленная центральным разрезом, – является хорошо изученной

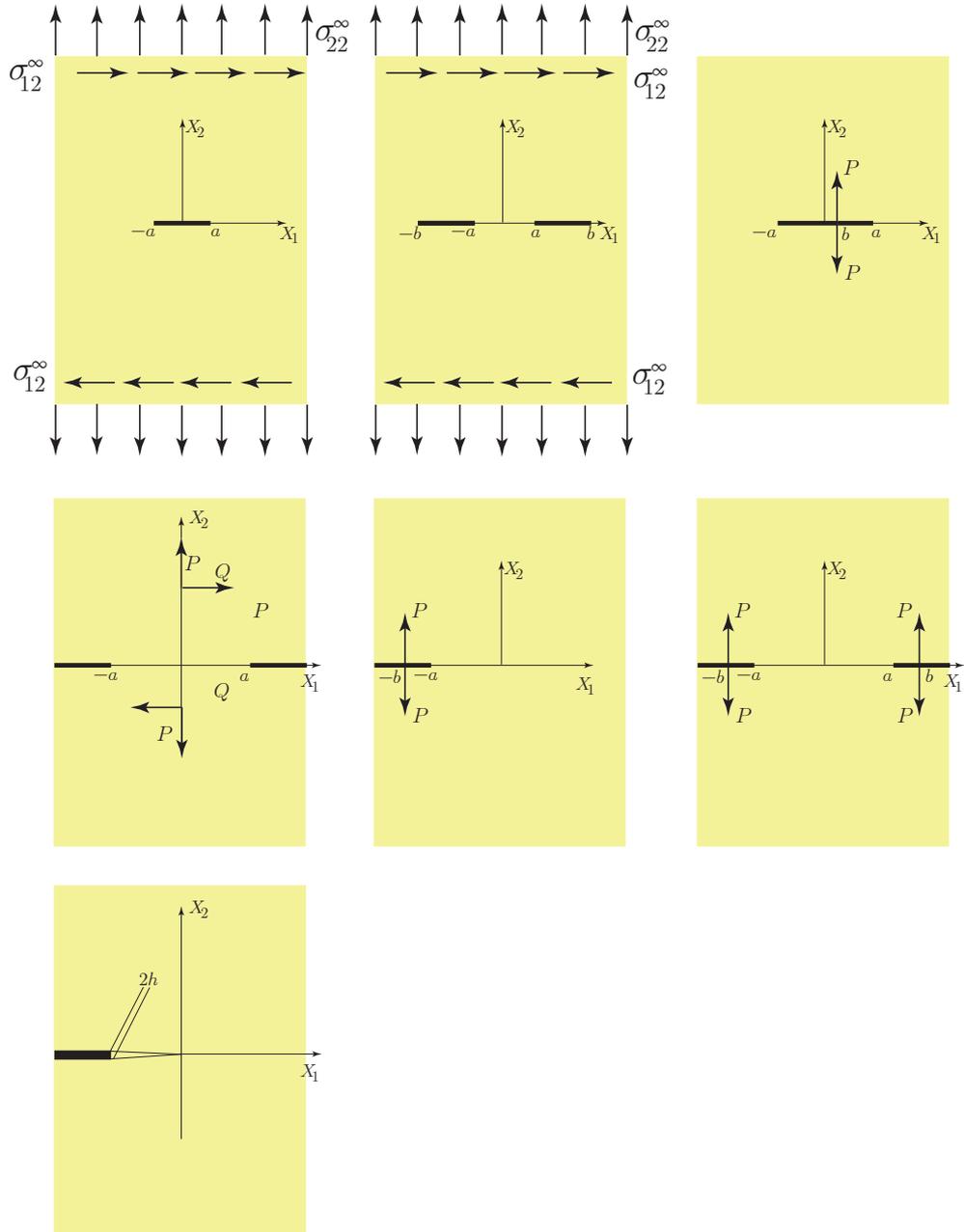


Рисунок 1.2 – Типы образцов с трещинами, разрезами и включениями

в механике разрушения. Масштабные множители многопараметрического разложения поля напряжений для рассматриваемого образца впервые получены в работе Г. Хелло с соавторами [93].

Однако, на этом исследование напряженно-деформированного состояния данного образца не было остановлено – к задаче о построении разложения Уильямса в окрестности вершины центральной трещины обращался

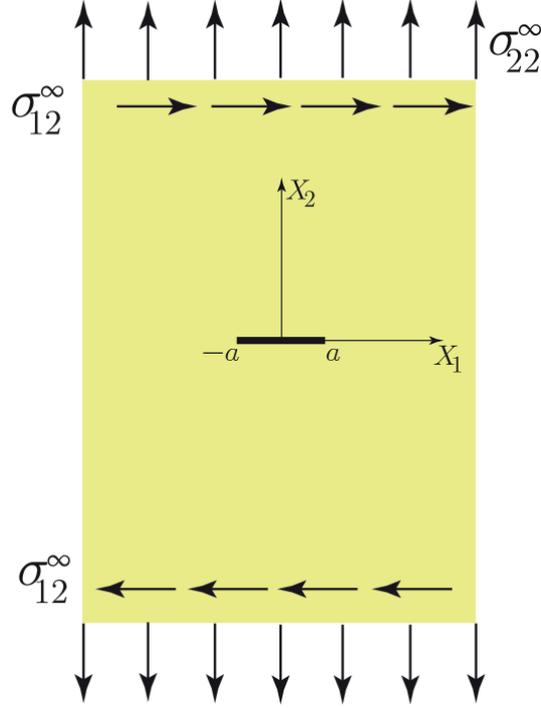


Рисунок 1.3 – Бесконечная пластина, ослабленная центральным разрезом

автор статьи [42], где был изложен анализ влияния регулярных слагаемых на точность решения, получаемую усеченными рядами, с помощью варьирования количества удерживаемых слагаемых. Согласно представлению Колосова–Мусхелишвили [34] и общему решению смешанной задачи (1.8), можно определить комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ данной задачи

$$\varphi_1'(z) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{4}, \quad C_1 = (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{2}, \quad (1.9)$$

и найти компоненты напряжений с помощью хорошо известных соотношений [34]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= 2\operatorname{Re} [\varphi_1'(z)] - 2x_2 \operatorname{Im} [\varphi_1''(z)] + C_1, \\ \sigma_{22}^1(z) &= 2\operatorname{Re} [\varphi_1'(z)] + 2x_2 \operatorname{Im} [\varphi_1''(z)] - C_1, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -2x_2 \operatorname{Re} [\varphi_1''(z)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Параметр α характеризует действие приложенных растягивающих нагрузок вдоль горизонтальной оси (рисунок 1.4). В соответствии с соотношени-

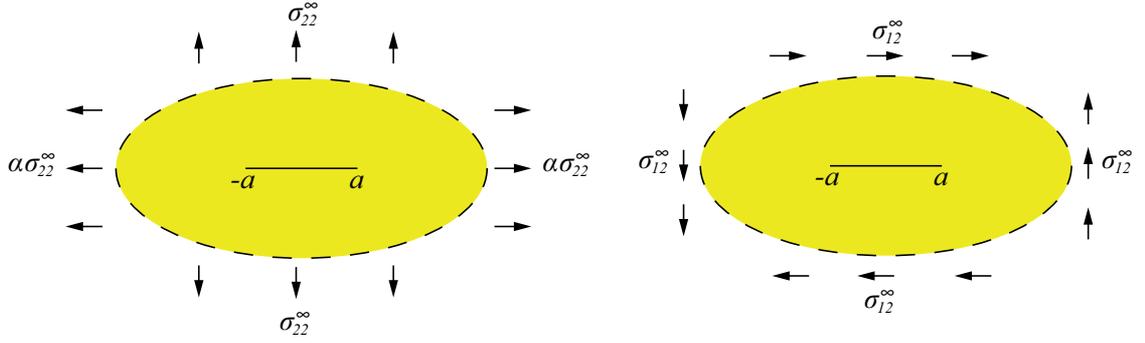


Рисунок 1.4 – Нормальный отрыв и поперечный сдвиг бесконечной плоскости с центральной трещиной

ями (1.10) компоненты тензора напряжений принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(z) &= \sigma_{22}^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] - x_2 \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{22}^1(z) &= \sigma_{22}^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \right] + x_2 \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \sigma_{12}^1(z) &= -\sigma_{22}^\infty x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для поперечного сдвига решение задачи удовлетворяет условию антисимметрии $\sigma_{22} = 0$ при $x_2 = 0$. В этом случае напряжения можно описать с помощью комплексного потенциала $\varphi_2'(z)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2(z) &= 4 \operatorname{Re} [\varphi_2'(z)] - 2x_2 \operatorname{Im} [\varphi_2''(z)], & \sigma_{22}^2(z) &= 2x_2 \operatorname{Im} [\varphi_2''(z)], \\ \sigma_{12}^2(z) &= -\operatorname{Im} [\varphi_2'(z)] - 2x_2 \operatorname{Re} [\varphi_2''(z)] - C_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Аналитическое решение задачи о поперечном сдвиге представляется комплексным потенциалом Колосова – Мусхелишвили [34]

$$\varphi_2'(z) = -i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \quad C_2 = -\sigma_{12}^\infty. \quad (1.13)$$

В случае чистого поперечного сдвига выражения компонент напряжений

можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^2(z) &= \sigma_{12}^\infty \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} + x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}, \\ \sigma_{22}^2(z) &= -\sigma_{12}^\infty x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right], \\ \sigma_{12}^2(z) &= \sigma_{12}^\infty \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Подстановка $z = a + re^{i\theta}$ в выражения (1.11) и (1.14) и разложение комплексных потенциалов $\varphi_1'(z)$ и $\varphi_2'(z)$ в ряд по степеням расстояния от переднего края трещины r порождают асимптотическое представление компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = a_{2n+1}^1 f_{1,ij}^{(2)}(\theta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^m f_{m,ij}^{(2n+1)}(\theta) r^{n-1/2}, \quad (1.15)$$

где амплитудные множители определяются выражениями: для случая действия растягивающего напряжения

$$\begin{aligned}a_{2n+1}^1 &= \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{22}^\infty}{a^{n-1/2}}, \quad n \geq 0, \\ a_2^1 &= \sigma^\infty (\alpha - 1)/4, \quad a_{2n}^1 = 0, \quad n > 1\end{aligned}\quad (1.16)$$

и для случая действия поперечного сдвига

$$\begin{aligned}a_{2n+1}^2 &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{12}^\infty}{a^{n-1/2}}, \quad n \geq 0, \\ a_{2n}^2 &= 0, \quad n \geq 1.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Таким образом, точное аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии плоскости с трещиной открывает возможность отыскания всех масштабных множителей — функций геометрических параметров образца и типа действующих нагрузок.

На рисунках 1.5 – 1.13 проиллюстрированы зависимости компонент тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, $\sigma_{22}(r, \theta)$ и $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ на разном удалении от кончика трещины. На графике 1.5 представлены функциональные зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного

угла θ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.025$ от вершины дефекта, получаемые с помощью усеченных на разном числе слагаемых разложений Уильямса и с помощью точного теоретического решения задачи. Красным цветом показана кривая, построенная с помощью однопараметрической модели, синим цветом показана кривая, построенная на основе двухпараметрической модели, зеленым, желтым и голубым цветами показаны кривые, отвечающие трехпараметрической, пятипараметрической и семипараметрической моделям соответственно, черным цветом показано замкнутое решение задачи, определяемое потенциалами Колосова-Мусхелишвили. Видно, что все разложения, начиная с трехчленного, совпадают с точным решением. Тем самым, из рисунка 1.5 следует, что для точного описания напряженно-деформированного состояния для выбранной области, окружающей вершину трещины достаточно сохранить три слагаемых асимптотического ряда Уильямса, поскольку двучленное разложение отличается от точного решения. Увеличивая расстояние от вершины трещины вдвое, результаты не меняются — трех слагаемых для выбранного расстояния все еще достаточно для корректного описания поля напряжений. Рисунок 1.6, иллюстриру-

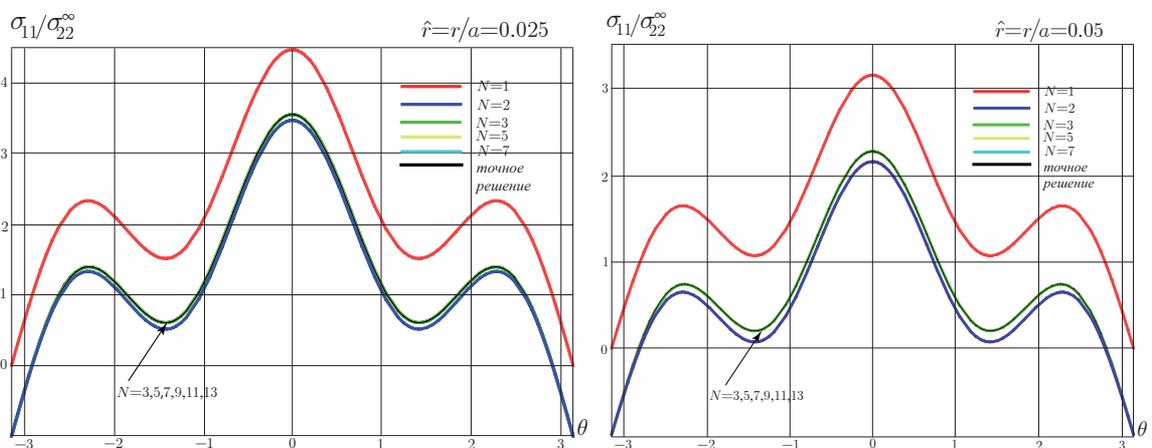


Рисунок 1.5 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.025$ и $\hat{r} = r/a = 0.05$

ющий распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.1$ (слева) и $\hat{r} = r/a = 0.25$ (справа) от вершины трещины, также подтверждает, что асимптотическое трехчленное разложение нормальной компоненты напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ полностью совпадает с точным теоретическим решением и, таким образом, учет следующих приближений не нужен. Однако,

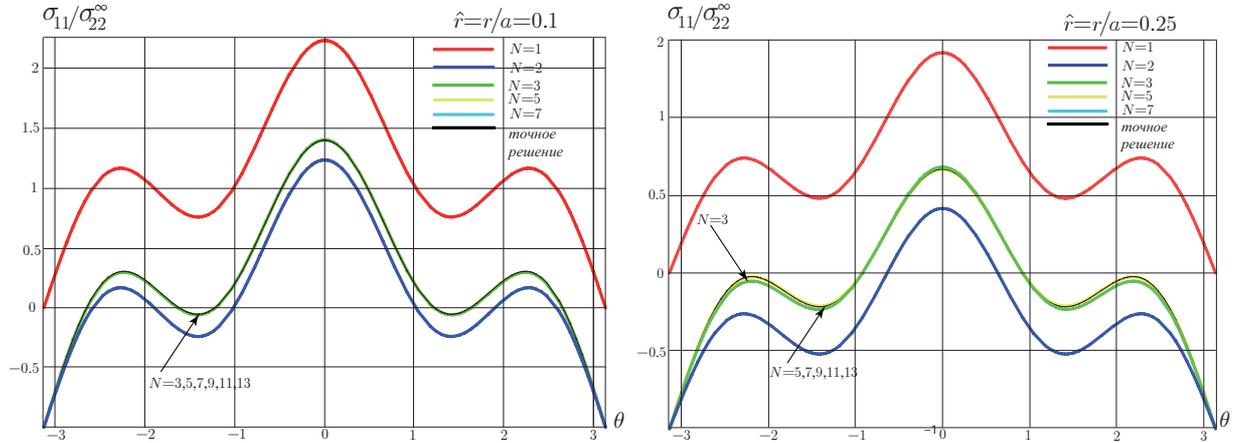


Рисунок 1.6 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.1$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$

при увеличении расстояния до $\hat{r} = r/a = 0.5$ (четверть длины трещины) требуется сохранять не менее семи слагаемых разложения Уильямса. При увеличении расстояния от вершины трещины до $\hat{r} = r/a = 0.75$, как показано на рисунке 1.7, обнаруживается, что для описания поля напряжений надлежит удерживать 11 слагаемых, поскольку разложение, содержащее только девять членов, отличается от точного решения. Последовательное увеличение расстояния от вершины дефекта и анализ числа удерживаемых слагаемых позволяют выявить следующие закономерности: на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1$, составляющим половину длины трещины, требуется сохранять 15 слагаемых ряда (рисунок 1.8), а на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.25$ для корректного описания распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ необходимо сохранять в разложении не менее 23 слагаемых (рисунок 1.9). На расстоянии

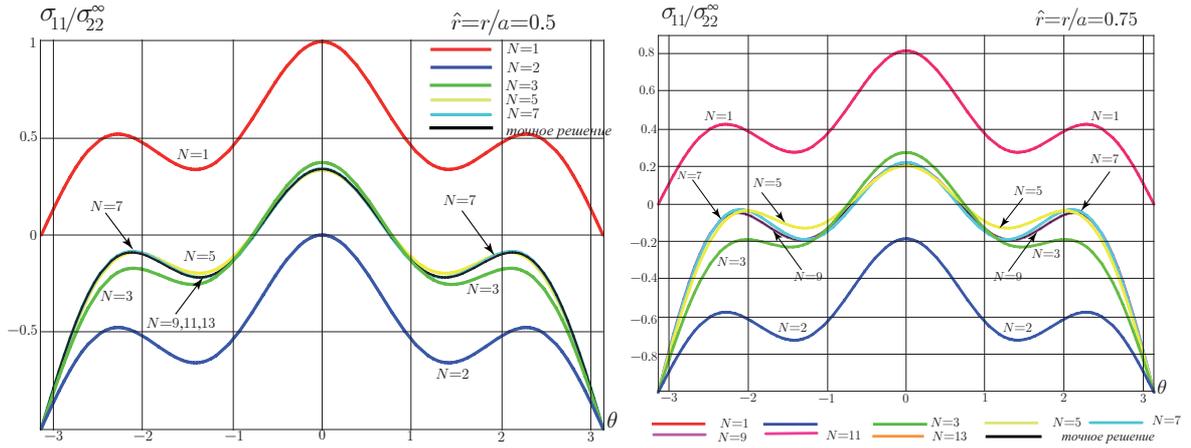


Рисунок 1.7 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.5$ и $\hat{r} = r/a = 0.75$

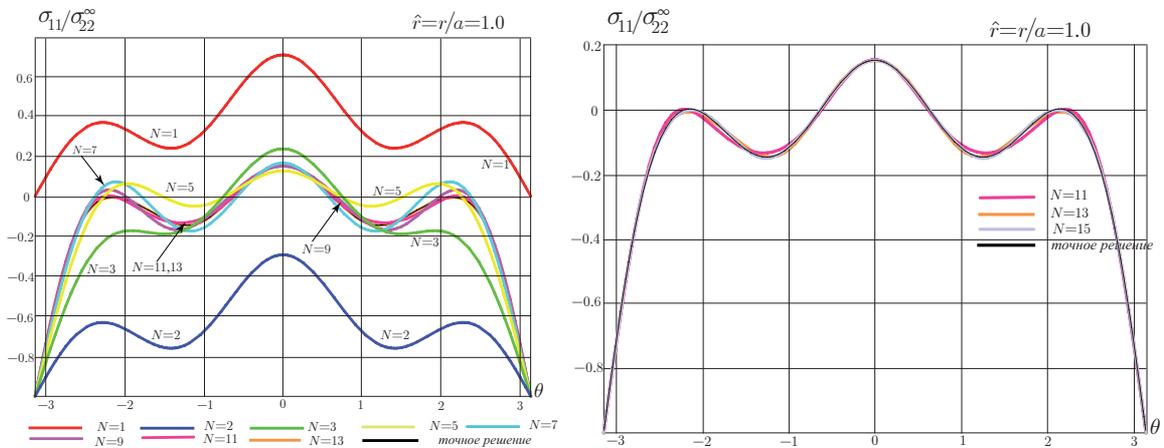


Рисунок 1.8 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.0$

$\hat{r} = r/a = 1.5$ (рисунок 1.10) для оценки напряженно-деформированного состояния в выделенной области, охватывающей вершину трещины, достаточно удерживать 49 членов в асимптотическом разложении Уильямса. На рисунке 1.11 показано, что для точного описания распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$ необходимо учитывать 99 слагаемых ряда Уильямса, что справедливо и для компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$, показанной на рисунке 1.12. Зависимости компоненты тензора напряжений

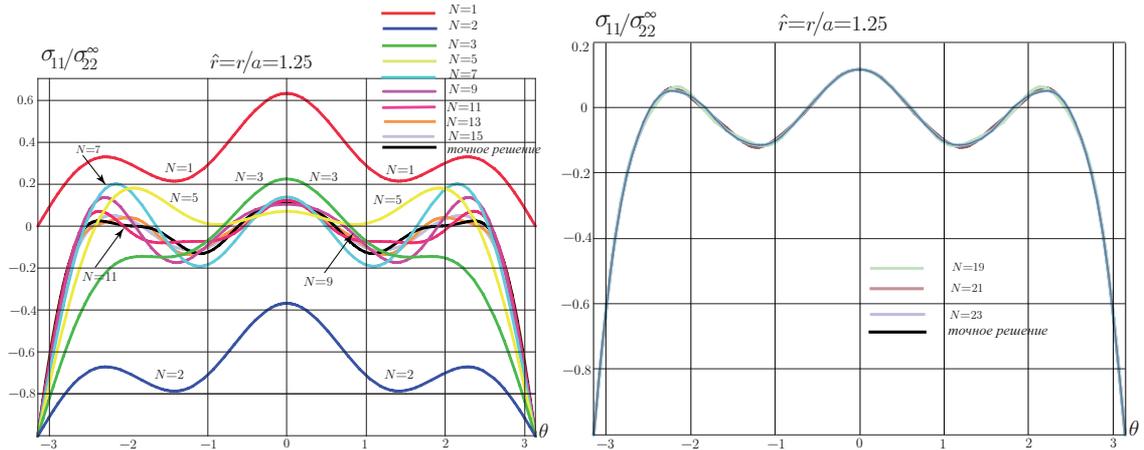


Рисунок 1.9 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.25$

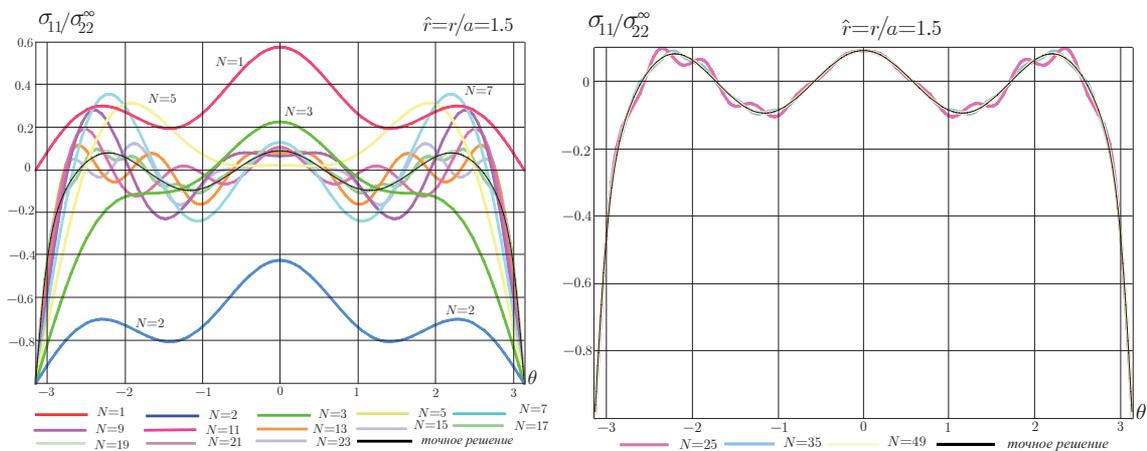


Рисунок 1.10 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.5$

$\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$, изображенные на рисунке 1.13, констатируют, что полного соответствия приближенного решения точному можно достичь, используя 99-членное асимптотическое разложение Уильямса. Общий вывод из анализа следующий: чем больше область, рассматриваемая для оценки напряженно-деформированного состояния, тем больше слагаемых необходимо учитывать в многопараметрическом разложении Уильямса: сохранение большего количества слагаемых

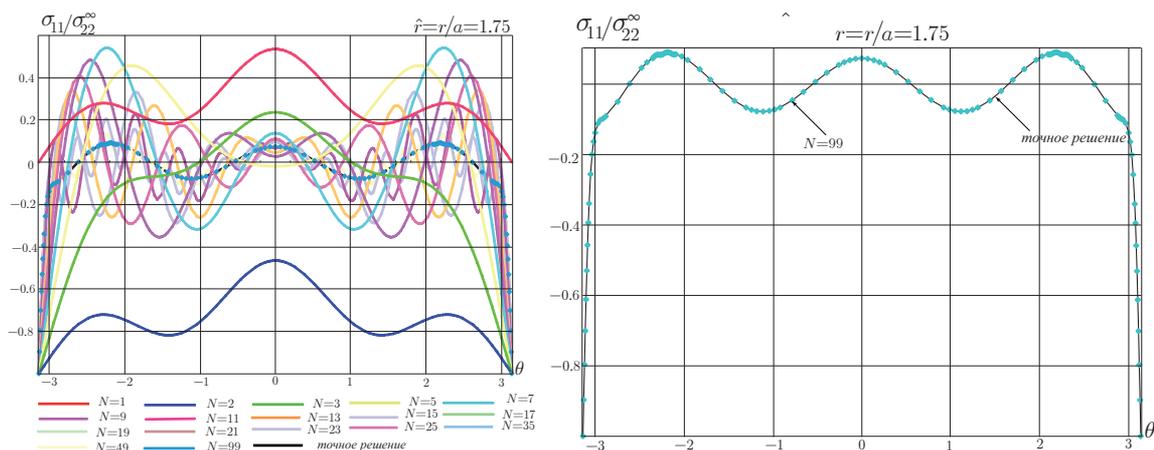


Рисунок 1.11 – Зависимости компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$, полученные с помощью усеченных на различном количестве слагаемых асимптотических рядов

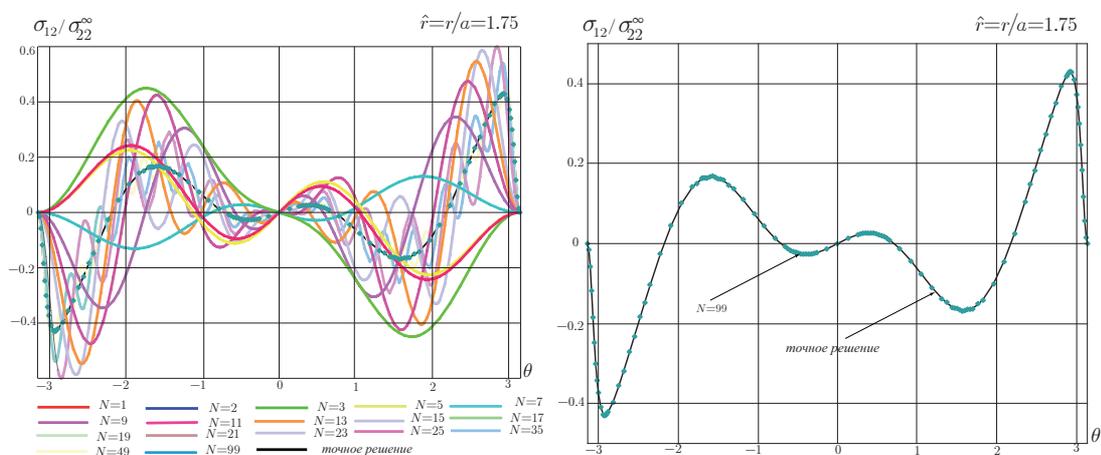


Рисунок 1.12 – Зависимости компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$, полученные с помощью усеченных на различном количестве слагаемых асимптотических рядов

позволяет расширить область выбора экспериментальных точек, необходимых для экспериментального и численного анализа.

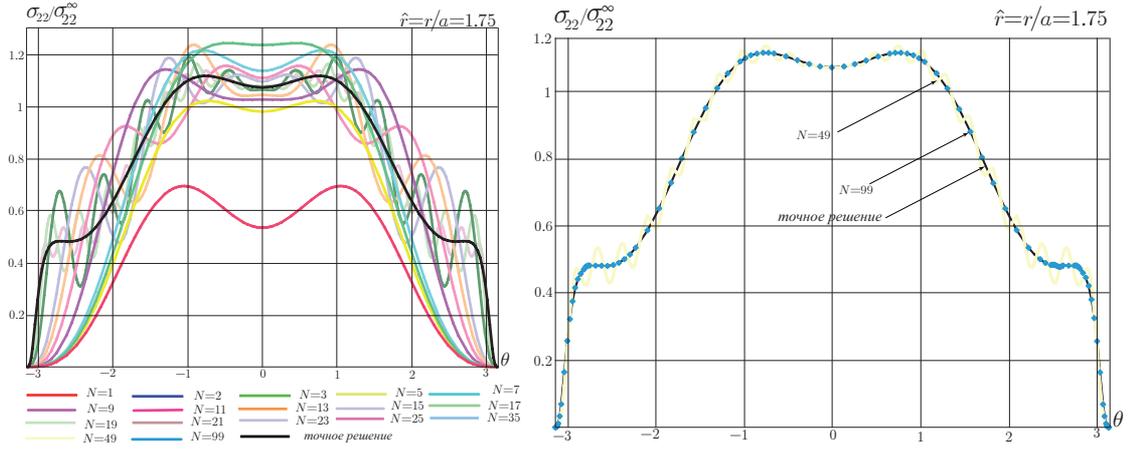


Рисунок 1.13 – Зависимости компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$, полученные с помощью усеченных на различном количестве слагаемых асимптотических рядов

1.4.2. Нормальный отрыв бесконечной плоскости с двумя горизонтальными разрезами

Для следующей конфигурации (рисунок 1.14) аналогичным образом можно отыскать аналитическое решение с помощью методов ТФКП. Данная конфигурация была предметом многочисленных исследований [45, 46, 157, 158]. Используя коэффициенты разложения М. Уильямса, найденные в [157, 158] для данной конфигурации тела с двумя коллинеарными трещинами, можно провести сопоставительный анализ вклада неособых членов в общее представление полей у вершин трещин. Следуя классическому подходу Колозова – Мухелишвили [34], можно найти комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$:

$$\varphi_1'(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad c_0 = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2}. \quad (1.18)$$

Константы c_1 и c_2 полинома $P_{n-1}(z)$ вычисляются по формулам $c_1 = \Delta_1/\Delta$, $c_2 = \Delta_2/\Delta$, которые вытекают из требования однозначности поля смещений. В последних формулах принята система обозначений

$$\Delta = I_2 J_3 - J_2 I_3, \quad \Delta_1 = c_0 I_3 (J_1 - I_1), \quad \Delta_2 = c_0 (I_1 J_2 - I_2 J_1), \quad (1.19)$$

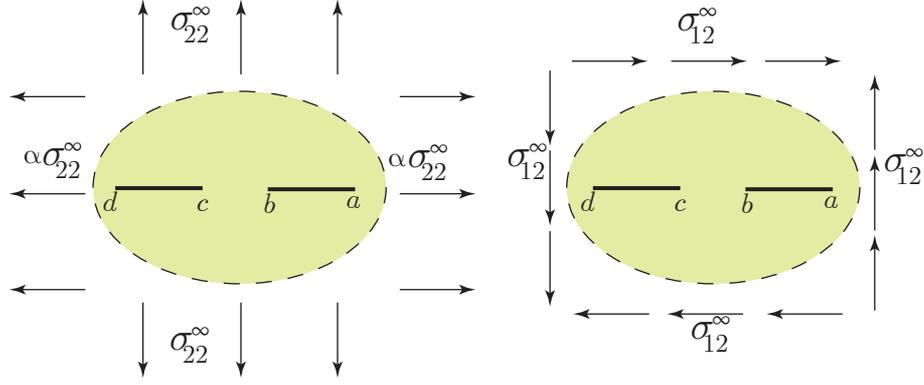


Рисунок 1.14 – Нормальный отрыв бесконечной плоскости с двумя горизонтальными разрезами различной длины

$$\begin{aligned}
 I_1 = & [a(c-b) + c(b+c)] K(k_1) + (a-c)(b-d)E(k_1) + \\
 & + [a(b-c) + b(b+d) - c(c+d)] \Pi(k_3, k_1),
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
 J_1 = & [a(a+d) + c(a-d)] K(k_1) + k(a-c)(b-d)E(k_1) - \\
 & - [a(a+b) + c(a-d) - d(b+d)] \Pi(k_3, k_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 = 2cK(k_1) + 2(b-c)\Pi(k_2, k_1), \quad J_2 = 2aK(k_1) + 2(d-a)\Pi(k_3, k_1), \\
 I_3 = J_3 = 2K(k_1),
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

где $k_1 = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$, $k_2 = \frac{a-b}{a-c}$, $k_3 = \frac{d-c}{a-c}$. В соотношениях (1.20) и (1.21) использованы классические обозначения для $K(k_1) = F(k_1, \pi/2)$ – полного эллиптического интеграла 1-ого рода в канонической форме Лежандра, $E(k_1) = E(k_1, \pi/2)$ – полного эллиптического интеграла 2-ого рода в канонической форме Лежандра, $\Pi(k_3, k_1)$ – эллиптического интеграла

3-го рода в канонической форме Лежандра:

$$\begin{aligned}
K(k_1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 x}} = F(\pi/2, k_1), \\
E(k_1) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 x} dx = E(\pi/2, k_1), \\
\Pi(\omega^2, k_1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-\omega^2 \sin^2 x)\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 x}} = \Pi(\pi/2, \omega^2, k_1).
\end{aligned}$$

Разложение комплексного потенциала $\varphi_1'(z)$ в ряд в окрестности кончиков каждой из трещин предоставляет возможность определить все амплитудные (масштабные) множители асимптотического ряда М. Уильямса (1.1). Для идентификации масштабных факторов – амплитудных коэффициентов асимптотического ряда Макса Уильямса (1.1) – достаточно разложить комплексную функцию Колосова – Мухелишвили (1.18) в ряд в окрестности правой вершины $z(r, \theta) = a + re^{i\theta}$ (рисунок 1.14). Для остальных вершин коэффициенты ряда М. Уильямса находятся аналогичным образом. Представление комплексного потенциала $\varphi_1'(z)$ в окрестности вершины $z(r, \theta) = a$ принимает вид

$$\varphi_1'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j (z-a)^{j-1/2} + \frac{\alpha-1}{4} \sigma_{22}^{\infty}, \quad (1.22)$$

где множители асимптотического разложения η_j вычисляются как

$$\begin{aligned}
\eta_m &= \sum_{j=0}^m \xi_{m-j} \zeta_j, \quad \xi_m = \sum_{l=0}^m a_{m-l} b_l, \quad \zeta_k = \sum_{i=0}^k d_{k-i} e_i, \\
a_k &= (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-b)^{-(2k+1)/2}, \\
b_k &= (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-c)^{-(2k+1)/2}, \\
d_k &= (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{2^k k!} (a-d)^{-(2k+1)/2}, \\
e_0 &= c_0 a^2 + c_1 a + c_2, \quad e_1 = 2c_0 a + c_1, \\
e_2 &= c_0, \quad e_k = 0 \quad \forall k > 2.
\end{aligned} \quad (1.23)$$

Сопоставление приближенного решения М. Уильямса (1.1) и точного аналитического решения, определяемого выражениями (1.22) и (1.23), делает возможным нахождение всех амплитудных коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса в форме:

$$a_{2k+1}^1 = \frac{2\eta_k}{f_{1,22}^{(2k+1)}(\theta = 0)}, \quad a_2^1 = \frac{(\alpha - 1)\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad a_{2k}^1 = 0 \quad \forall k > 1. \quad (1.24)$$

В итоге, точное аналитическое решение задачи о нагружении упругой плоскости с двумя разрезами, позволяет найти все функциональные зависимости множителей асимптотического разложения a_k^1 от геометрических размеров образца с двумя трещинами и действующей нагрузки. Рисунок 1.15

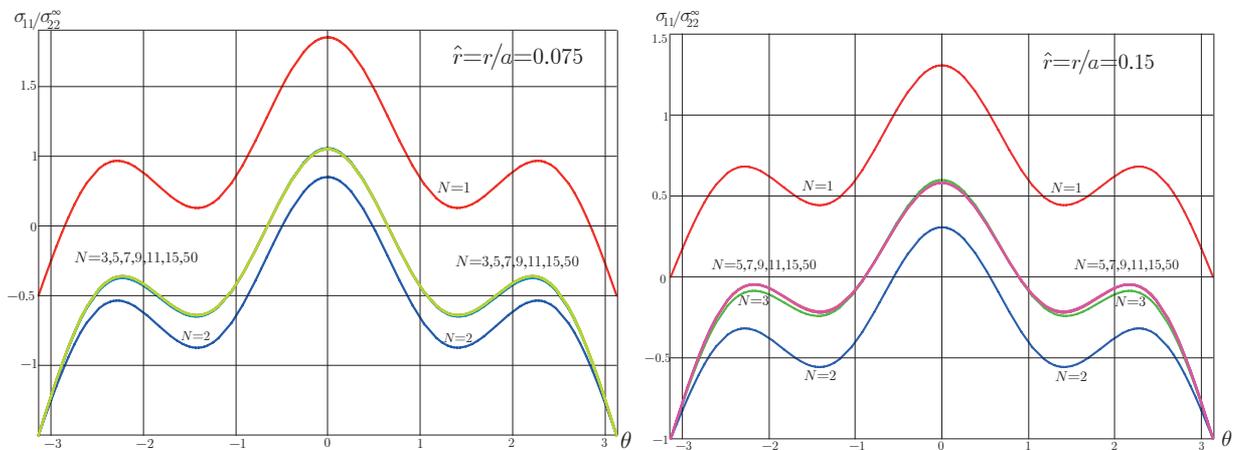


Рисунок 1.15 – Зависимость компоненты напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях

$$\hat{r} = r/a = 0.075 \text{ и } \hat{r} = r/a = 0.15$$

иллюстрирует зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.075$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$ соответственно. Варьируя количество удерживаемых слагаемых ряда Уильямса, можно прийти к умозаключению о том, что для расстояния $\hat{r} = r/a = 0.075$ от вершины $z = a$ для корректного описания напряженно-деформированного состояния вполне достаточно

трехчленного разложения, поскольку для пяти, семи и более слагаемых, кривые совпадают. На расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.15$ необходимо учитывать не менее пяти слагаемых в разложении Уильямса. На рисунке 1.16 изображены зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.3$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$ от вершины разреза $z = a$, где однозначно видна необходимость сохранения девяти и одиннадцати слагаемых разложения Уильямса, что, в целом, соответствует результатам, полученным ранее для конфигурации с единственной центральной трещиной.

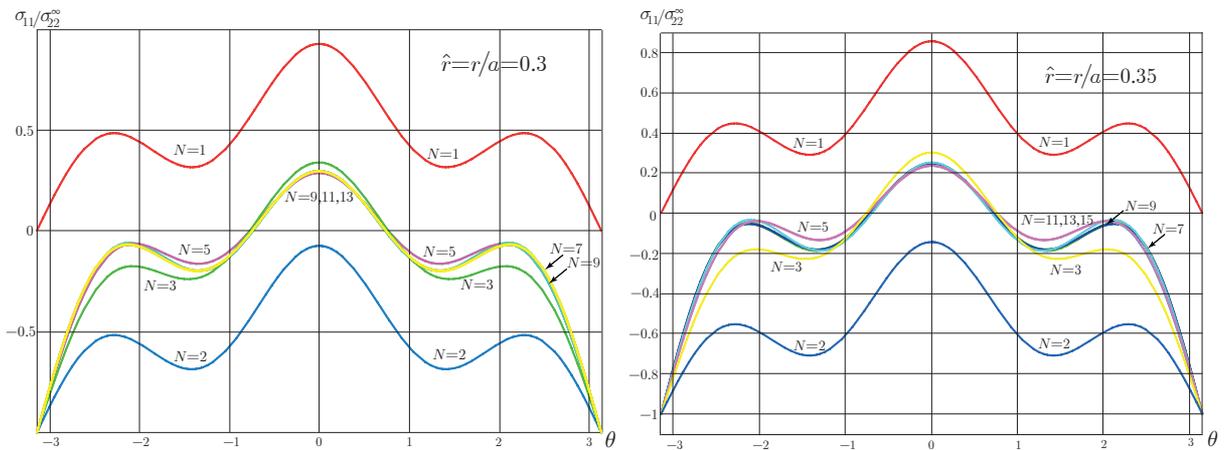


Рисунок 1.16 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.3$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$

На рисунке 1.17 проиллюстрированы зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.4$, полученные с помощью усеченных на разном количестве слагаемых разложений М. Уильямса. Из приведенных графиков следует, что для описания полей напряжений достаточно удерживать тринадцать слагаемых, а сохранение следующих слагаемых не меняет картину.

На следующем изображении (рисунок 1.18) представлены графики за-

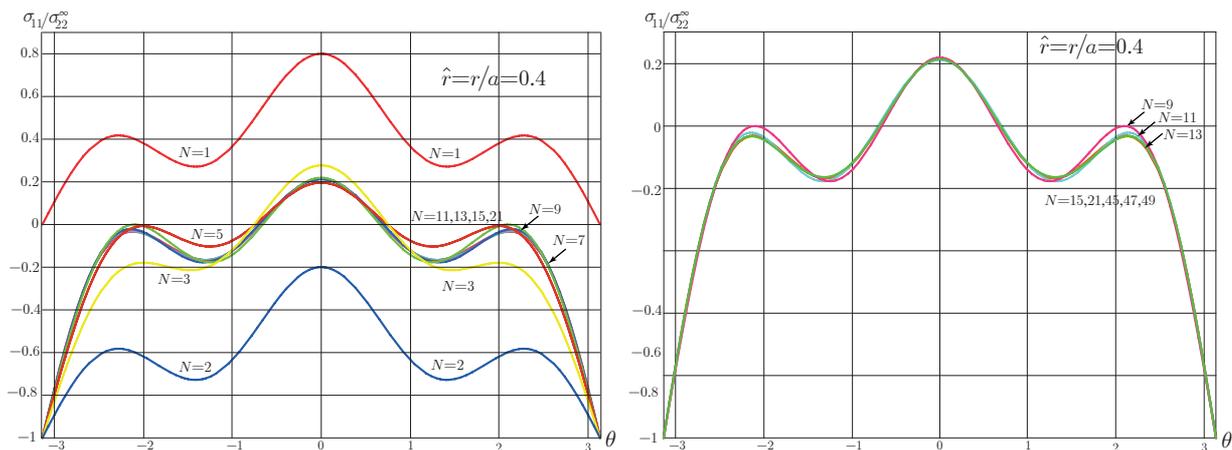


Рисунок 1.17 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = a$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.4$

зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.5$. В целом, ситуация схожа с предыдущими: кривая, построенная на основании разложения, содержащего пятнадцать слагаемых, отличается от предельной кривой (рисунок 1.18, справа), но сохранение двадцати одного члена в разложении позволяет получить асимптотическое представление, полностью неразличимое с кривыми, определяемыми разложениями, содержащими слагаемые более высоких порядков.

Графики на рисунке 1.19 иллюстрируют 1) зависимости компонент тензора напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$ (слева) и $\sigma_{12}(r, \theta)$ (справа) от полярного угла θ в случае нормального отрыва на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от вершины трещины $z = c$, полученные посредством усеченных на разном числе слагаемых в разложении Макса Уильямса поля напряжений; 2) замкнутое аналитическое решение задачи, показанное черными ромбами.

На рисунке 1.20 показаны графики зависимостей компонент тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ (слева) и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ (справа) от полярного угла θ для задачи о нормальном отрыве на

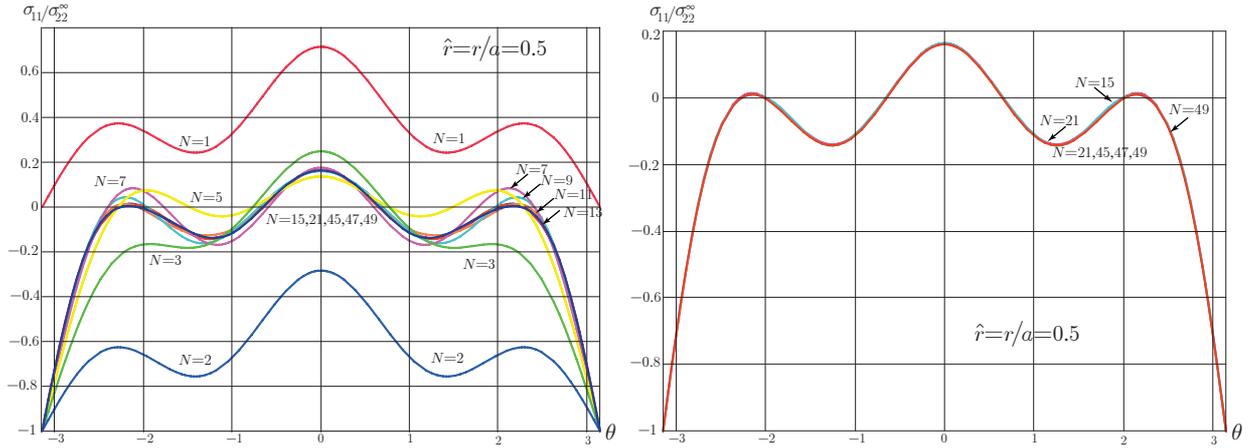


Рисунок 1.18 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = a$ в условиях нормального отрыва на расстоянии

$$\hat{r} = r/a = 0.5$$

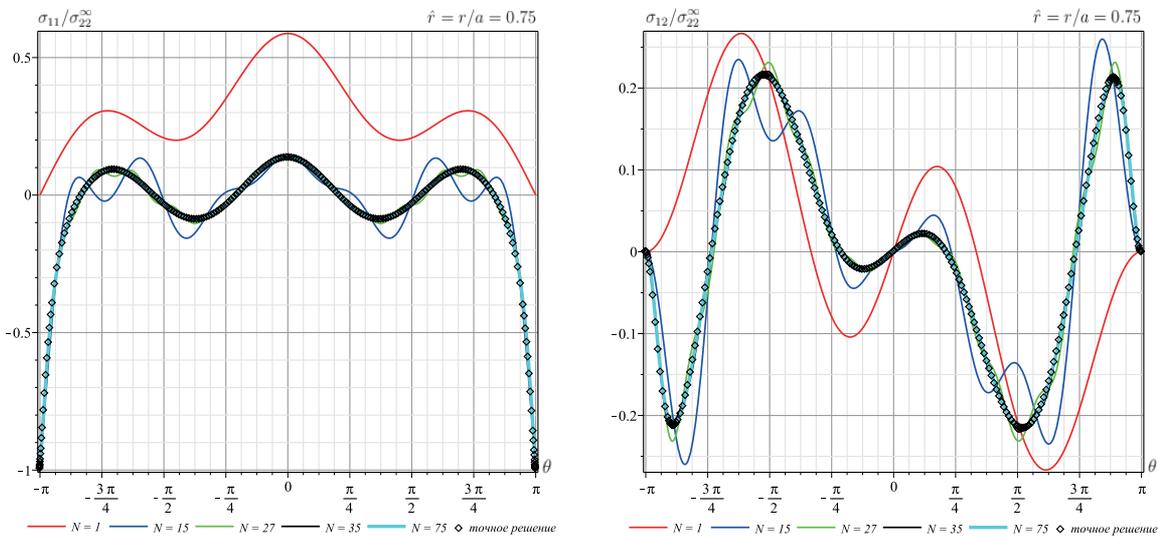


Рисунок 1.19 – Зависимости компонент σ_{11} (слева) и σ_{12} (справа) от полярного угла θ у вершины трещины $z = c$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от кончика трещины $z = c$. Приведены распределения, полученные с помощью асимптотического разложения Уильямса для $N = 1, 15, 27, 35, 75$. Красным цветом показано однопараметрическое распределение, синим – пятнадцатичленное распределение, зеленым цве-

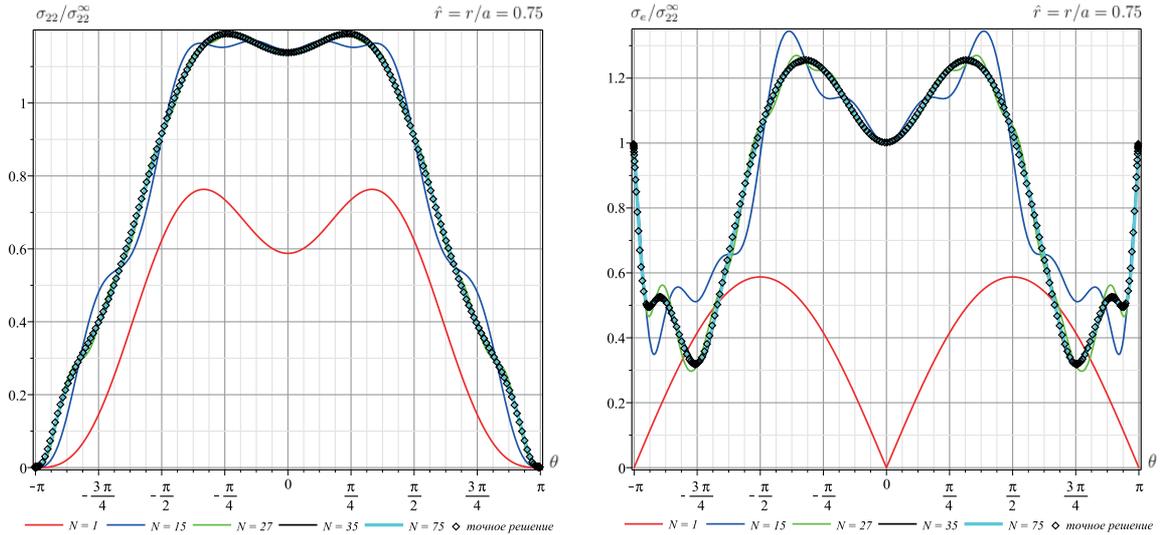


Рисунок 1.20 – Зависимости компоненты σ_{22} (слева) и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ (справа) от полярного угла θ у вершины трещины $z = c$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

том – двадцатичленное распределение, черным и голубым цветами – тридцатипятичленное и семидесятипятичленное распределения, совпадающие с точным решением. Из графиков видно, что для совпадения приближенного решения с аналитическим, достаточно сохранения тридцати пяти слагаемых в асимптотическом разложении.

1.4.3. Напряжение поперечным сдвигом бесконечной пластины с двумя коллинеарными горизонтальными разрезами

Замкнутое аналитическое решение задачи о поперечном сдвиге плоскости, ослабленной двумя разрезами равной длины (рисунок 1.14), дает возможность проанализировать влияние высших приближений при воспроизведении полей напряжений и смещений в окрестности вершины трещины с помощью аппроксимации М. Уильямса. Для этого можно воспользоваться вычисленными из точного решения коэффициентами ряда Макса Уильям-

са [157, 158].

Комплексный потенциал Колосова – Мусхелишвили $\varphi'_2(z)$ для бесконечной линейно упругой изотропной плоскости с двумя коллинеарными трещинами различной длины при нагружении поперечным сдвигом, решающий задачу, имеет вид

$$\varphi'_2(z) = -i \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}. \quad (1.25)$$

Полагая в (1.25) $z = a + r e^{i\theta}$ и раскладывая комплексный потенциал $\varphi'_2(z)$ в ряд по степеням r в окрестности точки $z = a$, можно получить следующее асимптотическое разложение комплексного потенциала $\varphi'_2(z)$

$$\varphi'_2(z) = -i \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j (z-a)^{j-1/2} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \quad (1.26)$$

где коэффициенты асимптотического разложения вычисляются как

$$\begin{aligned} \eta_m &= \sum_{j=0}^m \xi_{m-j} \zeta_j, & \xi_m &= \sum_{l=0}^m a_{m-l} b_l, & \zeta_k &= \sum_{i=0}^k d_{k-i} \xi_i, \\ \xi_0 &= c_0 a^2 + c_1 a + c_2, & \xi_1 &= 2c_0 a + c_1, & \xi_2 &= c_0, & \xi_k &= 0 \quad \forall k > 2, \end{aligned} \quad (1.27)$$

а коэффициенты c_1 и c_2 определяются по формулам (1.19) и $c_0 = \sigma_{12}^\infty/2$. Используя асимптотическое разложение в ряд комплексного потенциала $\varphi'_2(z)$ в окрестности вершины $z = a$, можно получить последовательность коэффициентов асимптотического ряда

$$a_{k+1}^2 = \frac{\eta_k}{f_{2,12}^{(k+1)}(\theta=0)}, \quad a_{2k}^2 = 0, \quad \forall k > 0. \quad (1.28)$$

На рисунке 1.21 изображены графики распределений компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ для моды нагружения, соответствующей поперечному сдвигу (рисунок 1.14), на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$ от вершины трещины $z = a$, полученные с помощью асимптотических рядов, включающих различные количества слагаемых. На небольших расстояни-

ях, таких как $\hat{r} = r/a = 0.05$, для точного описания полей напряжений достаточно сохранять три слагаемых в асимптотическом разложении. Следует заметить, что экспериментатор при обработке интерференционных картин выбирает точки, лежащие на гораздо большем удалении от кончика трещины. На расстояниях порядка $\hat{r} = r/a = 0.05$ от вершины трещины определенно невозможно увидеть четкие интерференционные полосы. Увеличивая размеры области, охватывающей вершину трещины $z = a$ до $\hat{r} = r/a = 0.25$, можно обнаружить, что указанного количества недостаточно — правильное описание угловых распределений достигается путем удержания девяти слагаемых.

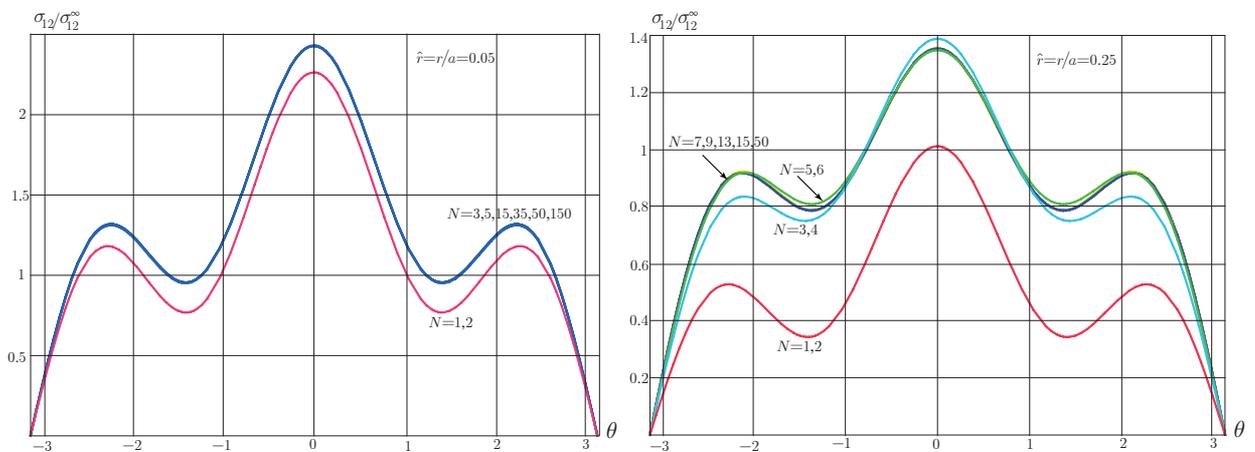


Рисунок 1.21 – Зависимость компоненты σ_{12} от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$ в условиях поперечного сдвига

На рисунке 1.22 проиллюстрированы графики угловых функций компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ для задачи о поперечном сдвиге на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.45$ от вершины трещины $z = a$. Слева изображены распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$, полученные с помощью усеченных рядов, состоящих из трех, пяти, семи, девяти, одиннадцати, пятидесяти, ста пятидесяти и двухсот слагаемых. Графики,

изображенные на рисунке справа, доказывают, что для рассматриваемой конфигурации, вида нагружения и выбранного характерного размера области, охватывающей вершину трещины, достаточно тринадцатичленного асимптотического разложения, но недостаточно разложений, содержащих меньшее число слагаемых.

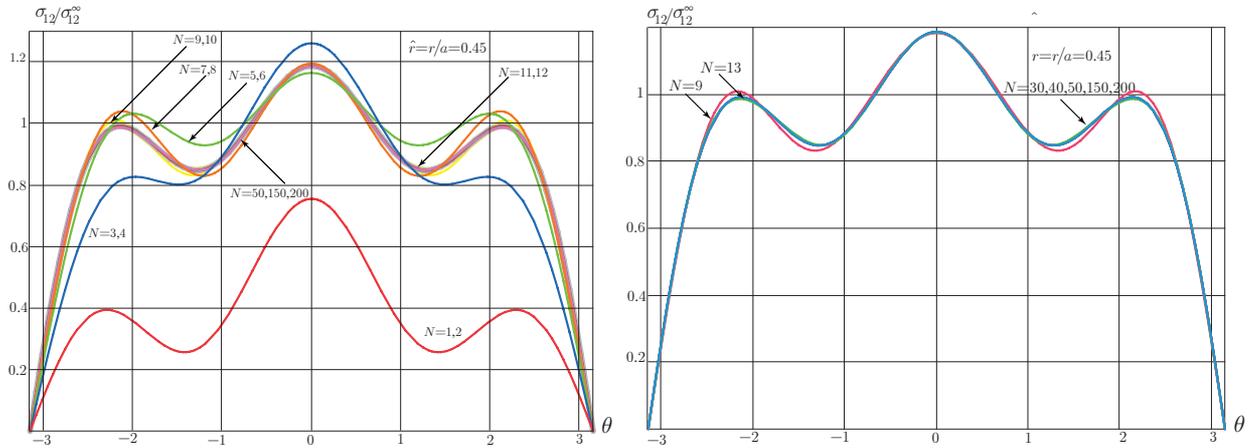


Рисунок 1.22 – Зависимость компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.45$

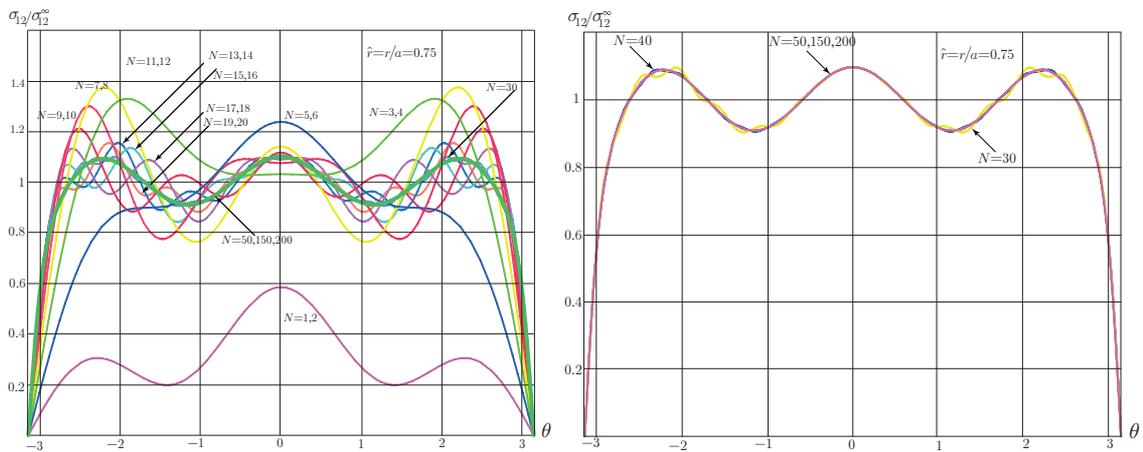


Рисунок 1.23 – Зависимость компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины $z = a$ трещины поперечного сдвига на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

Изображения 1.23 иллюстрируют зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ для второй моды нагружения на

расстоянии от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.75$. Используя разложения, состоящие из различного количества слагаемых, показанные на рисунке 1.23, нетрудно заметить, что график, построенный посредством тридцатичленного асимптотического разложения, не совпадает с графиками, построенными для разложений, в которых удерживается большее число слагаемых. Из рисунка 1.23 можно видеть, что распределения, даваемые пятидесятичленным рядом и рядами с большим числом слагаемых, не различаются между собой. Таким образом, для рассматриваемого случая оказывается достаточным выбор усеченного ряда, состоящего из пятидесяти слагаемых.

1.4.4. Смешанное деформирование (нормальный отрыв и поперечный сдвиг) бесконечной плоскости с двумя коллинеарными горизонтальными разрезами

С помощью принципа суперпозиции решений задач о растяжении и сдвиге плоскости с двумя разрезами можно найти зависимости напряжений от полярного угла θ на различных расстояниях от вершины трещины для задачи о смешанном нагружении бесконечной пластины и подтвердить выявленную общую закономерность о влиянии на решение задачи регулярных (неособых) слагаемых ряда М. Уильямса.

На рисунке 1.24 изображена зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ для смешанного нагружения для параметра смешанности нагружения $M^e = 1/2$, где параметр смешанности нагружения определяется равенством

$$M^e = \frac{2}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left| \frac{\sigma_{22}(r, \theta = 0)}{\sigma_{12}(r, \theta = 0)} \right| \quad (1.29)$$

и пробегает значения от нуля до единицы, описывая все возможные моды нагружения от идеального поперечного сдвига до идеального нормального

растяжения. На рисунке 1.24 можно видеть, что на расстояниях от кончика трещины $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$ необходимо сохранять три и пять слагаемых соответственно. При увеличении расстояния до $\hat{r} = r/a = 0.25$ и

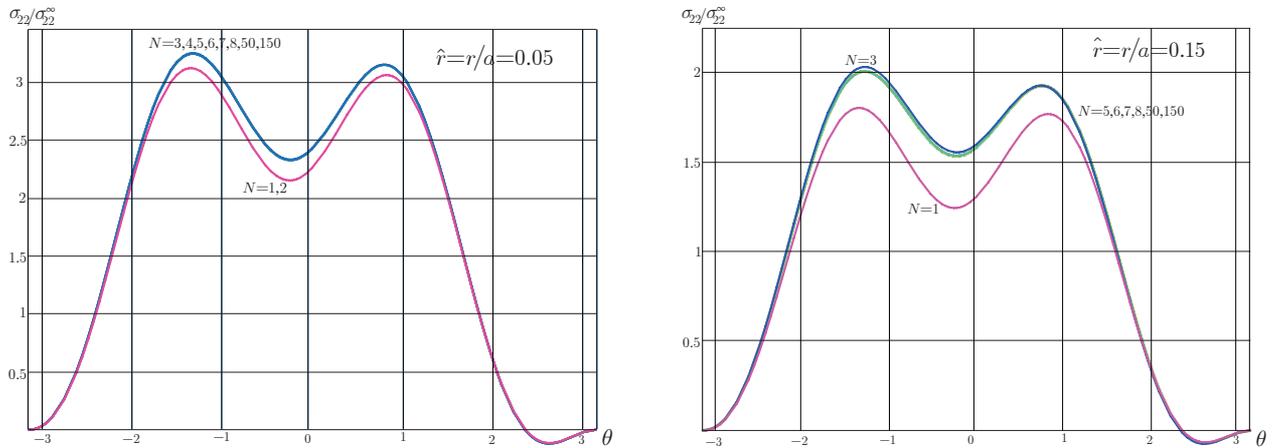


Рисунок 1.24 – Зависимость компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$

$\hat{r} = r/a = 0.35$, как изображено на рисунке 1.25, выявляется необходимость сохранения пяти и семи слагаемых соответственно. На рисунке 1.25 справа четко заметны различия между разложениями, состоящими из пяти и семи слагаемых. На рисунке 1.26 изображены графики компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.45$ и $\hat{r} = r/a = 0.55$. При расширении рассматриваемой области, окружающей вершину трещины, закономерность сохраняется: на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.45$ для эффективного описания поля напряжений необходимо учитывать 11 слагаемых, а на $\hat{r} = r/a = 0.55$ — по меньшей мере 19. Графики распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$, изображенные на рисунке 1.27, свидетельствуют о том, что к предельному точному решению распределения стремятся при сохранении двадцати пяти слагаемых. Кривая, построенная с помощью разложения, состоящего из двадцати слагаемых, все еще значительно отличается от кривых, построенных с сохранением большего числа слагаемых. На графиках 1.28 представлены

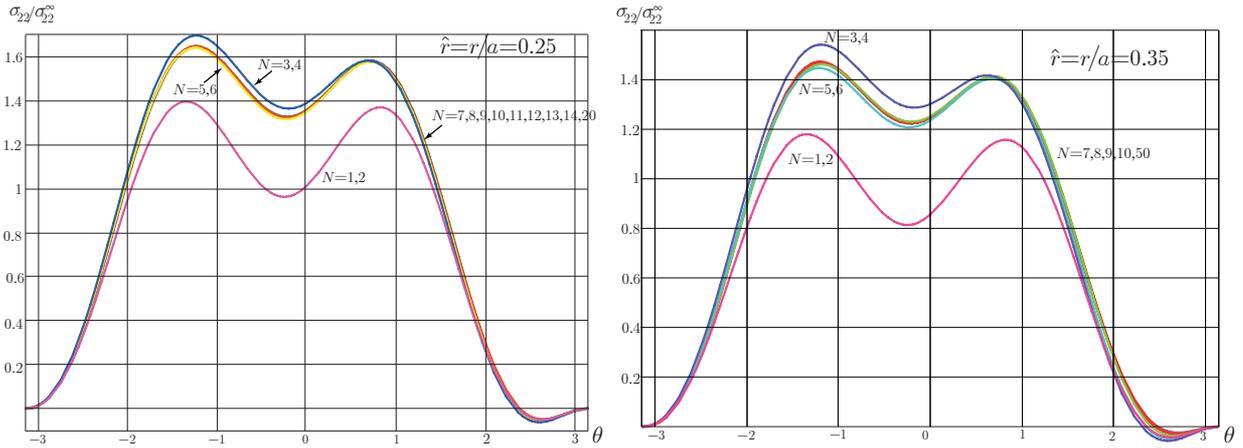


Рисунок 1.25 – Зависимость компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.25$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$

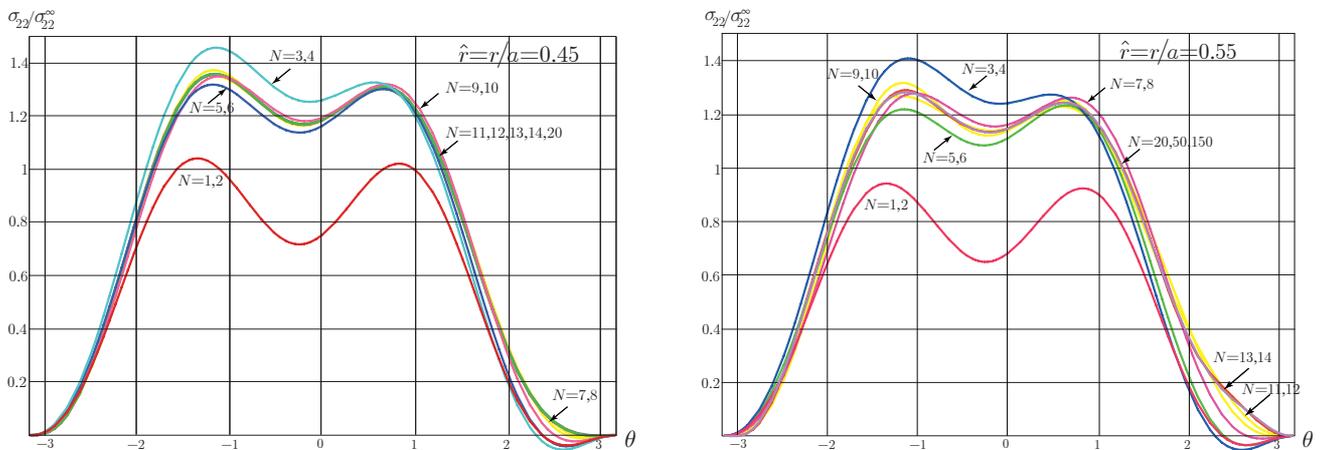


Рисунок 1.26 – Зависимость компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.45$ и $\hat{r} = r/a = 0.55$

угловые распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$, из которых явствует, что в выбранной области, окружающей вершину трещины, мультипараметрическое асимптотическое разложение М. Уильямса результативно описывает поле напряжений, но для получения описания, совпадающего с точным аналитическим решением, необходимо сохранить порядка сорока слагаемых. Мода нагружения, соответствующая поперечному сдвигу, не влияет принципиально на закономерность выбора количе-

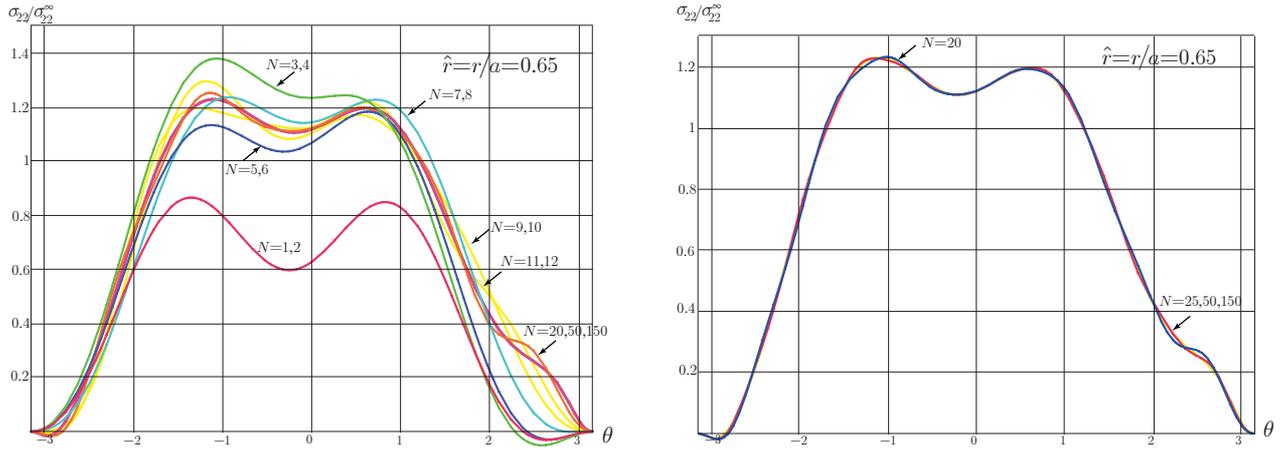


Рисунок 1.27 – Зависимость компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.65$

ства слагаемых – на рассматриваемых расстояниях у вершины трещины требуется сохранять то же количество слагаемых асимптотического ряда, что и в случае идеального нормального отрыва.

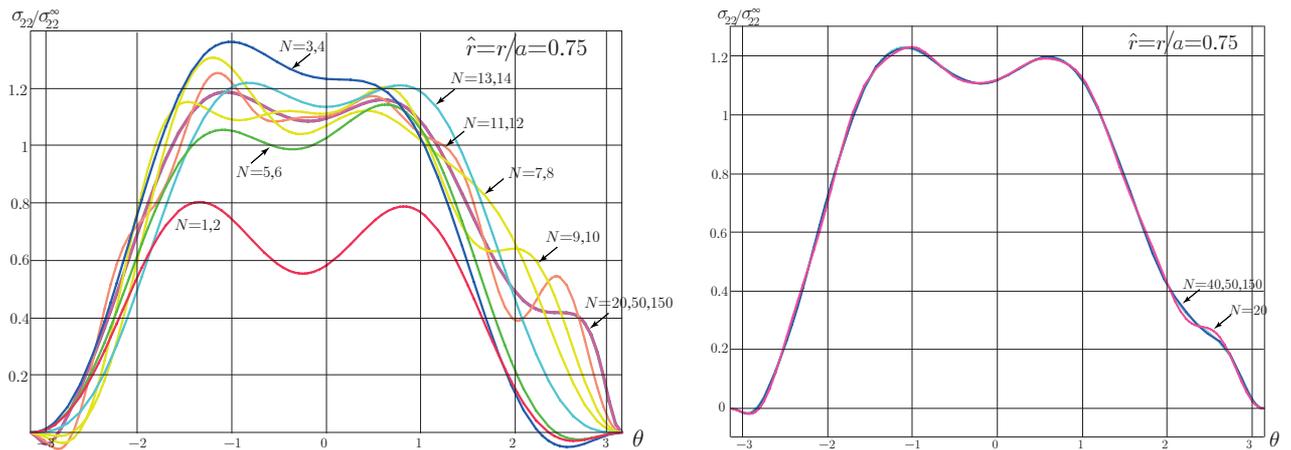


Рисунок 1.28 – Зависимость компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

На рисунках 1.29 – 1.31 представлены распределения компонент вектора перемещения вблизи кончика трещины в условиях смешанного нагружения. В целом, поля перемещений, как это следует из рисунков 1.29 – 1.31, проявляют меньшую чувствительность к увеличению расстояния от кон-

чика трещины, но, несмотря на это, требуют сохранения в ряде Уильямса одиннадцати – тринадцати слагаемых при $\hat{r} = 1.5$.

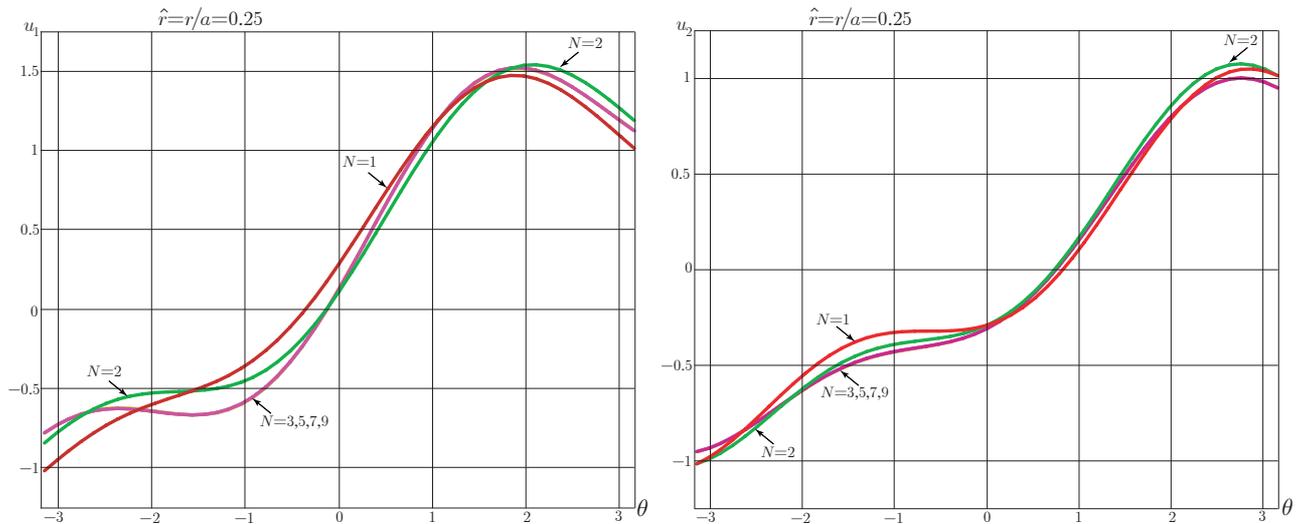


Рисунок 1.29 – Зависимость компонент вектора перемещения $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ в условиях смешанного нагружения на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.25$

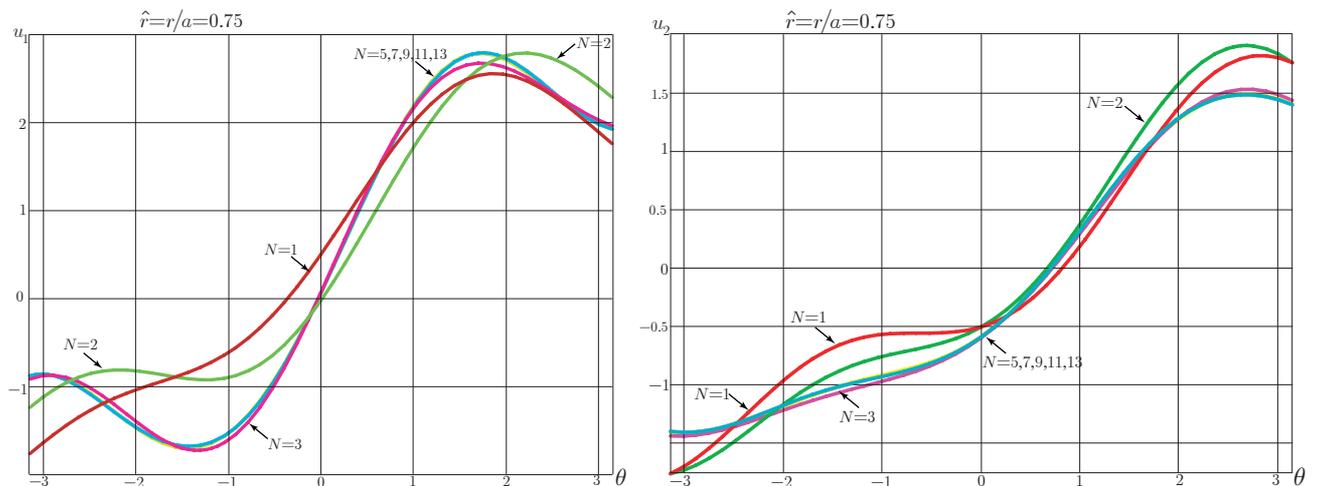


Рисунок 1.30 – Зависимость компонент вектора перемещения $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины $z = a$ в условиях смешанного нагружения на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

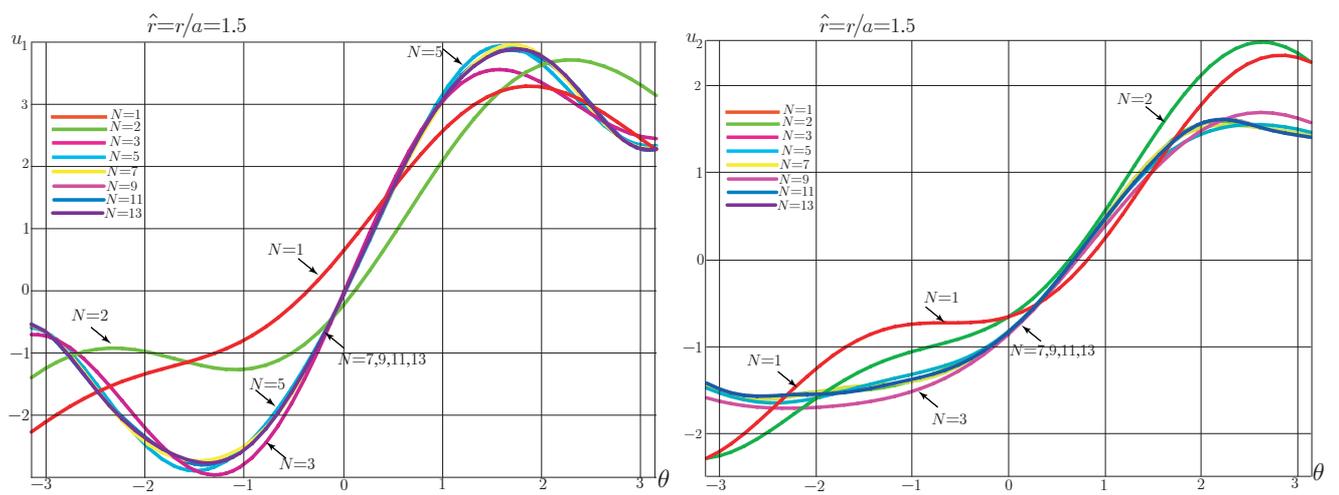


Рисунок 1.31 – Зависимость компонент вектора перемещения $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ от полярного угла θ у вершины трещины в условиях смешанного нагружения на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.5$

1.4.5. Бесконечная пластина, ослабленная центральной трещиной, расклинивающейся двумя противоположно направленными сосредоточенными силами

Описание полей напряжений для конфигурации, представляющей пластину с центральной трещиной, на берегах которой приложены две противоположно направленные сосредоточенные расклинивающие силы (рисунок 1.32), аналогичным методом может быть реализовано путем обращения к представлению решения через комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили.

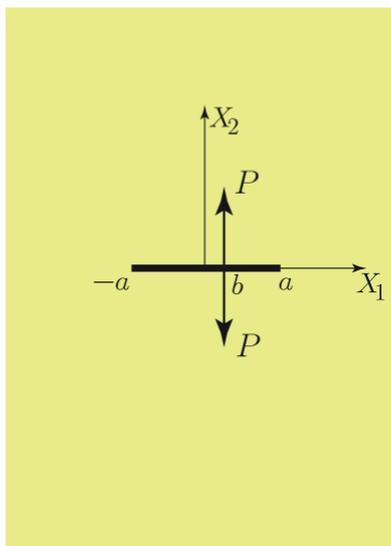


Рисунок 1.32 – Модель бесконечной пластины с центральной трещиной и приложенными к ней сосредоточенными силами

Разложение комплексного потенциала в ряд в окрестности вершины трещины позволяет вычислить масштабные множители ряда Уильямса, что предоставляет возможность оценить роль неособых слагаемых в разложении и сравнить ряды, содержащие слагаемые различного порядка малости. Комплексный потенциал для рассматриваемой конфигурации опре-

деляется следующим соотношением

$$\varphi_1'(z) = \frac{P\sqrt{b^2 - a^2}}{\pi} \frac{1}{(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (1.30)$$

Масштабные (амплитудные) коэффициенты можно вычислить по формуле

$$a_{2n+1}^1 = \frac{P\sqrt{a+b}}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!(a-b)^{k-n-\frac{1}{2}}}{2^{3k+\frac{1}{2}}(k!)^2 a^{k+\frac{1}{2}}}. \quad (1.31)$$

Вычисление коэффициентов ряда М. Уильямса (1.31) открывает возможности для 1) изучения полей напряжений и смещений на разных расстояниях от вершины трещины и 2) анализа асимптотических разложений полей напряжений, получаемых путем сохранения различного числа слагаемых ряда. На рисунках 1.33, 1.34 изображены угловые распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, $\sigma_{22}(r, \theta)$, $\sigma_{12}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ на расстоянии $\hat{r} = 0.75$ от вершины трещины. Сплошные кривые, изображенные на рисунках 1.33 и 1.34, получены с помощью сохранения различного количества слагаемых асимптотического ряда: $N = 1, 15, 35, 45$ и 91 . Ромбами представлено точное решение, полученное на основе теории аналитических функций. При анализе показанных графиков обнаруживается, что сохраняя сорок пять слагаемых в асимптотическом разложении, можно получить приближенное решение, хорошо согласующееся с точным решением.

Таким образом, можно сделать вывод, что рассматриваемая конфигурация является более чувствительной к количеству удерживаемых в разложении слагаемых, по сравнению с пластиной с центральной трещиной, к которой приложена равномерная нагрузка на бесконечности. Для точной оценки напряженного состояния в пластине на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от вершины трещины в случае с приложенными нагрузками на бесконечности достаточно сохранять тринадцать слагаемых, в то время как для текущей конфигурации с приложенными сосредоточенными силами необ-

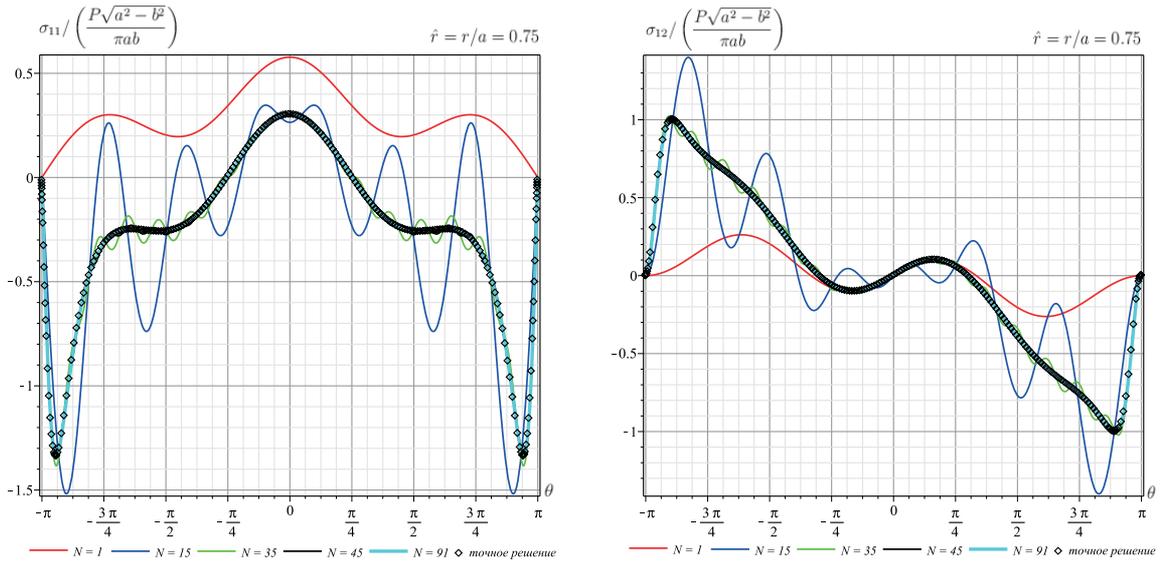


Рисунок 1.33 – Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ и $\sigma_{12}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

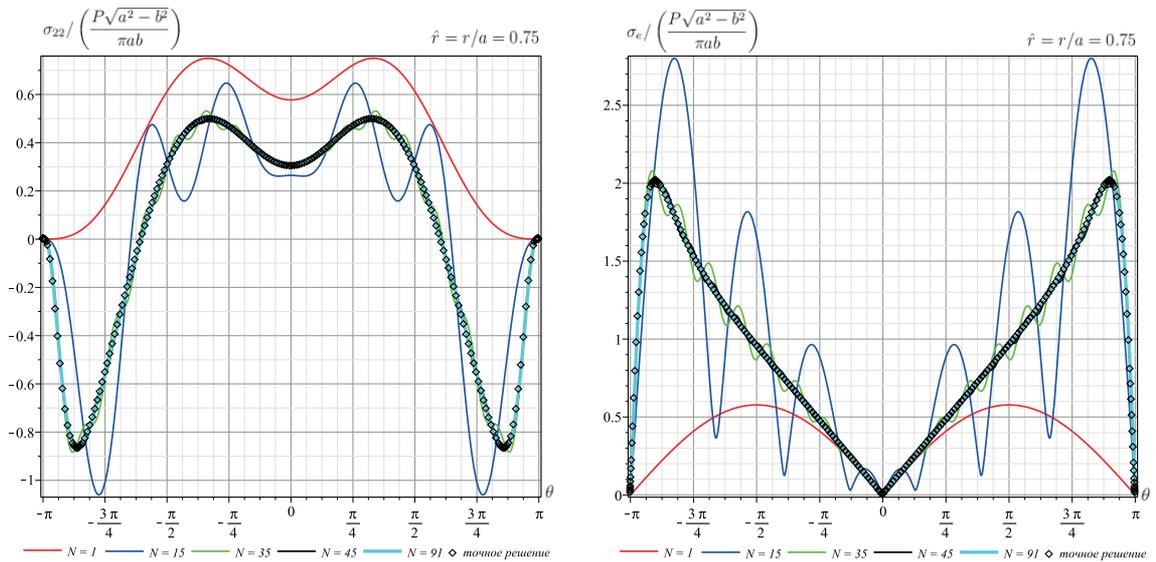


Рисунок 1.34 – Угловые распределения компонент $\sigma_{22}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

ходимо удерживать сорок пять слагаемых.

1.4.6. Бесконечная пластина, ослабленная двумя боковыми надрезами, под действием двух противоположно направленных, действующих по вертикальной оси сосредоточенных сил

Комплексный потенциал для четвертой конфигурации (рисунок 1.35) – бесконечной пластины, ослабленной двумя боковыми горизонтальными вырезами с вершинами в точках $-a$ и a соответственно, находящейся под действием противоположно направленных по вертикальной оси сосредоточенных сил P , приложенных в точках $(0, -y_0)$ и $(0, y_0)$ (рисунок 1.35), можно представить следующим соотношением [20, 34, 148]

$$\varphi_1'(z) = \frac{P}{\pi} \left[f(z, y_0) - \alpha y_0 \frac{\partial f(z, y_0)}{\partial y_0} \right], \quad (1.32)$$

где $f(z, y_0) = \frac{y_0}{y_0^2 + z^2} \sqrt{\frac{a^2 + y_0^2}{a^2 - z^2}}$.

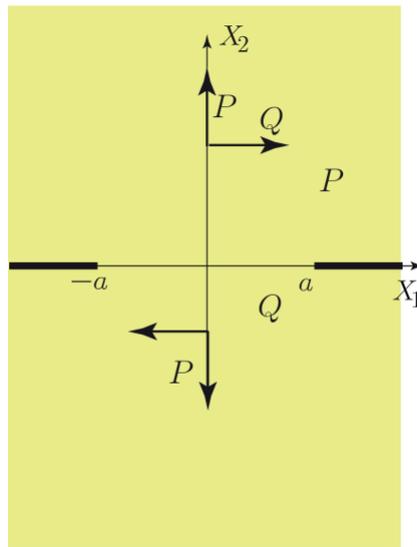


Рисунок 1.35 – Модель бесконечной пластины с двумя боковыми надрезами под действием двух сосредоточенных сил

Ниже для краткости рассматривается действие только силы P , ибо, как показано выше, смешанное нагружение, вызываемое действием силы Q ,

не приведет к изменению выводов о значении и роли неособых слагаемых вблизи переднего края трещины. Масштабные (амплитудные) множители, соответствующие нормальному отрыву, определяются выражениями

$$a_{2n+1}^1 = \frac{C_1 \zeta_n}{2n+1}, \quad a_{2n}^1 = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (1.33)$$

где введены обозначения

$$C_1 = \frac{Py_0 [a^2 + y_0^2 - \alpha (a^2 + 2y_0^2)]}{\pi \sqrt{a^2 + y_0^2}}, \quad C_2 = \frac{y_0^2 [y_0^2 + a^2(1 + \alpha)]}{a^2 + y_0^2 - \alpha (a^2 + 2y_0^2)},$$

$$\zeta_n = \sum_{l=0}^n \xi_l \gamma_{n-l}, \quad \xi_n = \sum_{l=0}^n \alpha_l \beta_{n-l}, \quad \gamma_n = \sum_{l=0}^n \delta_l \eta_{n-l},$$

$$\alpha_0 = a^2 + C_2, \quad \alpha_1 = -2a, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_k = 0, \quad \forall k > 2,$$

$$\beta_n = \frac{|2n-1|!!}{2^{2n+1/2} a^{n+1/2} n!}, \quad \delta_n = \frac{n+1}{(a + iy_0)^{n+2}}, \quad \eta_n = \frac{n+1}{(a - iy_0)^{n+2}}.$$

Угловые распределения компонент тензора напряжений для различных расстояний от вершины трещины и значений $\hat{y}_0 = y_0/a$ приведены на рисунках 1.36 – 1.38. На рисунках 1.36 – 1.38 изображены зависимости компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ для различных расстояний от вершины трещины левого выреза: $\hat{r} = 0.25, \hat{r} = 0.5, \hat{r} = 0.75$. С выбранной точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ выявлены необходимые количества сохраняемых слагаемых для рассматриваемой конфигурации: для определения напряженного состояния при $\hat{y}_0 = y_0/a = 1$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$ установлено, что достаточно удерживать семнадцать слагаемых в усеченном разложении Уильямса. Увеличивая область наблюдения напряженного состояния до $\hat{r} = r/a = 0.5$ и $\hat{r} = r/a = 0.75$, можно найти, что для совпадения приближенного решения с точным решением, полученным с помощью ТФКП, необходимо учитывать 29 и 45 слагаемых соответственно. Нельзя не упомянуть, что при близком расположении точек приложения сосредоточенных нагрузок ($\hat{y}_0 = y_0/a = 1$) к вершинам надрезов (рисунок 1.36) вслед-

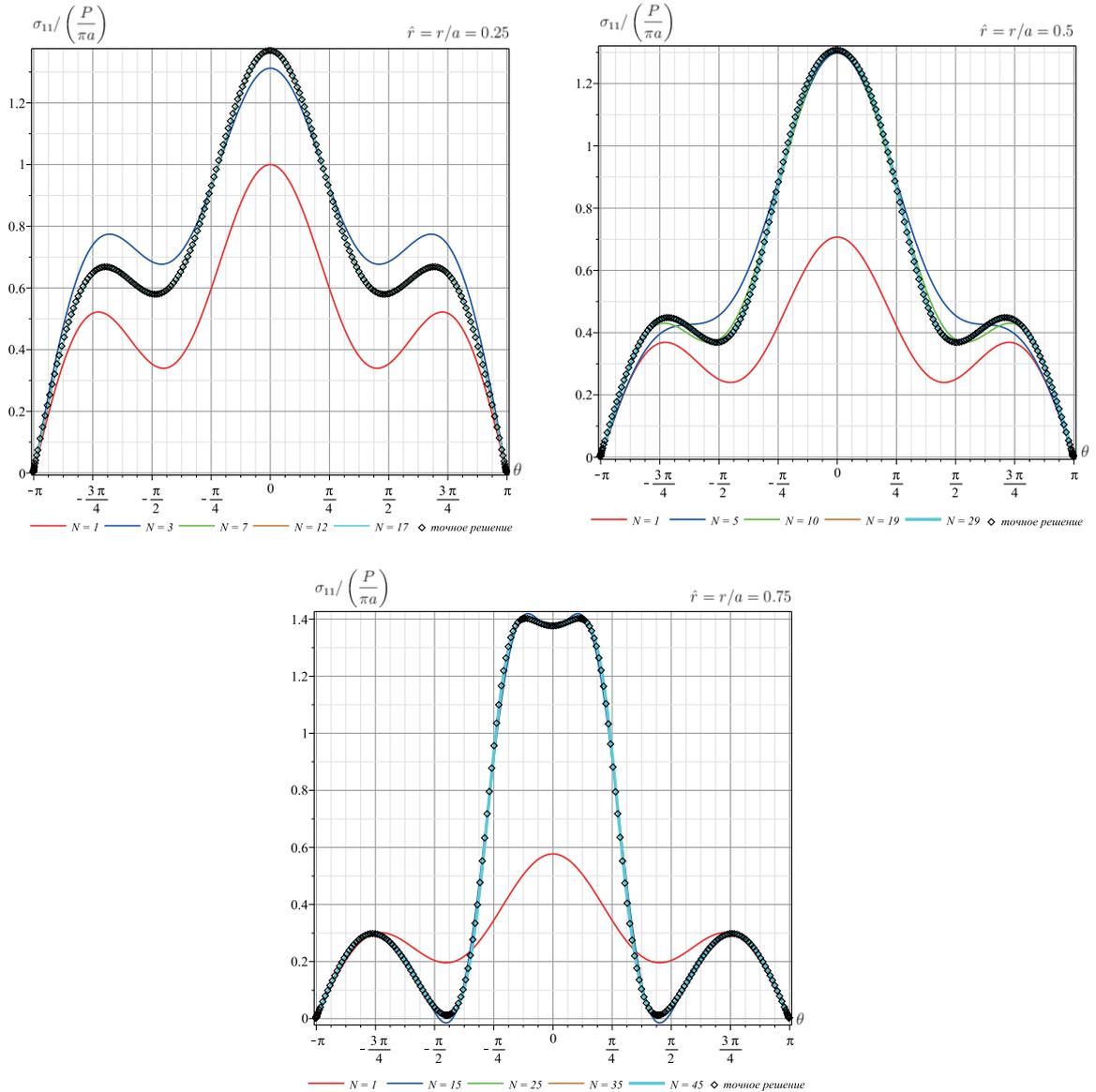


Рисунок 1.36 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстояниях от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.25$, $\hat{r} = r/a = 0.5$, $\hat{r} = r/a = 0.75$ и приложенными нагрузками в точках $(0, 1)$ и $(0, -1)$

ствие высокой концентрации напряжений выявляется более высокая чувствительность приближенного решения к количеству удерживаемых слагаемых. При отдалении точек приложения нагрузок на более дальние расстояния от центра пластины, например, приняв $\hat{y}_0 = y_0/a = 1.5$, как на рисунке 1.37, обнаруживается, что для корректного описания поля напря-

жений на расстояниях от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.25$, $\hat{r} = r/a = 0.5$ и $\hat{r} = r/a = 0.75$, достаточно сохранять 17, 23 и 35 слагаемых соответственно. При отдалении точек приложения нагрузок можно заметить стабилизацию количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении. Установив $\hat{y}_0 = y_0/a = 5$ или выше, подобным образом можно определить необходимое количество слагаемых на расстояниях от вершины трещины 0.25, 0.5 и 0.75: 13, 19 и 25. Анализ напряженного состояния, проведенный для нескольких модификаций рассматриваемой конфигурации, приводит к выводу, что важным фактором для выбора количества слагаемых в асимптотическом разложении Уильямса является не только радиус области у вершины трещины, но и координаты точек приложения нагрузок в конфигурации. Изменение \hat{y}_0 влечет за собой изменение чувствительности конфигурации к выбору количества удерживаемых слагаемых, необходимых для более эффективного описания напряженного состояния в окрестности вершины трещины. Следовательно, можно описать закономерность: приближение точек приложения сосредоточенных сил непосредственно к началу системы координат требует сохранения в асимптотическом разложении слагаемых более высоких порядков.

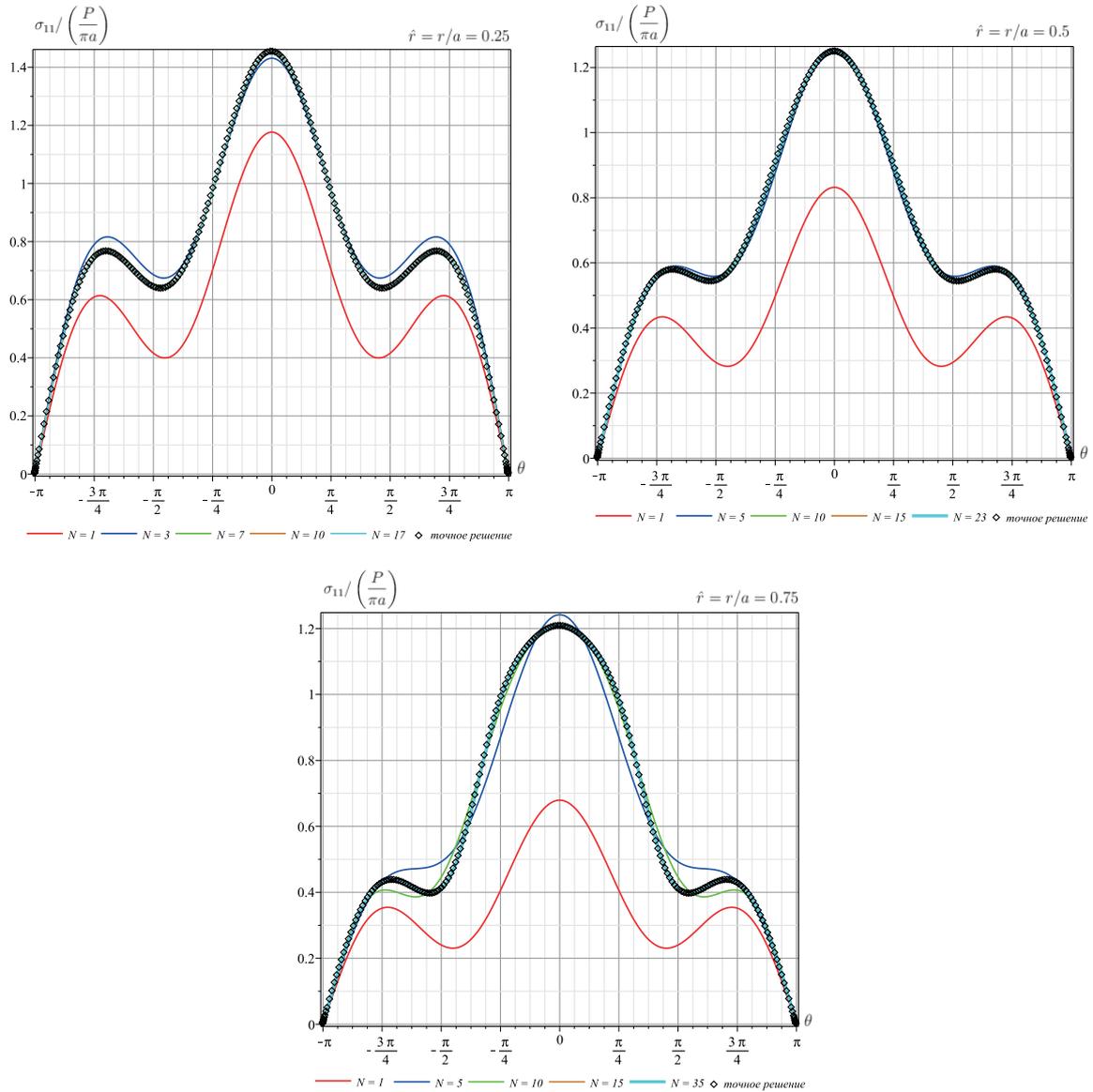


Рисунок 1.37 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстояниях от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.25$, $\hat{r} = r/a = 0.5$, $\hat{r} = r/a = 0.75$ и приложенными нагрузками в точках $(0, 1.5)$ и $(0, -1.5)$

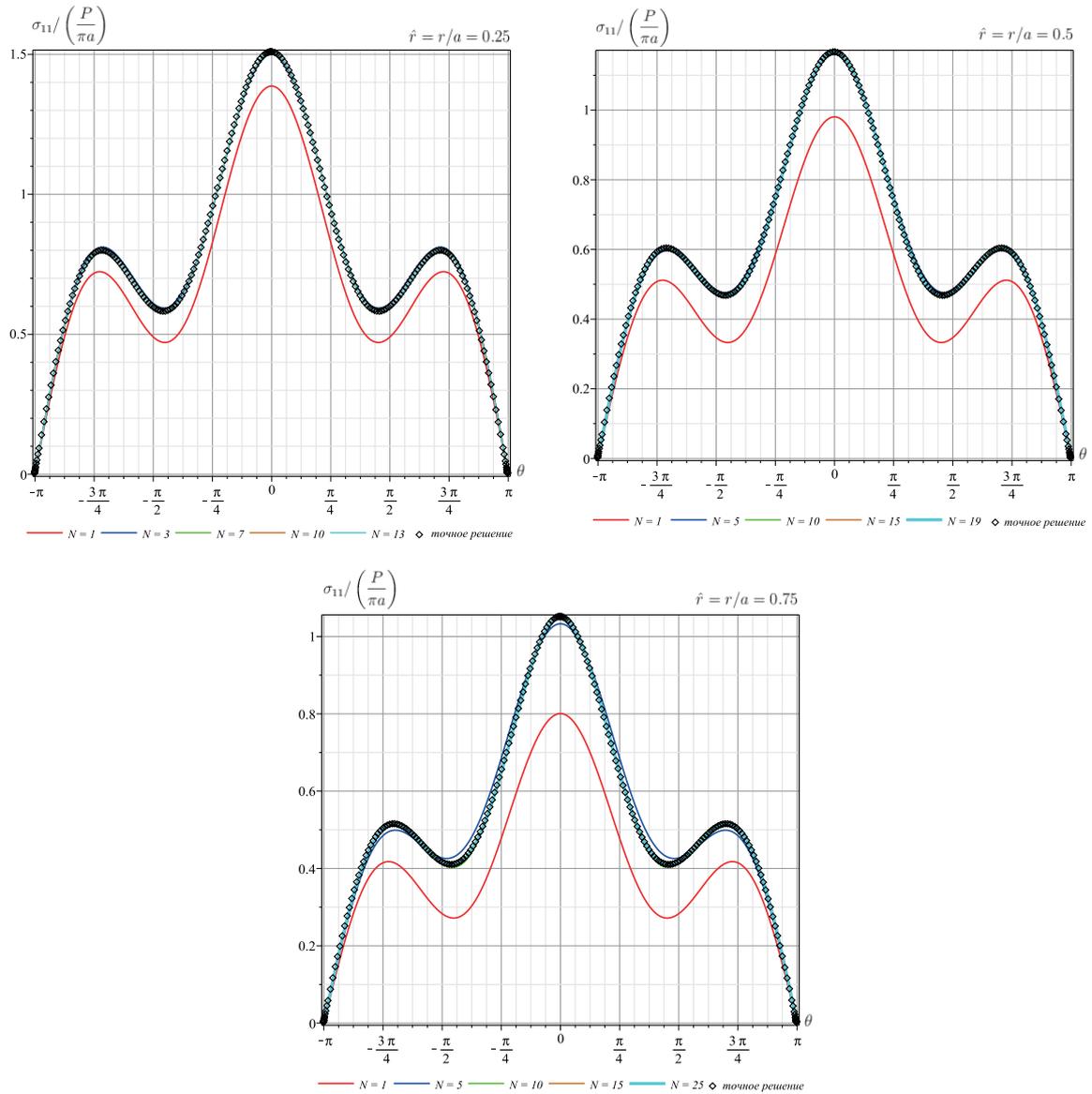


Рисунок 1.38 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстояниях от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.25$, $\hat{r} = r/a = 0.5$, $\hat{r} = r/a = 0.75$ и приложенными нагрузками в точках $(0, 5)$ и $(0, -5)$

1.4.7. Напряженное состояние бесконечной линейно упругой плоскости, ослабленной краевым полубесконечным разрезом, находящимся под действием двух противоположно направленных сосредоточенных сил

Следующая рассматриваемая конфигурация (рисунок 1.39)– пластина с единственным боковым полубесконечным разрезом, к берегам которого приложены две противоположно направленные сосредоточенные силы.

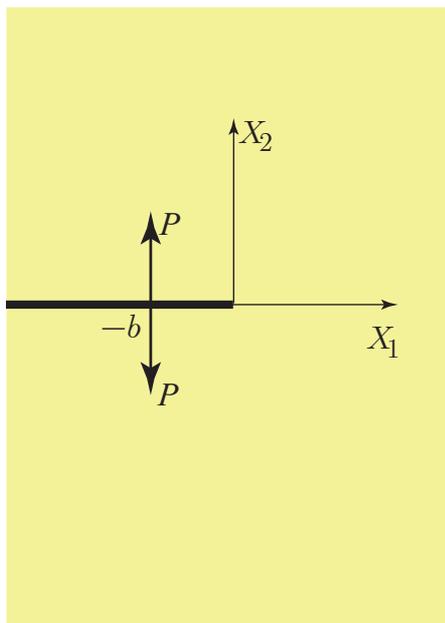


Рисунок 1.39 – Модель бесконечной пластины с одним боковым бесконечным разрезом под действием двух противоположно направленных сосредоточенных сил

Для рассматриваемой задачи комплексный потенциал выражается соотношением [34, 94]

$$\varphi_1'(z) = \frac{P\sqrt{b}}{\pi} \frac{1}{(z+b)\sqrt{z}}. \quad (1.34)$$

Раскладывая комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ в ряд в окрестности точки $(0,0)$ (в системе координат, связанной с вершиной разреза) и полагая

$z = re^{i\theta}$, можно получить масштабные множители асимптотического ряда Уильямса:

$$a_{2n+1}^1 = \frac{P}{\pi b^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}. \quad (1.35)$$

Используя аналогичный вышеизложенному подход, можно получить напряженное состояние пластины в зоне вершины трещины на характерном расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$. Полученные в результате угловые распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, $\sigma_{22}(r, \theta)$, $\sigma_{12}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ приведены на графиках 1.40 и 1.41.

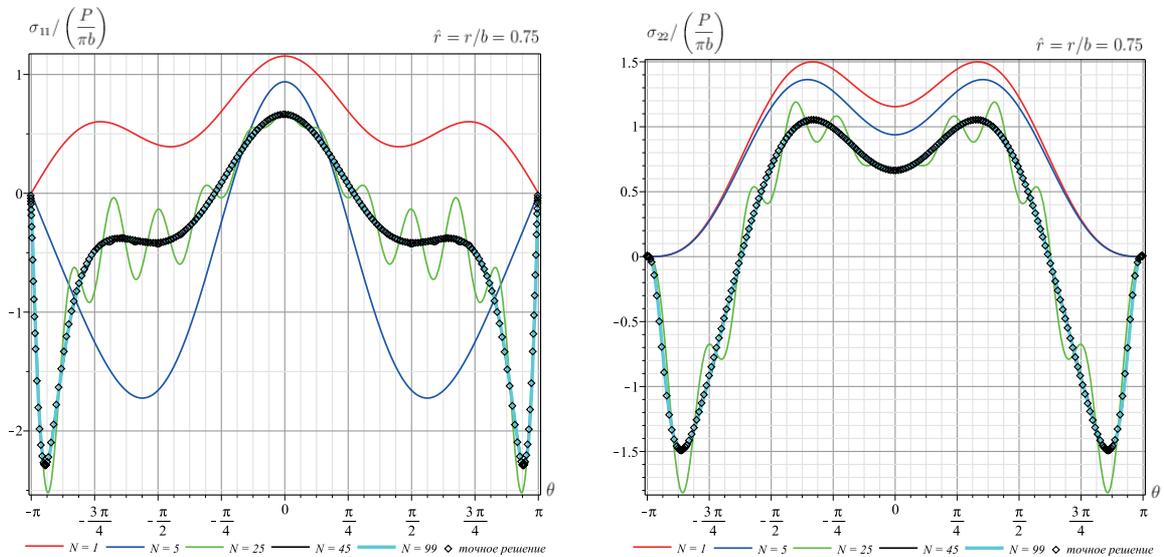


Рисунок 1.40 – Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины полубесконечного разреза

Судя по результатам, можно прийти к схожему выводу: конфигурации пластин с трещинами, находящиеся под действием сосредоточенных сил, являются более чувствительными к числу слагаемых в ряде Уильямса – в рамках рассматриваемой задачи на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ требуется сохранять 45 слагаемых в многопараметрическом разложении. Общая

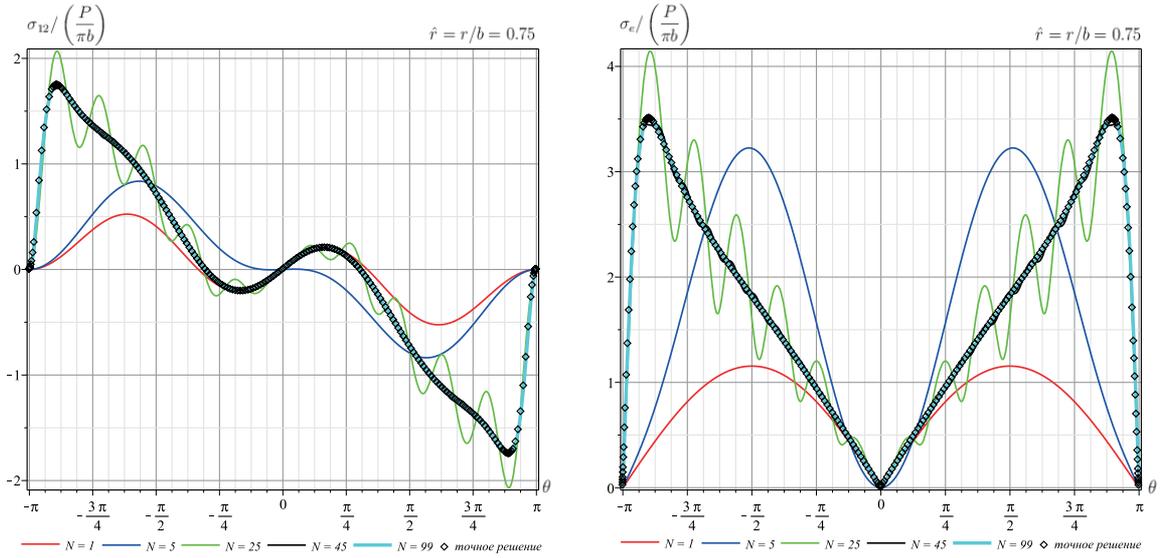


Рисунок 1.41 – Угловые распределения касательных напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ у вершины полубесконечного разреза

тенденция отчетлива: чем больше рассматриваемая область, включающая вершину трещины, тем больше членов ряда необходимо удерживать. Конфигурации с сосредоточенными силами требуют большее число неособых слагаемых. Как правило, экспериментаторами удерживается от пяти до десяти слагаемых ряда Уильямса, однако, для конфигураций подобного рода такой подход не является корректным – требуется значительное увеличение числа слагаемых.

1.4.8. Деформирование бесконечной плоскости, ослабленной двумя краевыми полубесконечными разрезами, к берегам которых приложены пары противоположно направленных сосредоточенных сил

Для пластины с двумя краевыми разрезами, на берегах которых приложены сосредоточенные силы (рисунок 1.42), комплексный потенциал Колосова – Мусхелишвили описывается выражением

$$\varphi_1'(z) = \frac{2Pb\sqrt{b^2 - a^2}}{\pi} \frac{1}{(b^2 - z^2)\sqrt{a^2 - z^2}}, \quad (1.36)$$

где $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ – координаты вершин полубесконечных разрезов, $(b, 0)$ и $(-b, 0)$ – координаты точек приложения сосредоточенных сил, P – величина приложенной силы, отнесенной к толщине пластины. Замкнутая форма решения для коэффициентов разложения Уильямса позволяет сохранить любое заранее заданное количество слагаемых ряда:

$$a_{2n+1}^1 = \frac{Pb}{\pi(2n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{(2k)!}{2^{3k-\frac{1}{2}}(k!)^2 a^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{(b-a)^{l+\frac{1}{2}}(b+a)^{n-k-l+\frac{1}{2}}} \right) \quad (1.37)$$

$$a_{2n}^1 = 0.$$

Необходимо учесть, что амплитудные множители с четными индексами обращаются в нуль, следовательно, если приложены сосредоточенные нагрузки, T -напряжения отсутствуют. Графики угловых распределений компонент тензора напряжений для рассматриваемой конфигурации изображены на рисунках 1.43 и 1.44. Из иллюстраций видно, что пятнадцатичленное разложение имеет существенное отличие от приведенного точного решения. Увеличивая количество слагаемых до двадцати пяти и тридцати пяти, можно наблюдать распределения, более соответствующее точному решению, однако, им присущи значительные колебания. Наконец, для расстояния $\hat{r} = r/a = 0.75$ в окрестности вершины трещины, построение

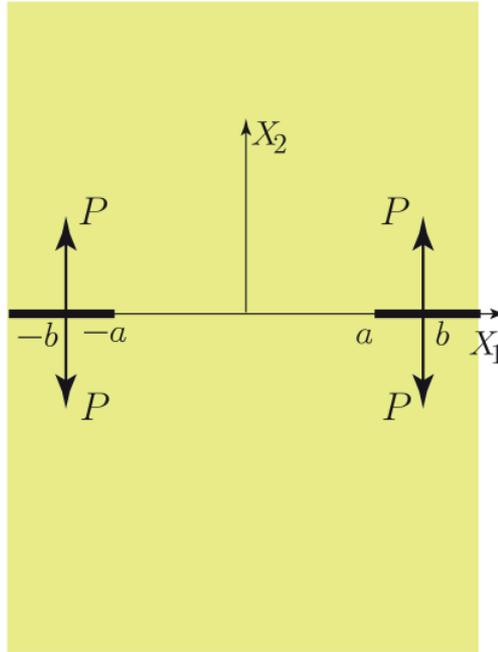


Рисунок 1.42 – Модель бесконечной пластины с двумя боковыми разрезами под действием двух сосредоточенных сил

разложения из восьмидесяти трех слагаемых дает хорошее соответствие точному решению и дальнейшее увеличение числа слагаемых не меняет картину.

Таким образом, для данной конфигурации присуща ранее выведенная закономерность: эффективное описание поля напряжений достигается лишь при учете высших приближений в многопараметрическом разложении Уильямса.

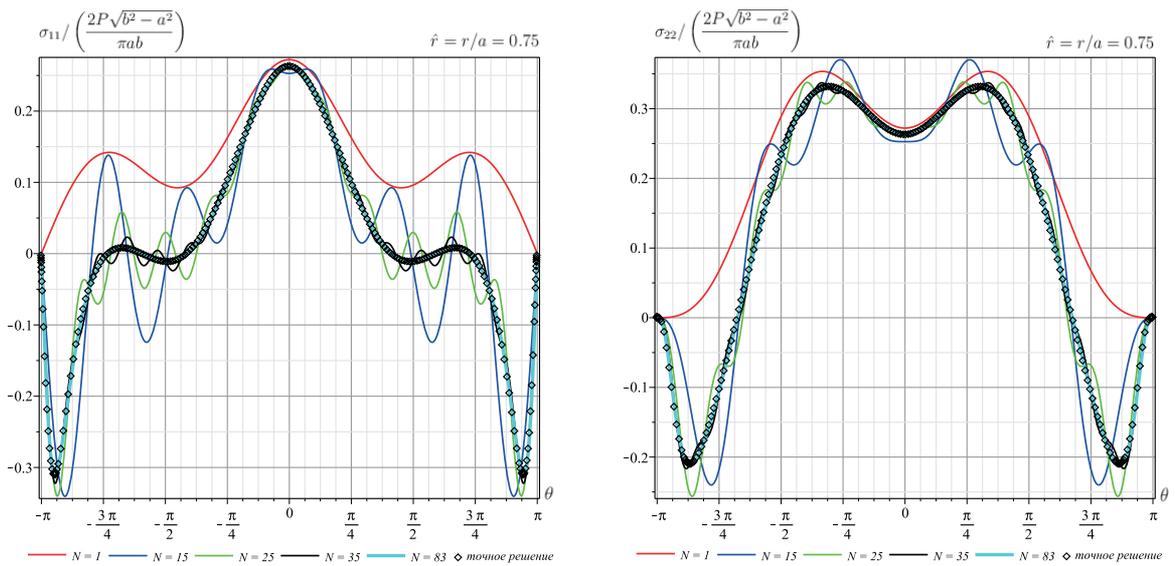


Рисунок 1.43 – Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины разреза

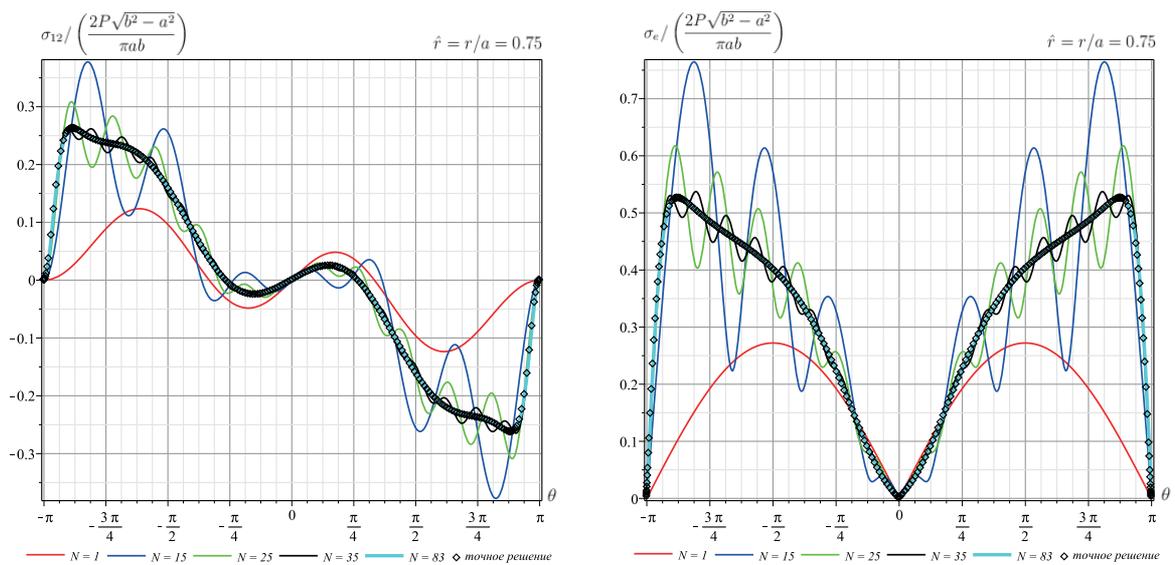


Рисунок 1.44 – Угловые распределения касательных напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ у вершины разреза

1.4.9. Бесконечная пластина, ослабленная полубесконечной трещиной, с жестким плоским включением

Последняя конфигурация, анализируемая в настоящей главе, представляет собой бесконечную пластину с одним боковым включением и трещиной (рисунок 1.45).

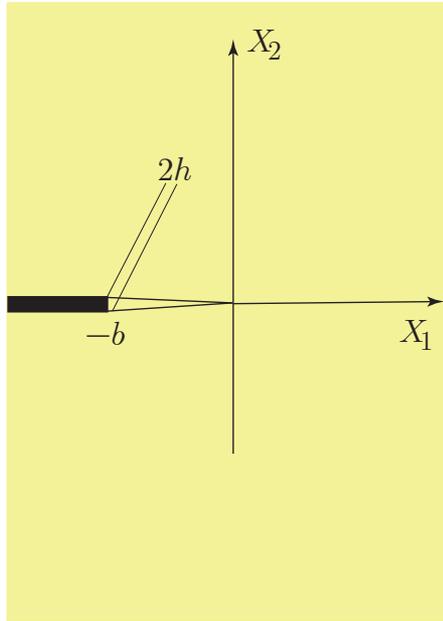


Рисунок 1.45 – Модель бесконечной пластины с разрезом и жестким включением

Для рассматриваемой конфигурации комплексный потенциал Колосова – Мусхелишвили описывается выражением

$$\varphi_1'(z) = \frac{E'h}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z+b}\sqrt{z}}, \quad (1.38)$$

где $2h$ – толщина жесткого включения, E' – модуль Юнга ($E' = E$ в случае плоского деформированного состояния и $E' = E/(1-\nu^2)$ в случае плоского напряженного состояния), $(-b, 0)$ – координата вершины жесткого включения.

Амплитудные множители могут быть вычислены с помощью ранее изложенного подхода. Раскладывая комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ в окрест-

ности точки $z = 0$ и полагая $z = re^{i\theta}$ в (1.38), можно получить

$$a_{2n+1}^1 = \frac{E'h}{\pi b^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} (2n+1) (n!)^2}. \quad (1.39)$$

Аналогично рассмотренным ранее задачам, имеется возможность анализа влияния усеченных на различном количестве слагаемых асимптотического ряда на поле напряжений в пластине с включением. Впервые анализ данной конфигурации был приведен в работе [94], однако, особый интерес сейчас представляет рассмотрение областей с различными размерами радиуса зоны вокруг вершины разреза и выяснение зависимости учета высших приближений от радиуса окрестности вершины трещины. С этой целью в настоящей работе проведена серия вычислительных экспериментов, результаты которой приведены на графиках 1.46 – 1.53. На рисунке 1.46 проиллюстрированы угловые функции – распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины разреза на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.025$: приведены усеченные разложения, а также точное решение. Для выбранного расстояния, как это следует из рисунка 1.46, достаточно сохранять три члена асимптотического решения, поскольку оно хорошо согласуется с точным решением. Необходимо отметить, что для настоящей конфигурации так же, как и для предыдущей, справедливо отсутствие T -напряжений и коэффициенты ряда с четными индексами обращаются в нуль. Далее следующим шагом будет анализ напряженного состояния в более широкой области вокруг вершины разреза. Так, на графиках 1.47 приведены распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины дефекта на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.05$. Из графиков 1.47 хорошо видно, что на увеличенном до 0.05 расстоянии трехчленного асимптотического разложения все еще достаточно для качественного описания поля напряжений. Увеличение радиуса зоны анализа напряженного состояния до $\hat{r} = r/b = 0.1$ (рисунок 1.48) уже приводит к необходимости учета высших приближений – для точно-

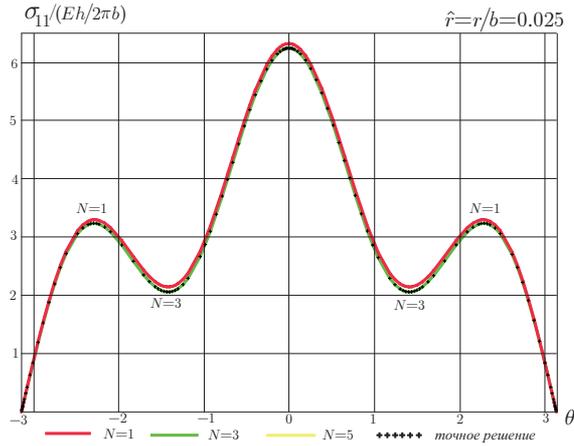


Рисунок 1.46 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.025$

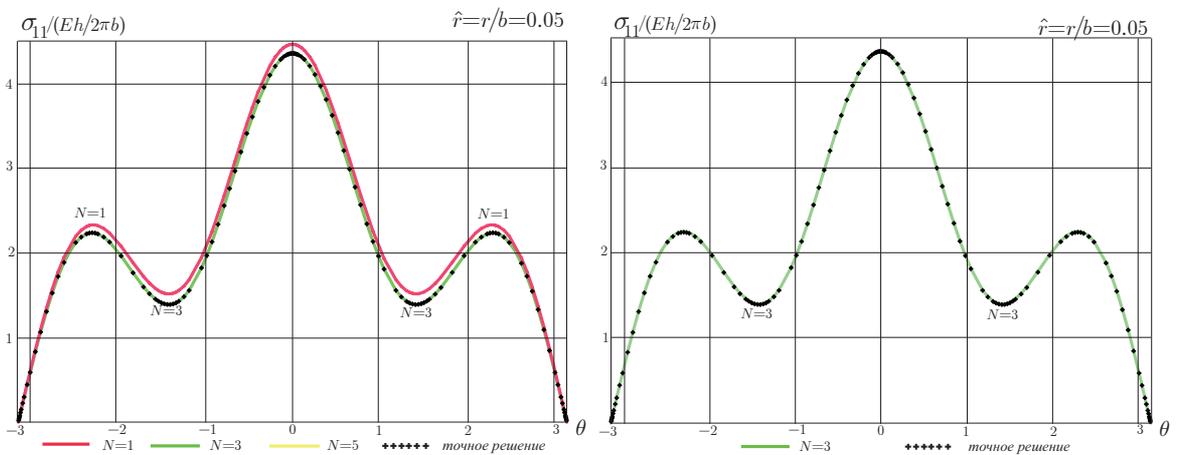


Рисунок 1.47 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.05$

го описания компонент тензора напряжений необходимо сохранить пять слагаемых в асимптотическом разложении, поскольку кривая качественно и количественно совпадает с кривой, даваемой точным решением задачи. Последующее расширение окрестности вершины разреза закономерно требует сохранения слагаемых более высокого порядка. Например, из рисунка 1.49, где приведены графики распределений компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ в радиусе от вершины трещины $\hat{r} = r/b = 0.25$, следует, что для качественного

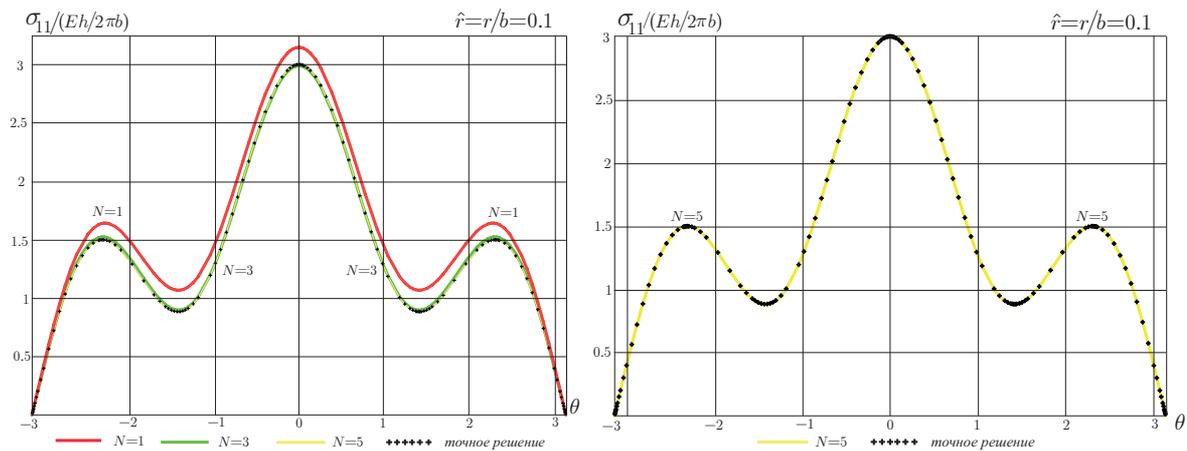


Рисунок 1.48 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.1$

описания поля напряжений, согласующегося с точным решением, необходимо сохранять семь слагаемых. К значительному росту количества слага-

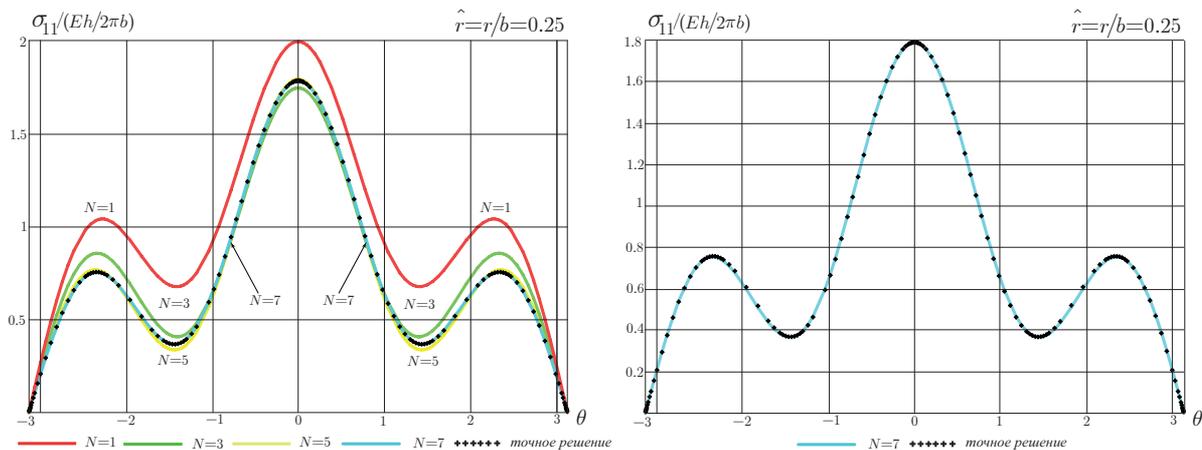


Рисунок 1.49 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.25$

емых приводит расширение зоны, для которой будет корректно асимптотическое представление Уильямса. Соответственно, асимптотический ряд из тринадцати слагаемых не совпадает с точным решением, и, в целом, на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.5$ от кончика трещины следует учитывать семнадцать слагаемых многопараметрического представления Уильямса. Выбор

между пятнадцатью и семнадцатью членами разложения основывается на достижении наперед заданной точности, поэтому в выбранной окрестности для достижения точности $\varepsilon = 10^{-6}$ следует использовать семнадцатичленное разложение. Увеличение расстояния от вершины трещины до

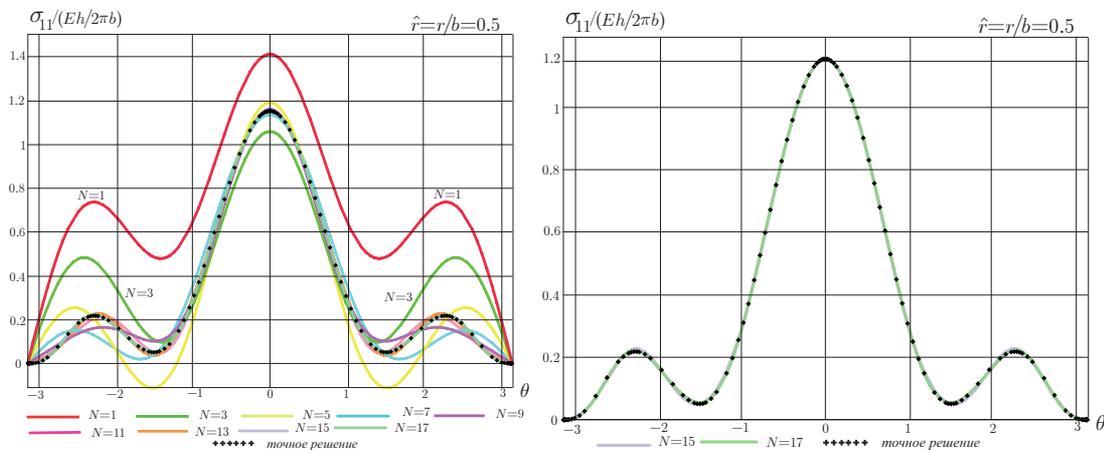


Рисунок 1.50 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.5$

$\hat{r} = r/b = 0.75$ приводит к необходимости увеличения количества слагаемых усеченного ряда. Как изображено на рисунке 1.51, для рассматриваемого радиуса окрестности вершины трещины в рамках выбранной точности необходимо будет сохранить сорок девять слагаемых, так как именно такое количество дает совпадение приближенного решения с точным теоретическим решением с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. При увеличении расстояния до $\hat{r} = r/b = 0.85$ наблюдается резкое увеличение членов ряда асимптотического разложения, необходимых для удержания. Результат сравнения угловых распределений (рисунок 1.52), полученных с помощью усеченных рядов Уильямса и решения, корящегося на концепциях ТФКП, приводит к заключению о выборе усеченного ряда из восьмидесяти слагаемых для хорошего согласования решений. На графиках 1.53 проиллюстрированы угловые функции распределения касательных напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$.

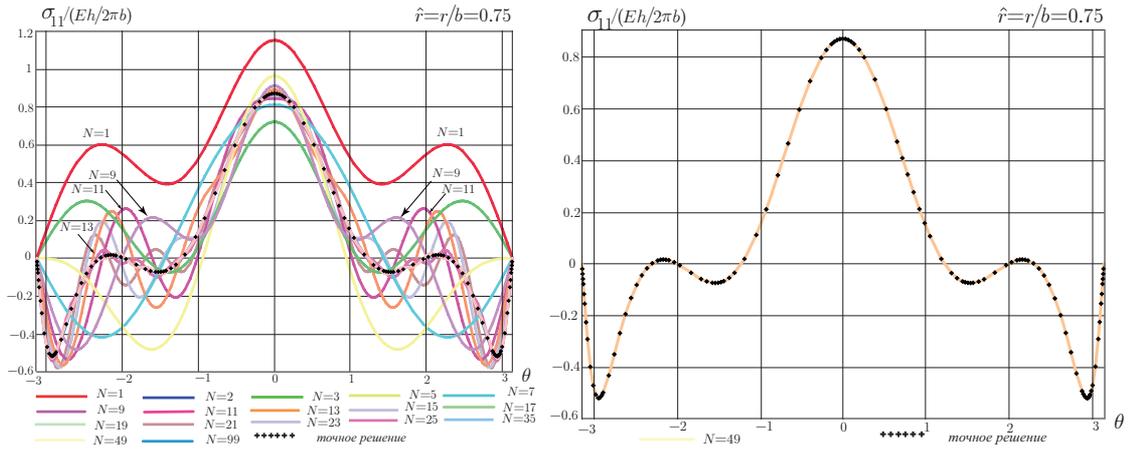


Рисунок 1.51 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.75$

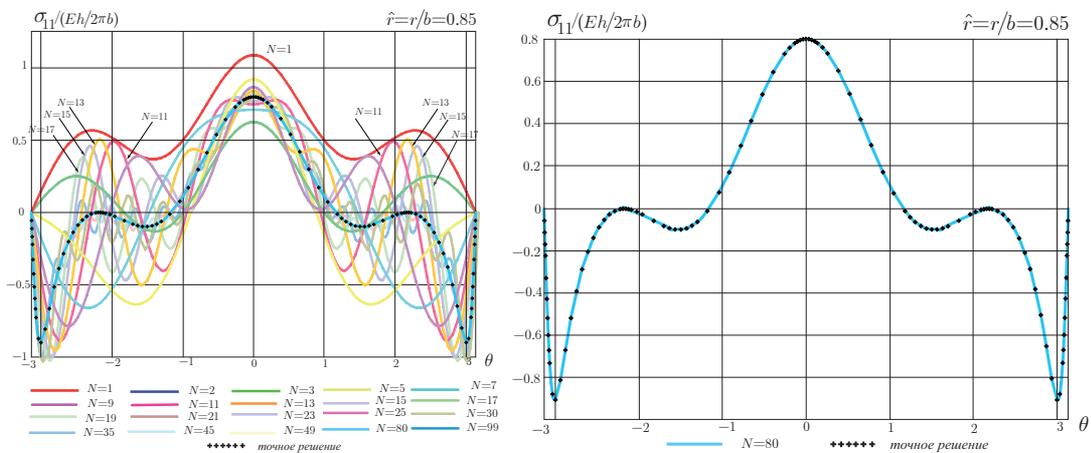


Рисунок 1.52 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.85$

Как и для распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$, ранее продемонстрированной на рисунке 1.50, на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.5$ достаточно удерживать семнадцать слагаемых для достижения указанной выше точности. На рисунке 1.54 продемонстрированы распределения $\sigma_{22}(r, \theta)$: на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.75$, как и для нормального напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$, требуется не менее сорока девяти слагаемых.

Таким образом, можно заключить вывод о сохранении общей тенденции

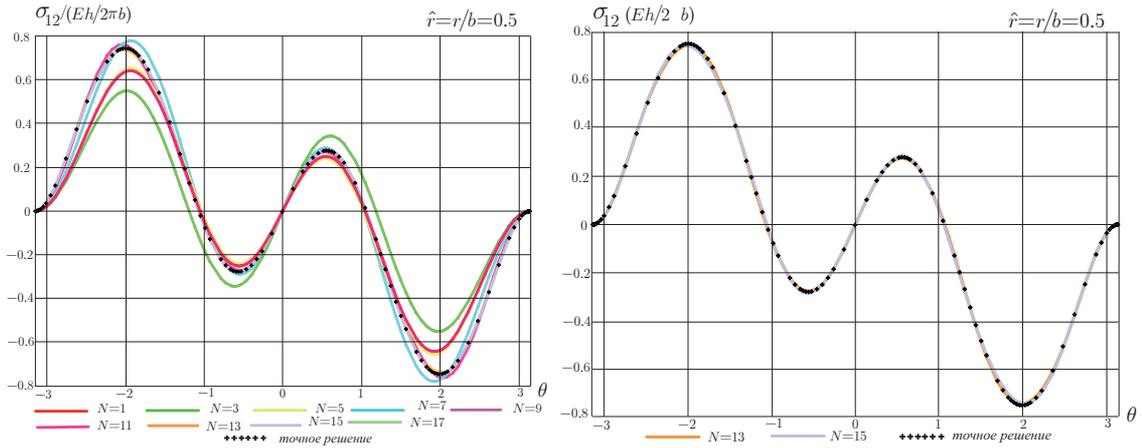


Рисунок 1.53 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.5$

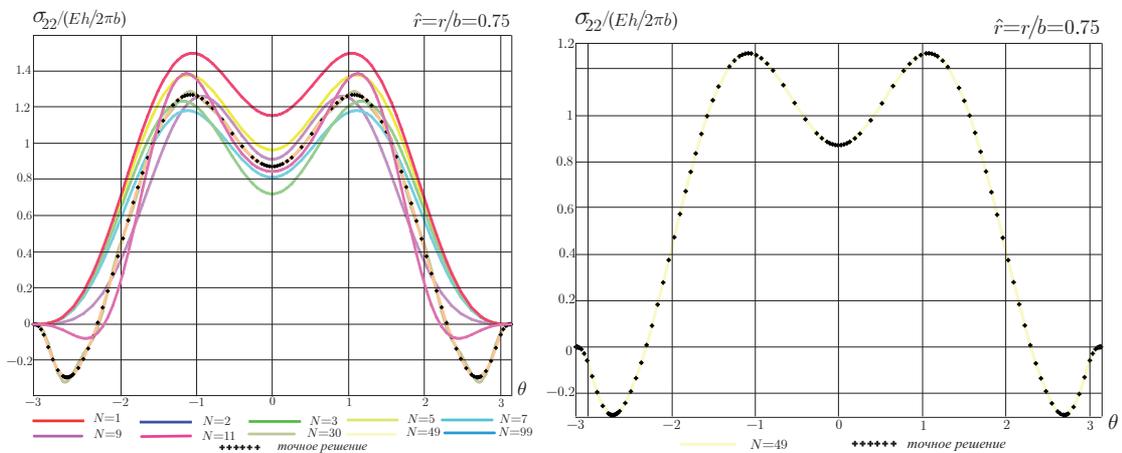


Рисунок 1.54 – Угловые распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины трещины с включением на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.75$

и для конфигурации о пластины с жестким включением – корректное описание поля напряжений в окрестности вершины трещины достигается лишь с учетом высших приближений в асимптотическом разложении Уильямса. Расширение окрестности вершины трещины с включением приводит к насущной необходимости учета слагаемых высоких порядков в многопараметрическом представлении поля напряжений.

1.5. Выводы и обсуждение результатов Главы 1

В главе проанализирована серия плоских конфигураций образцов с дефектами, для которых имеются точные аналитические решения, полученные с помощью комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили. На базе существующих комплексных потенциалов для образцов всех конфигураций получены коэффициенты асимптотического ряда Уильямса и исследовано воздействие увеличения размеров рассматриваемой зоны вокруг трещины на количество удерживаемых регулярных слагаемых ряда Уильямса: чем больше расстояние до кончика трещины или надреза, тем больше слагаемых должно удерживать.

Показано, что высшие приближения играют первостепенную роль для целостного описания поля напряжений, количество слагаемых зависит от геометрии образца с дефектом и совокупности приложенных нагрузок.

Результаты, полученные в настоящей главе, полезны для интерпретации и обработки экспериментальной информации, которую можно получить на основе интерференционно-оптических методов, поскольку для корректного извлечения и последующего использования экспериментальных данных, необходимо ясное понимание о размере области, окружающей вершину дефекта, в пределах которой исследователем собираются экспериментальные данные.

Результаты исследования можно использовать в задаче восстановления масштабных коэффициентов ряда Уильямса из расчетов, получаемых с помощью метода конечных элементов, так как это позволяет более аккуратно решать проблему выбора массива значений из узлов конечно-элементной сетки, необходимых для дальнейшей обработки.

Таким образом, в процессе интерференционно-оптических экспериментов и вычислительного анализа выбор экспериментальных данных требу-

ется проводить с учетом теоретических решений классической механики разрушения, поскольку:

1. Применение многопараметрического разложения Уильямса дает возможность существенного расширения области, окружающей вершину трещины или разреза, внутри которой можно точно определить напряженное состояние с помощью экспериментального и/или вычислительного подходов.
2. Сохранение регулярных слагаемых ведет к значительному увеличению точности решения. Отказ от неособых слагаемых более высоких порядков приводит к серьезным погрешностям, которые могут появиться при выборе даже сравнительно небольших зон измерений.

Поэтому, с учетом проведенного исследования, не остается сомнений, что первых двух приближений редко хватает для достижения точного результата, а построение приближений более высокого порядка зачастую представляет собой нетривиальную задачу. По этой причине, экспериментальное и вычислительное определение коэффициентов ряда Уильямса должно происходить на основе имеющихся теоретических оценок.

Технику проведенного исследования можно распространить на задачу построения асимптотических решений нелинейных задач определения напряженного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести (в том числе для сред с нелинейными определяющими уравнениями).

Глава 2. Экспериментальное определение масштабных коэффициентов ряда Уильямса для образцов с трещинами

Настоящая глава посвящена экспериментальному определению коэффициентов многопараметрического ряда Уильямса для серии образцов с трещинами на основе интерференционно-оптических методов. В качестве основного метода был избран метод цифровой фотоупругости, к которому в последнее время возвращается научный интерес в связи с многоплановыми приложениями [141].

Фотоупругость благодаря своему удивительно простому оптическому устройству и отсутствию жестких требований к виброизоляции получила широкое признание [1, 42, 53, 54, 139, 143, 156] и зарекомендовала себя как отличный инструмент для визуализации и количественной оценки полей напряжений и деформаций. Основы фотоупругости подробно изложены в монографиях и руководствах [1, 42, 53, 54, 139, 143, 156]. Образование полос во всех вариантах фотоупругости [1, 42, 53, 54, 139, 143, 156] обусловлено явлением временного двулучепреломления, проявляемого моделями и покрытиями. Открытие явления временного двулучепреломления, которое обычно приписывается Брюстеру, теперь приписывается Зеебеку вследствие относительно недавней статьи Абена [60]. Отцом фотоупругости считается М. Фрохт благодаря своему основополагающему вкладу и своим классическим работам по фотоупругости [53].

С 1990 года новые разработки в сфере сбора опытных данных коренным образом изменили способы получения и обработки данных в условиях фотоупругости [133, 138, 139]. Ранние разработки многих из этих методов были красиво обобщены и сформировали определяющие положения цифровой фотоупругости [139], использующие методы цифровой обработки

изображений для обработки данных фотоупругого эксперимента. Одним из аспектов, на котором было сосредоточено внимание в 1990-х годах, была разработка новых оптических устройств [141]; но теперь, после двух десятилетий исследований, он стабилизировался с точки зрения того, что даже обычных оптических устройств вполне достаточно для получения необходимого объема данных с использованием современных подходов. Сейчас основное внимание приходится на алгоритмы обработки интерференционных карт, позволяющих с высокой точностью рассчитать требуемые величины. Преимущество фотоупругого метода заключается в получении полной картины поля напряжений в виде полос, которые дают разность главных напряжений (изохроматические полосы) и их ориентации (картины изоклин). Количественное описание интерференционных картин изохром и изоклин требует измерений в большом количестве точек, и для получения дробных порядков полос требуются трудоемкие методы компенсации. Ранее было предпринято несколько попыток автоматизировать сбор данных [134]. С появлением цифровых систем обработки изображений на базе компьютера за последние два десятилетия были достигнуты значительные успехи в автоматизации сбора данных из всего изображения [139]. При цифровой обработке изображение идентифицируется как набор пикселей, и каждому пикселю присваивается номер от 0 до 255 в зависимости от интенсивности пропускаемого или отраженного света. В случае цветной фотографии изображение идентифицируется как суперпозиция плоскостей изображения красного, зеленого и синего цветов. По аналогии с черно-белым изображением в системах обработки интенсивность световой волны определяется количественно в диапазоне от 0 до 255, но для каждой плоскости изображения R, G и B (красного, зеленого и синего цветов).

В настоящей работе было проведено экспериментальное исследование серии образцов с дефектами методом цифровой фотоупругости, ставящее

своей задачей отыскание параметров ряда Уильямса высоких порядков. Экспериментальное исследование для каждого образца с дефектом состояло из нескольких этапов.

1. Изготовление образца – пластины с дефектом или несколькими дефектами (трещинами и надрезами) из оптически чувствительного материала. В рамках настоящей работы используются эпоксидная смола ЭД-20 и полиметилметакрилат.
2. Испытание образца на проекционно-поляризационной установке ППУ-7 (рисунок 2.1). Пластина подвергалась противоположно направленным растягивающим нагрузкам, действующим вдоль вертикальной оси.
3. Получение фотографий – цифровых изображений изохроматических картин, получаемых в ходе деформирования образца.
4. Цифровая обработка фотографий: загрузка изображений в программу, базирующуюся на алгоритме сканирования графического файла с целью выявления точек с наименьшей освещенностью для каждой изохроматической полосы и сохранение точек с наименьшей освещенностью в отдельные файлы, используемые далее для вычисления параметров механики разрушения.
5. Использование итерационной процедуры переопределенного метода для решения системы уравнений, следующих из оптико-механического закона Вертгейма, с целью определения масштабных множителей многопараметрического ряда Уильямса.
6. Анализ результатов: сравнение найденных экспериментально значений коэффициентов ряда Уильямса со значениями, полученными для близких конфигураций другими методами.

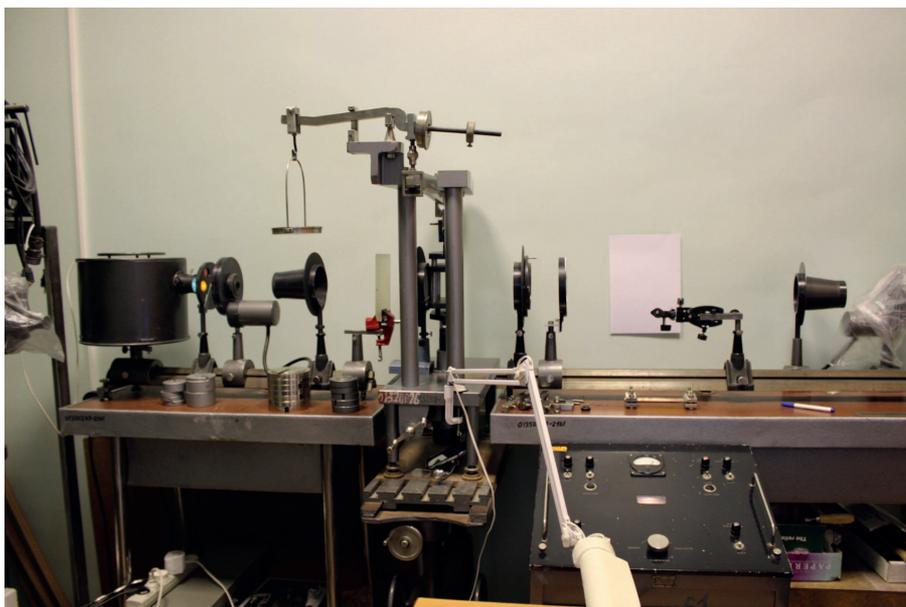


Рисунок 2.1 – Проекционно-поляризационная установка ППУ-7

2.1. Основной закон фотоупругости – закон Вертгейма

Под двойным лучепреломлением понимается эффект, при котором световой луч, проходящий через оптически активное тело, разделяется на два луча, обладающие разной скоростью распространения и получившие названия обыкновенного и необыкновенного лучей [53, 143]. Закон фотоупругости гласит [53]: «Если прозрачная оптически изотропная пластинка находится в плоском напряженном состоянии в пределах упругости, то вызванная временным двойным лучепреломлением относительная разность хода δ для взаимно перпендикулярных, распространяющихся в пластине составляющих волны определяется по формуле:»

$$\delta = N\lambda = ct(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (2.1)$$

где N – порядок изохроматической полосы; λ – длина волны; c – оптическая константа материала; t – толщина пластинки; σ_1, σ_2 – главные напряжения.

Формулу (2.1) можно представить в ином виде

$$N f_{\sigma} / t = \sigma_1 - \sigma_2, \quad (2.2)$$

где $f_{\sigma} = \lambda / (ct)$ – цена полосы или оптическая постоянная материала, главные напряжения вычисляются по известным формулам

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right]. \quad (2.3)$$

2.2. Процедура тарировки

Перед экспериментальным нахождением параметров механики разрушения проводят процедуру тарировки (калибровки) с целью определения оптической постоянной материала f_{σ} . Для решения поставленной задачи проведен эксперимент на сжатие образца, изготовленного из оптически чувствительного материала. В настоящем случае это – диск с противоположно направленными сосредоточенными силами, действующими вдоль диаметра диска. В рамках настоящей работы в качестве тестируемого образца выбран диск из эпоксидной смолы ЭД-20 (ниже описана традиционная процедура и ее результаты для эпоксидной смолы). Определить цену изохроматической полосы можно с помощью цикла приложений различных нагрузок, в процессе эксперимента применены следующие нагрузки: 11.76 МПа, 13.72 МПа, 17.65 МПа, 20.59 МПа. Серия тарировочных экспериментов проведена при помощи проекционно-поляризационной установки ППУ-7 (рисунок 2.1). На рисунках 2.2 и 2.3 показаны исходные изохроматические полосы в сжатом диске, полученные для испытаний для каждой нагрузки, и фотографии интерференционных картин, обработанные в специально созданном цифровом приложении, нацеленном на автоматический выбор наиболее темных точек изохроматических полос (особенности работы разработанного приложения будут описаны ниже). Координаты выделенных точек

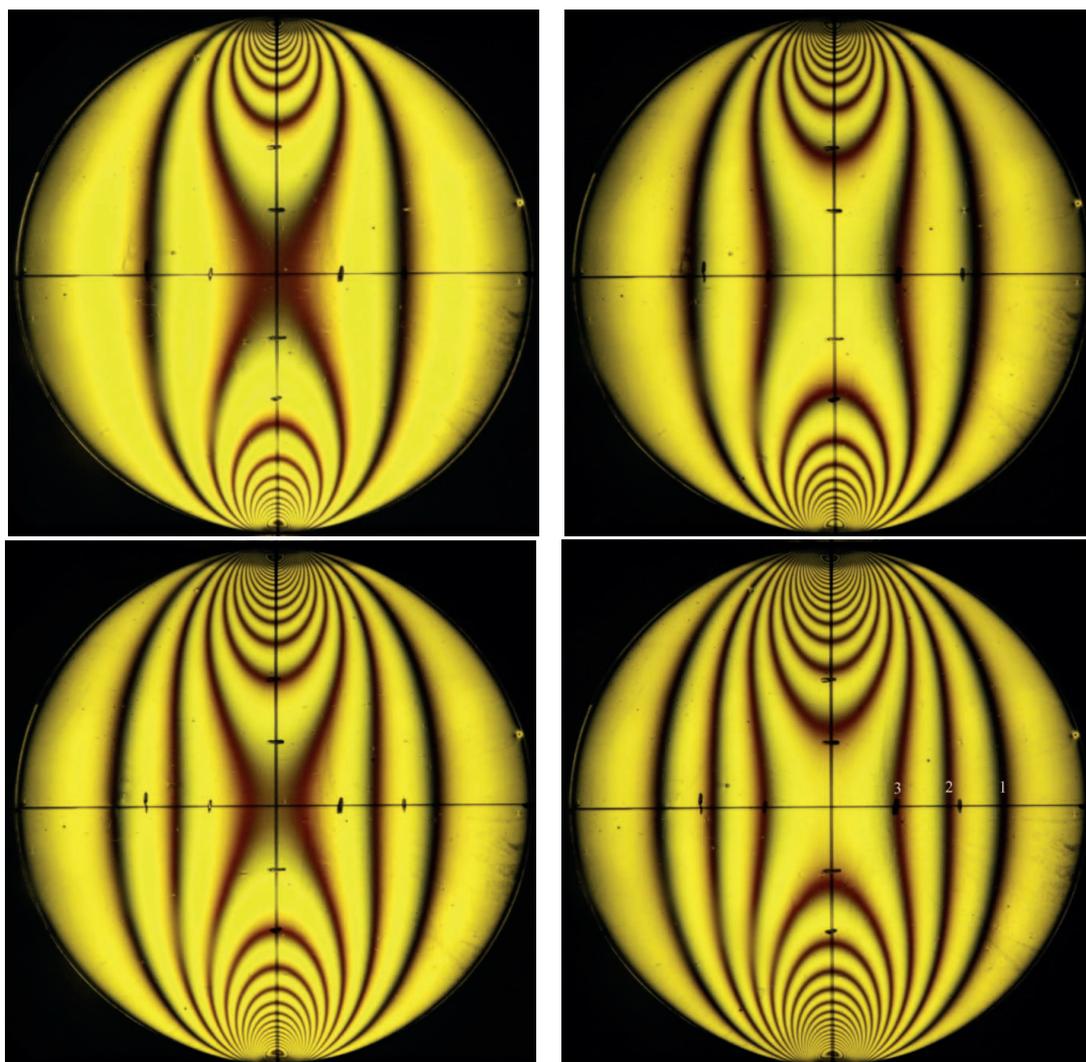


Рисунок 2.2 – Диск, диаметрально сжатый нагрузками 11.76 МПа, 13.72 МПа, 17.65МПа, 20.59МПа

для выбранных изохроматических полос в рамках каждого нагрузочно-испытания записывались в отдельные текстовые файлы как множество (N, r_i, θ_i) , где i – индекс точки изохроматической полосы, r_i, θ_i – полярные координаты точки, принадлежащей изохроматической полосе с номером N . Компоненты тензора напряжений в каждой точке диска могут быть

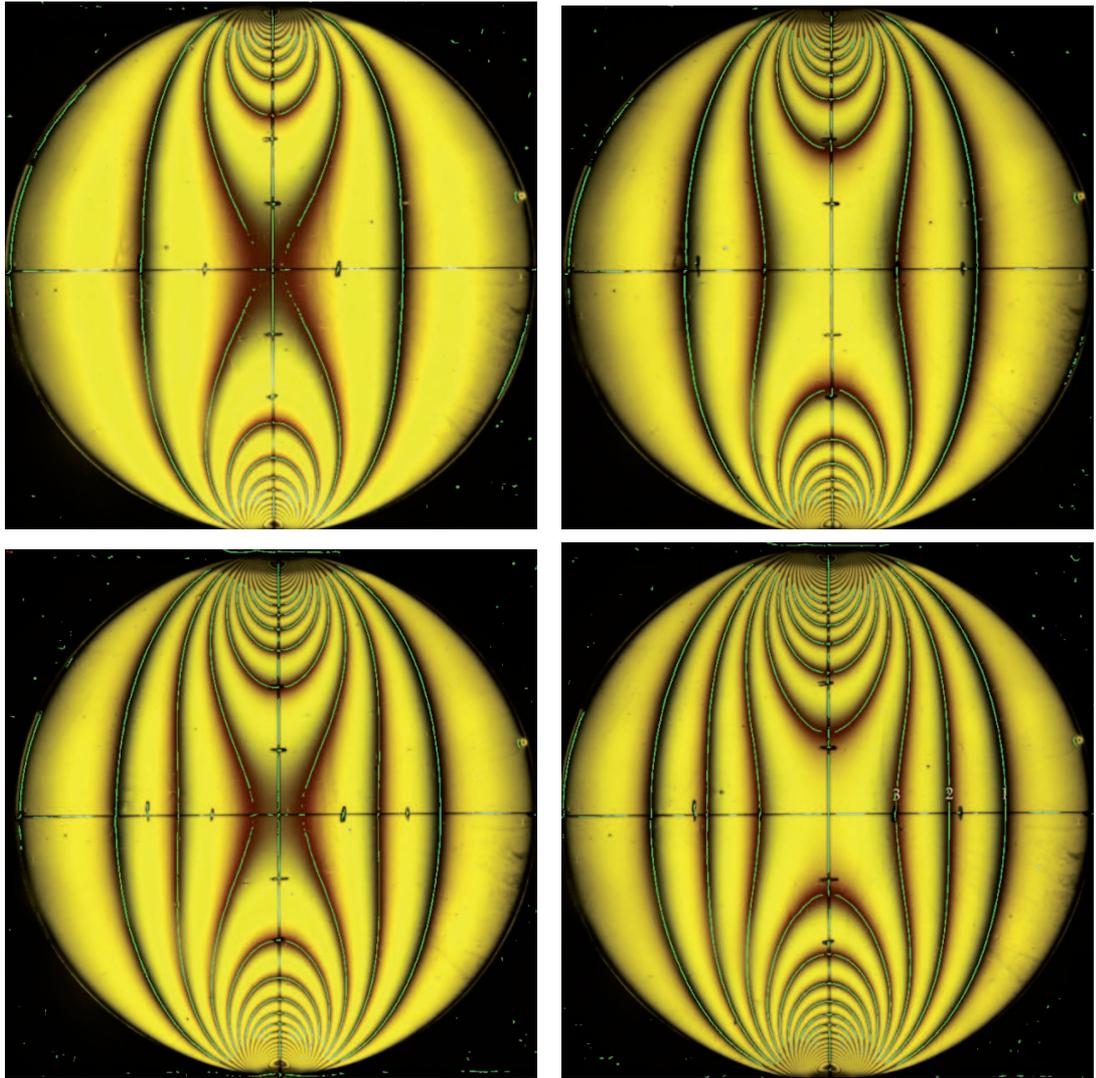


Рисунок 2.3 – Скелетон изохроматических полос в диаметрально сжимаемом диске для нагрузок 11.76 МПа, 13.72 МПа, 17.65 МПа, 20.59 МПа

вычислены с помощью соотношений [176]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} &= \frac{2P}{\pi t} \left\{ \frac{1}{2R} - \frac{(R - x_2)^3}{[x_1^2 + (R - x_2)^2]^2} - \frac{(R + x_2)^3}{[x_1^2 + (R + x_2)^2]^2} \right\}, \\
 \sigma_{11} &= \frac{2P}{\pi t} \left\{ \frac{1}{2R} - \frac{x_1^2(R - x_2)}{[x_1^2 + (R - x_2)^2]^2} - \frac{x_1^2(R + x_2)}{[x_1^2 + (R + x_2)^2]^2} \right\}, \\
 \sigma_{12} &= \frac{2P}{\pi t} \left\{ \frac{x_1(R - x_2)^2}{[x_1^2 + (R - x_2)^2]^2} - \frac{x_1(R + x_2)^2}{[x_1^2 + (R + x_2)^2]^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где R – радиус испытываемого диска, P – приложенная нагрузка, x_1, x_2 – декартовы координаты точек диска.

Итоговым значением цены полосы выбрано среднее среди результатов для всех рассмотренных точек. Реализация программы выполнена в среде компьютерной алгебры Waterloo Maple. Величины оптической константы материала для всех испытаний привели к среднему значению цены полосы материала, равной 1.831МПа/см.

2.3. Переопределенный метод для вычисления параметров механики разрушения

В рамках настоящей работы на основании исследований [138, 139] для определения параметров механики разрушения – масштабных коэффициентов асимптотического ряда Уильямса, введена функция, по сути представляющая собой невязку закона Вертгейма для m -й точки

$$g_m = \frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})_m^2 + (\sigma_{12})_m^2 - \left(\frac{N_m f_\sigma}{2t} \right)^2, \quad (2.5)$$

где m – порядковый номер точки из множества точек изохроматической полосы с номером N_m .

После подстановки асимптотических представлений Уильямса каждой компоненты тензора напряжений (1.1) в формулу (2.5) g_m становится нелинейной квадратичной функцией, зависящей от параметров $a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_L^2$, где K и L – количество параметров (количество сохраняемых слагаемых ряда Уильямса) для составляющих решения задачи, соответствующих нормальному отрыву и поперечному сдвигу. Функция g_m в общем случае не обращается в нуль для произвольно выбранных начальных приближений $(a_1^1)_0, (a_2^1)_0, \dots, (a_K^1)_0$ и $(a_1^2)_0, (a_2^2)_0, \dots, (a_L^2)_0$ подлежащих определению амплитудных множителей $a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_L^2$. Для корректировки амплитудных множителей $a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_L^2$ вводит-

ся итерационная техника, включающая в себя введение в рассмотрение разложения функции

$$g_m(a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_L^2)$$

в ряд Тейлора в окрестности i -го приближения и линеаризация полученного разложения (сохранение линейных слагаемых относительно $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \dots, \Delta a_K^1, \Delta a_1^2, \Delta a_2^2, \dots, \Delta a_L^2$):

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_K^1} (\Delta a_K^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2} (\Delta a_1^2)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2} (\Delta a_2^2)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_L^2} (\Delta a_L^2)_i, \quad (2.6)$$

где i – номер итерации; $\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \dots, \Delta a_K^1, \Delta a_1^2, \Delta a_2^2, \dots, \Delta a_L^2$ – поправки к значениям масштабных множителей $a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_L^2$, полученных на i -й итерации:

$$\begin{aligned} (\Delta a_j^q)_i &= (a_j^q)_{i+1} - (a_j^q)_i, \\ j &= 1..K, \quad q = 1, \\ j &= 1..L, \quad q = 2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поправки находятся путем отыскания корней уравнения $(g_m)_{i+1} = 0$, и, тем самым, определение амплитудных множителей осуществляется путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -(g_m)_i &= \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_M^1} (\Delta a_M^1)_i + \\ &+ \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2} (\Delta a_1^2)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2} (\Delta a_2^2)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_L^2} (\Delta a_L^2)_i. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Переопределенная система уравнений (2.8) может быть представлена в матричной форме

$$G_i = -B_i(\Delta A)_i, \quad (2.9)$$

где

$$G_i = \left\{ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{array} \right\}_i, \quad (2.10)$$

$$B_i = \left(\begin{array}{cccccc} \frac{\partial g_1}{\partial a_1^1} & \frac{\partial g_1}{\partial a_2^1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial a_K^1} & \frac{\partial g_1}{\partial a_1^2} & \frac{\partial g_1}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial a_L^2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial a_1^1} & \frac{\partial g_2}{\partial a_2^1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial a_K^1} & \frac{\partial g_2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial g_2}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial a_L^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial a_1^1} & \frac{\partial g_M}{\partial a_2^1} & \cdots & \frac{\partial g_M}{\partial a_K^1} & \frac{\partial g_M}{\partial a_1^2} & \frac{\partial g_M}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial g_M}{\partial a_L^2} \end{array} \right)_i, \quad (2.11)$$

$$(\Delta A)_i = \left\{ \begin{array}{c} \Delta a_1^1 \\ \Delta a_2^1 \\ \vdots \\ \Delta a_K^1 \\ \Delta a_1^2 \\ \Delta a_2^2 \\ \vdots \\ \Delta a_L^2 \end{array} \right\}_i. \quad (2.12)$$

В (2.9) B_i – матрица размерности $M \times (K + L)$, где M – количество уравнений системы; $K + L$ – количество неизвестных. Итерационный процесс завершается, если отличие коэффициентов a_k^1 и a_l^2 , полученных на i -й и $i + 1$ -й итерациях отличаются не более чем на наперед заданную точность ε :

$$\sqrt{(\Delta a_1^1)^2 + (\Delta a_2^1)^2 + \dots + (\Delta a_K^1)^2 + (\Delta a_1^2)^2 + (\Delta a_2^2)^2 + \dots + (\Delta a_L^2)^2} < \varepsilon. \quad (2.13)$$

2.4. Выявление наиболее темных точек интерференционной картины — построение скелетона изохроматических полос

Появление компьютерных программ и развитие вычислительных технологий способствуют значительному упрощению проведения части фотоупругого эксперимента – пропадает необходимость в ручной обработке изображений результатов (интерференционных карт), так как появилась возможность получения высококачественных цифровых изображений [139]. Тем не менее, обработка цифровых изображений, полученных в результате натуральных экспериментов, представляет собой нетривиальную задачу, в связи с чем появилась потребность в разработке программы, реализующей интерпретацию данных из файлов с интерференционными картинками – результатами фотоупругих экспериментов. Поэтому в настоящем исследовании разработана программа на основе алгоритма К. Рамеша [139], реализующая следующие этапы. На первом этапе происходит загрузка входных данных – изображения, содержащего интерференционную картину. Далее программа проводит процедуру предварительной обработки изображения – удаления шумов для получения более четкой картины. Этот процесс происходит с помощью функции усреднения, в рамках которого для каждого пикселя картины применяется функция Гаусса радиуса 3-13 пикселей с ядром

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2}} e^{-\frac{x^2}{2\omega^2}}, \quad (2.14)$$

где ω – радиус зоны сглаживания, x – расстояние от центра зоны. По окончании процедуры предварительной обработки изображения, программа воссоздает скелетон изображения. Процесс происходит согласно алгоритму, базирующемуся на масках, в ходе которого выделяются точки в зависимости от интенсивности освещенности. Программа, в соответствии с заложенным алгоритмом (рисунок 2.4), сканирует изображение маской

5x5 пикселей в нескольких направлениях: слева направо, сверху вниз и по диагонали от левых углов изображения. Результаты сканирования по диагонали и горизонтали сохраняются отдельными изображениями, а затем строится их логическое пересечение, то есть в конечном результате получается изображение из тех точек, которые были определены на обоих этапах сканирования. В основе алгоритма заложен цикл, проходящий по каждому

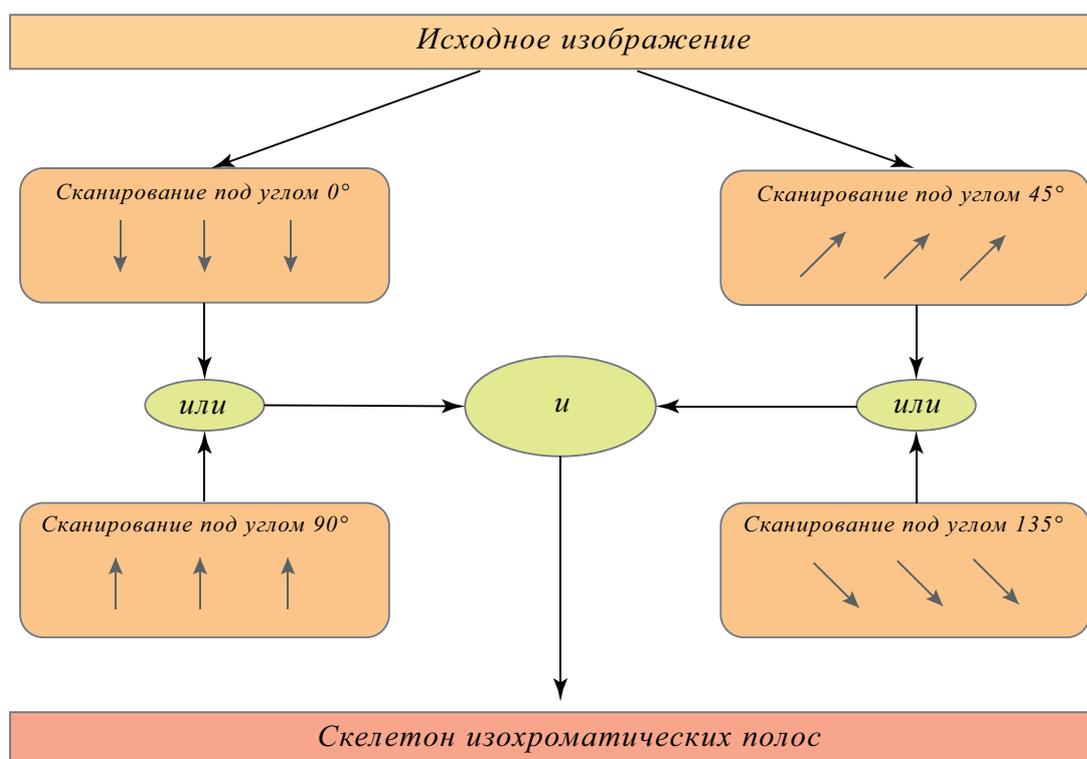


Рисунок 2.4 – Алгоритм перебора пикселей картины изохроматических
ПОЛОС

пикселю интерференционного изображения до тех пор, пока не находится координата, входящая в одну из изохроматических полос, где на каждом шаге цикла очередная точка запоминается. Каждая интерференционная полоса нумеруется – каждый распознанный массив приобретает свой порядковый номер и все множества массивов сохраняются в результирующий текстовый файл.

Дополнительно, в разработанном приложении был предложен и ис-

пользован вспомогательный алгоритм, применяемый для выделения точек минимальной освещенности изохроматической полосы для сканирования изображения в дополнительных направлениях (т.е. для построения так называемых скелетонизированных интерференционных полос) – алгоритм, являющийся расширением алгоритма Рамеша. Общее описание алгоритма следующее:

Шаг 1. Цветное изображение, содержащее 3 цветовых канала RGB, преобразуется в массив интенсивностей точек сложением всех каналов.

Шаг 2. Для каждой из точек полученного массива рассчитывается число баллов. Используются методы Рамеша для выделения горизонтальных, вертикальных и двух диагональных полос, а также метод поиска минимума интенсивности в сечении, перпендикулярном четырём предполагаемым направлениям полосы. За выполнение каждого из 8 перечисленных условий точке начисляется 1 балл. При превышении заданного пользователем порога точка считается кандидатом на включение в скелетон.

Шаг 3. Из списка кандидатов удаляются изолированные точки шума. Оставшиеся точки включаются в скелетон.

Разработанная специально для картин изохроматических полос программа была применена для цифровой обработки интерференционных картин для образцов с надрезами и трещинами. Можно отметить, что разработанное приложение может быть использовано для интерференционной картины, полученной любым другим поляризационно-оптическим методом, где нужно отыскать максимумы и минимумы освещенности точек изображения.

2.5. Обработка интерференционных картин, полученных в ходе натуральных фотоупругих экспериментов

В рамках экспериментального исследования была изготовлена серия образцов из оптически чувствительного материала с трещинами (рисунок 2.5): пластина с горизонтальной центральной трещиной, пластина с двумя горизонтальными трещинами одинаковой длины, пластина с двумя горизонтальными трещинами разной длины, пластина с центральной наклонной трещиной, пластина с одним боковым надрезом, пластина с двумя боковыми надрезами. Каждая пластина в соответствии с алгоритмом, описан-

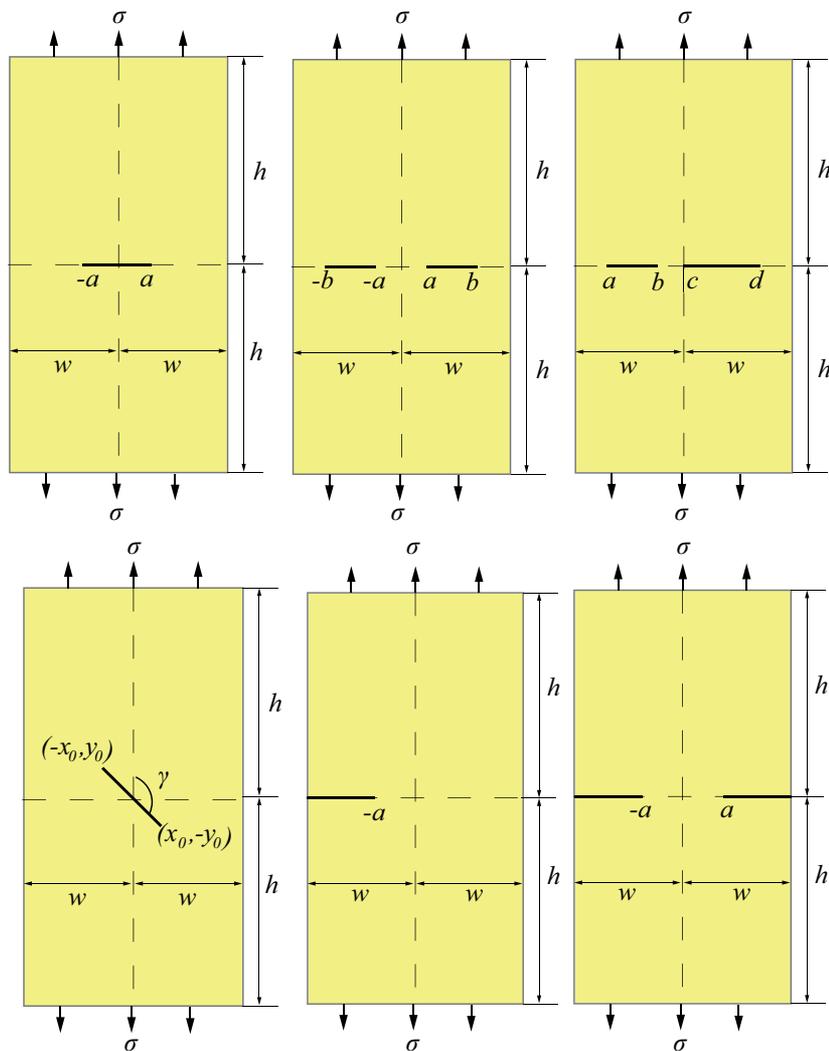


Рисунок 2.5 – Конфигурации экспериментальных образцов

ным в начале главы, сначала была подвержена растягивающей нагрузке на проекционно-поляризационной установке ППУ-7. Для каждого нагруженного образца были подготовлены фотографии интерференционных картин, возникающих при деформировании, и проведена цифровая обработка изображений с последующей целью определения коэффициентов многопараметрического разложения Уильямса с помощью переопределенного метода.

2.6. Пластина с центральной трещиной

Первый тестируемый образец – пластина с центральной трещиной из эпоксидной смолы ЭД-20 (рисунок 2.6). Ширина пластины: $2w = 52$ мм, тол-

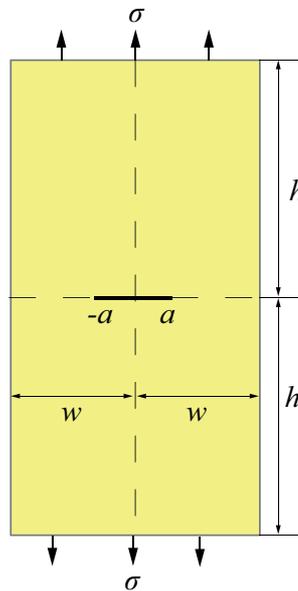


Рисунок 2.6 – Конфигурация образца с центральной трещиной

щина: $t = 5.7$ мм, высота пластины: $h = 100$ мм, длина трещины: $2a = 19.1$ мм. Обработывались четыре экспериментальных изображения, полученных для нагрузок: $\sigma = 2.977$ МПа, $\sigma = 3.308$ МПа, $\sigma = 4.135$ МПа и $\sigma = 4.467$ МПа. Картины изохроматических полос показаны на рисунке 2.7.

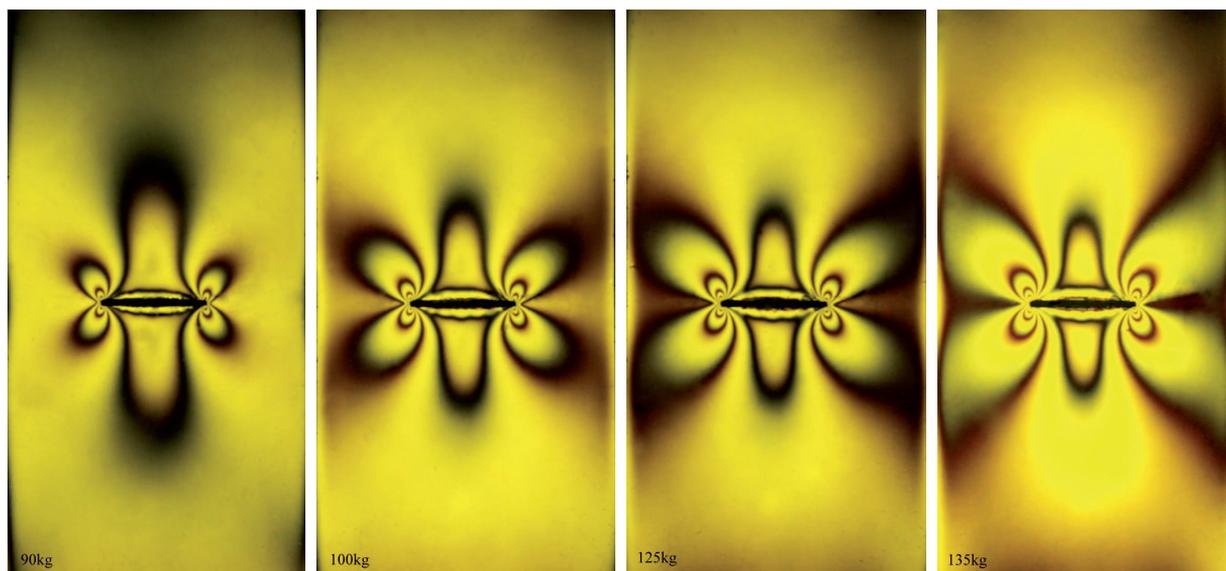


Рисунок 2.7 – Картины изохроматических полос в пластине при действии нагрузок различной интенсивности

Результаты сканирования в разработанном цифровом приложении изображены на рисунке 2.8.

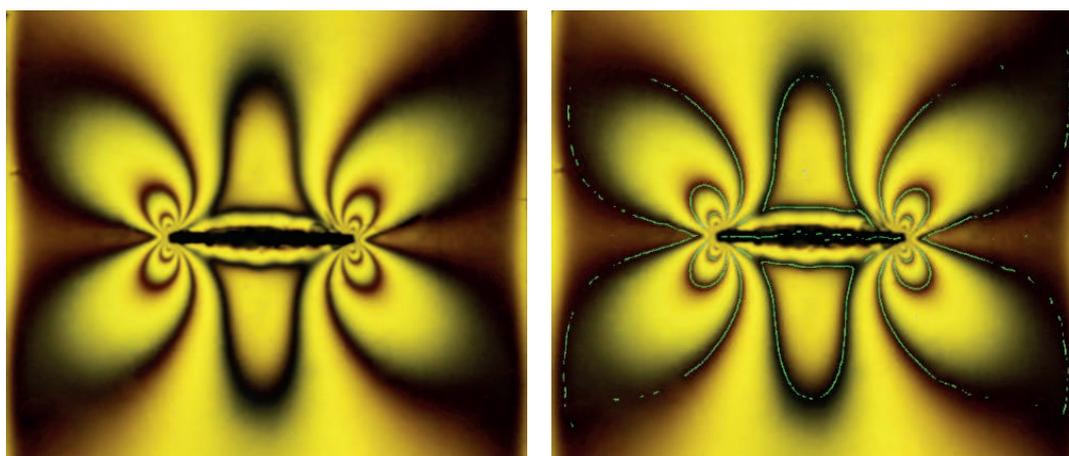


Рисунок 2.8 – Оригинальное изображение и скелетон изохроматической картины нагруженного образца

После анализа интерференционной картины изохроматических полос в подготовленном приложении данные, содержащие номер изохроматической полосы и координаты точек, принадлежащих ей, сохраняются в тек-

стовом файле и используются далее для расчета коэффициентов ряда М. Уильямса с помощью итерационного алгоритма переопределенного метода, изложенного выше. Результаты расчета сведены в таблицу 2.1 (для нагрузки $\sigma = 4.135$ МПа). Была произведена серия вычислений с разным

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	2.1024 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.1498 МПа
a_3^1	0.7686 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.0886 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.0175 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.0072 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.0015 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0009 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.0001 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.1 – Амплитудные коэффициенты, восстановленные из результатов натурального эксперимента

количеством удерживаемых слагаемых ряда Уильямса. Для вычисления параметров механики разрушения выбирались изохроматические полосы с порядками, равными двум и трем (рисунок 2.7). На данных расстояниях от вершины дефекта следует удерживать не менее пятнадцати слагаемых, поэтому в ходе вычислений определялись пятнадцать коэффициентов ряда М. Уильямса. В ходе работы процедуры переопределенного метода установлено, что коэффициенты с четными номерами, начиная с a_4^1 обращаются в нуль с точностью до 10^{-7} . Полученная экспериментальная оценка для КИН была сравнена со значениями для КИН, вычисленными с помощью известных аппроксимаций, имеющихся в справочниках [129] и [174].

Сравнение показало хорошее совпадение со всеми имеющимися аппроксимациями тарировочных функций. Значения T -напряжений сравнивались с результатами моделирования в МКЭ-пакете SIMULIA Abaqus, которые описаны ниже в следующей главе.

2.7. Пластина с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами равной длины

Для эксперимента с пластиной с двумя коллинеарными трещинами равной длины была изготовлена серия образцов с размерами: ширина пластины: $2w = 50$ мм, толщина: $t = 5.3$ мм, высота пластины 120 мм, длина каждой трещины равна 10 мм, расстояние между трещинами составляет 10 мм (рисунок 2.9). Обработывались четыре экспериментальных изображения,

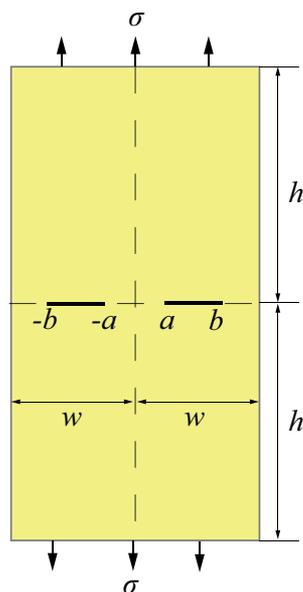


Рисунок 2.9 – Конфигурация образца с двумя горизонтальными трещинами одинаковой длины

полученных для нагрузок: $\sigma = 3.70$ МПа, $\sigma = 4.44$ МПа, $\sigma = 4.62$ МПа и $\sigma = 6.47$ МПа.

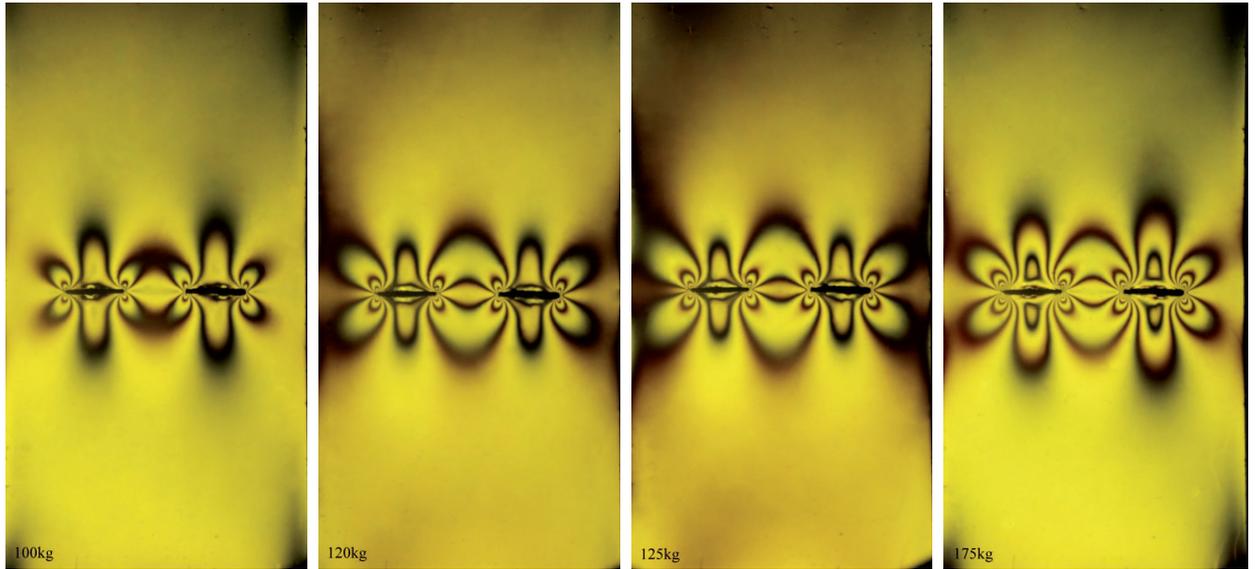


Рисунок 2.10 – Картины изохроматических полос в пластине при действии нагрузок различной интенсивности

Картины изохроматических полос показаны на рисунке 2.10. Результаты сканирования в разработанном цифровом приложении изображены на рисунке 2.11.

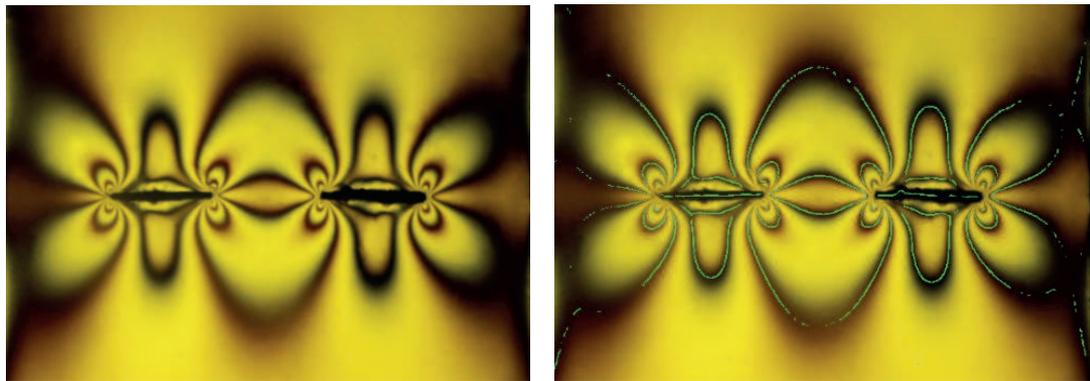


Рисунок 2.11 – Оригинальное изображение и скелетон изохроматической картины нагруженного образца

Результаты применения итерационной схемы переопределенного метода представлены в таблицах 2.2 и 2.3.

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	3.5417 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.7553 МПа
a_3^1	1.7414 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.4434 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.1999 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.1538 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.0735 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0734 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.0564 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.2 – Амплитудные коэффициенты у вершины трещины $z = b$, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента (пластина с двумя трещинами равной длины)

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	3.5906 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.6931 МПа
a_3^1	1.8760 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.3149 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.3164 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.0164 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.0879 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0660 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.028 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.3 – Амплитудные коэффициенты у вершины трещины $z = a$, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента (пластина с двумя трещинами равной длины)

2.8. Пластина с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины

Для эксперимента с пластиной с двумя коллинеарными трещинами различной длины была изготовлена серия образцов с размерами: ширина пластины: $2w = 50$ мм, толщина: $t = 5.3$ мм, высота пластины 120 мм, длина трещины, расположенной слева, равна 10 мм, длина трещины, расположенной справа, равна 14 мм, расстояние между трещинами составляет 6 мм (рисунок 2.12). Обработывались четыре экспериментальных изображения, полученных для нагрузок: $\sigma = 3.70$ МПа, $\sigma = 4.44$ МПа, $\sigma = 4.62$ МПа и $\sigma = 6.47$ МПа. Анализ картин изохроматических полос, получен-

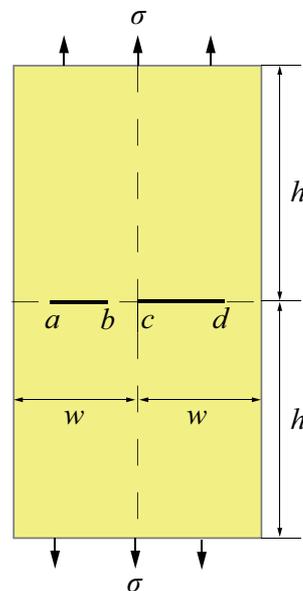


Рисунок 2.12 – Конфигурация образца с двумя горизонтальными трещинами

ных для ряда нагрузок (рисунок 2.13), ясно указывает на необходимость сохранения слагаемых высоких порядков ряда М. Уильямса, ибо только удержание неособых (регулярных) слагаемых ряда обеспечит наклон изохроматических полос к горизонтали, наблюдаемых на рисунке 2.14.

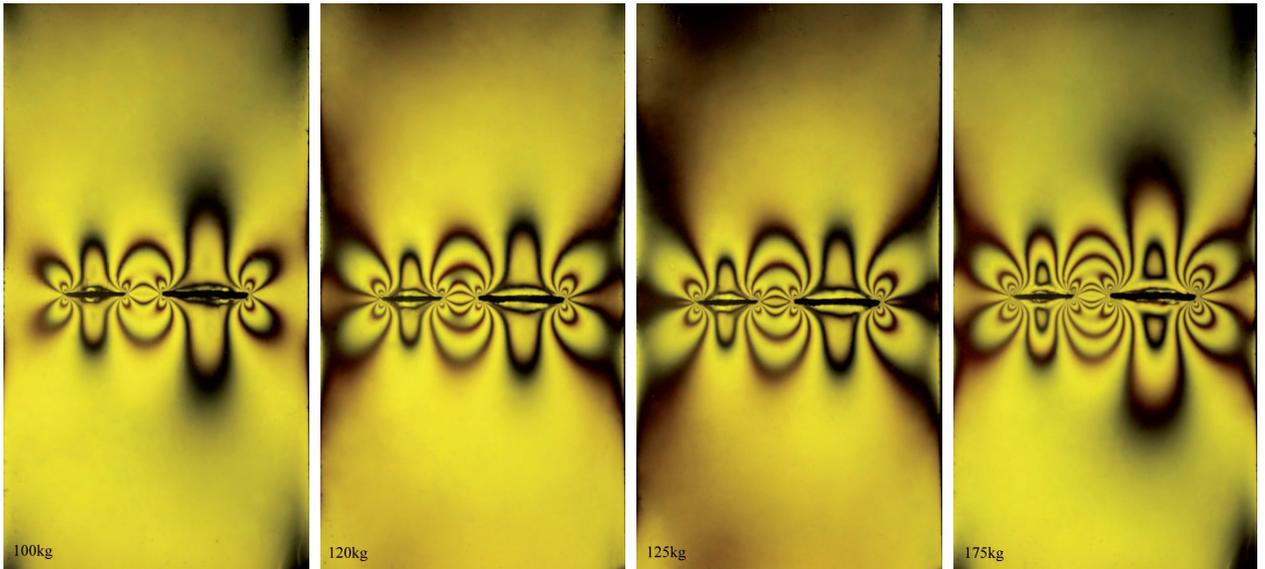


Рисунок 2.13 – Картины изохроматических полос в пластине при действии нагрузок различной интенсивности

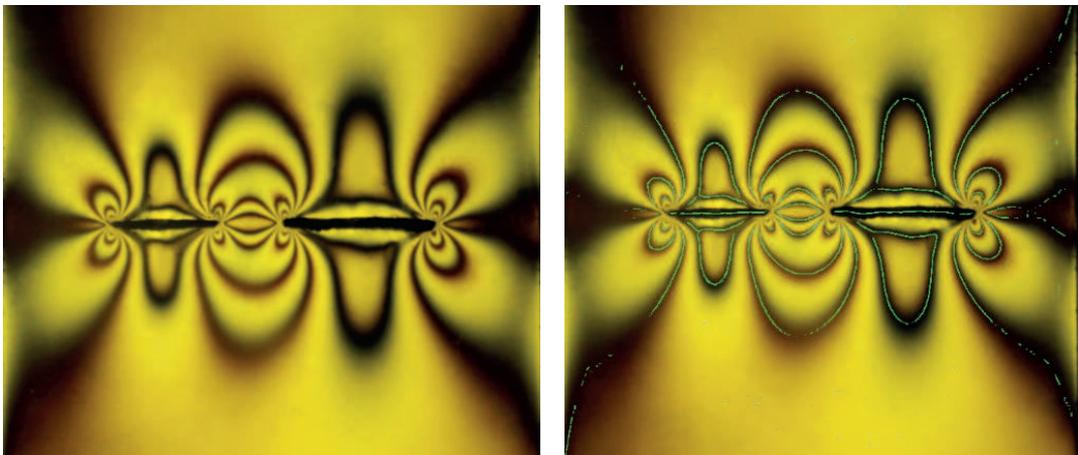


Рисунок 2.14 – Оригинальное изображение и скелетон изохроматической картины нагруженного образца

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	5.4039 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.6838 МПа
a_3^1	1.0928 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.2324 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.1172 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.0337 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.0233 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0242 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.0266 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.4 – Амплитудные коэффициенты у вершины трещины $z = d$, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента (пластина с двумя трещинами различной длины)

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	3.9983 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.7404 МПа
a_3^1	2.4540 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.2219 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.1896 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.0866 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.0405 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0230 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.0186 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.5 – Амплитудные коэффициенты у вершины трещины $z = b$, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента (пластина с двумя трещинами различной длины)

2.9. Пластина с центральной наклонной трещиной под углом 135 градусов

В параграфе приведены результаты оптомеханических экспериментов пластины с наклонной трещиной. Из эпоксидной смолы была изготовлена серия образцов с наклонной трещиной: угол между трещиной и вертикальной осью, отсчитываемый против часовой стрелки, составляет 135° (рисунок 2.15). Геометрические характеристики образца следующие: ширина образца составила 50 мм, высота пластины равна 120 мм, длина трещины равна 2.19 мм, толщина пластины равна 4 мм. Рассматривались четыре нагружения пластины растягивающими нагрузками 4.90 МПа, 6.12 МПа, 7.35 МПа и 8.58 МПа (рисунок 2.16).

Коэффициенты аппроксимации М. Уильямса для конфигурации с центральной наклонной трещиной сведены в таблицу 2.6, в которой приведены множители, отвечающие нормальному отрыву и поперечному сдвигу.

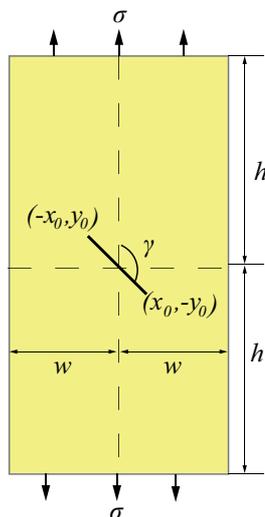


Рисунок 2.15 – Пластина с центральной наклонной под углом 135° трещиной

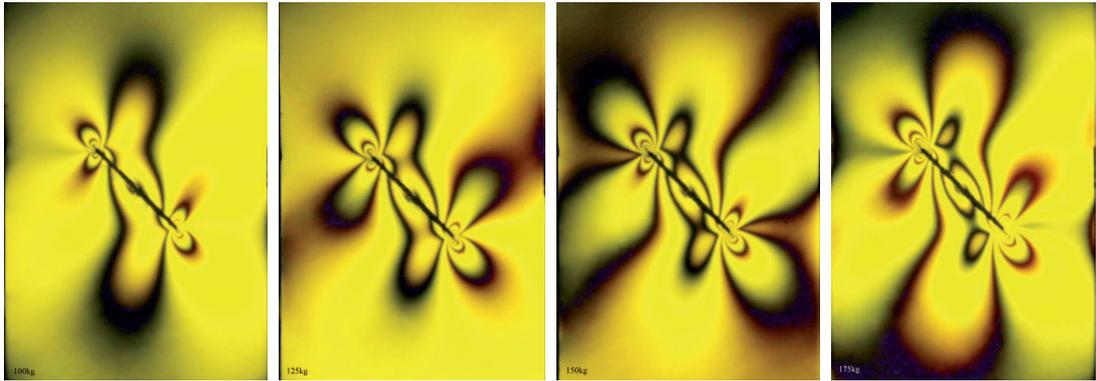


Рисунок 2.16 – Картины изохроматических полос в пластине при действии нагрузок различной интенсивности

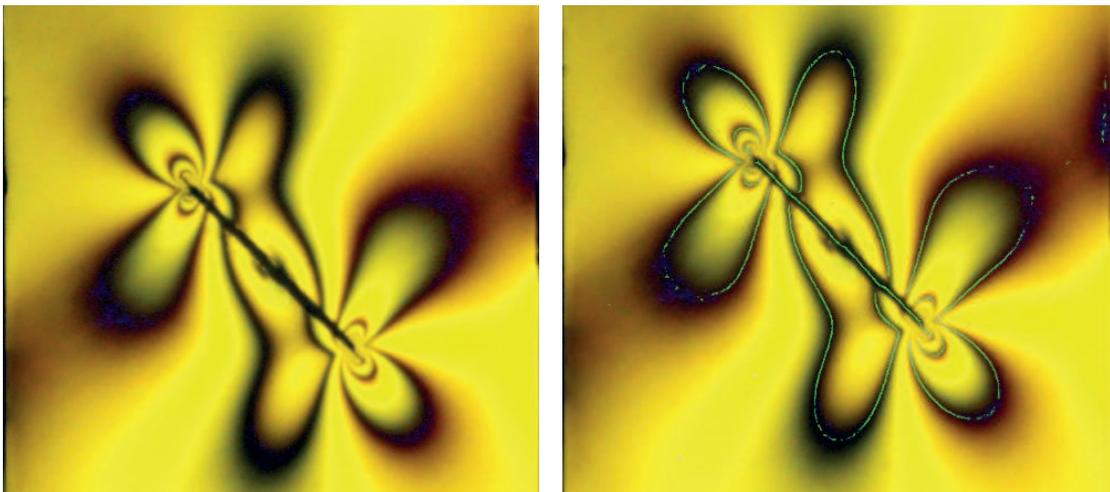


Рисунок 2.17 – Оригинальное изображение и скелетон изохроматической картины нагруженного образца

Коэффициент	Значение	Коэффициент	Значение
a_1^1	2.6581 МПа см ^{1/2}	a_1^2	-2.3874 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-0.1145 МПа	a_2^2	0 МПа
a_3^1	0.4985 МПа см ^{-1/2}	a_3^2	-0.6102 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.1193 МПа см ^{-3/2}	a_5^2	0.0831 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.0170 МПа см ^{-5/2}	a_7^2	-0.0254 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.0098 МПа см ^{-7/2}	a_9^2	0.0035 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.0064 МПа см ^{-9/2}	a_{11}^2	-0.0038 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0013 МПа см ^{-11/2}	a_{13}^2	0.0012 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.0002 МПа см ^{-13/2}	a_{15}^2	-0.00002 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.6 – Амплитудные коэффициенты у верхней вершины наклонной трещины, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента, у вершины наклонной трещины

2.10. Пластина с одним краевым надрезом

Конфигурация данного образца показана на рисунке 2.18. Геометрические размеры образца следующие: ширина образца равна $2w = 50$ мм, высота образца равна $h = 120$ мм, глубина разреза составляет $a = 12$ мм, толщина образца составляет $t = 4.8$ мм. Образцы были подвергнуты нагрузкам разной интенсивности и интерференционные картины показаны на рисунках. Полученные картины изохроматических полос показаны на рисунке 2.19

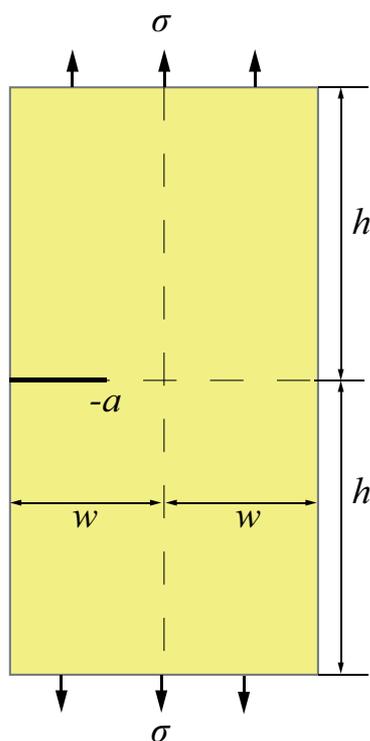


Рисунок 2.18 – Конфигурация образца с одним боковым надрезом

Рассчитанные на основании метода цифровой фотоупругости коэффициенты ряда Уильямса продемонстрированы в таблице 2.7.

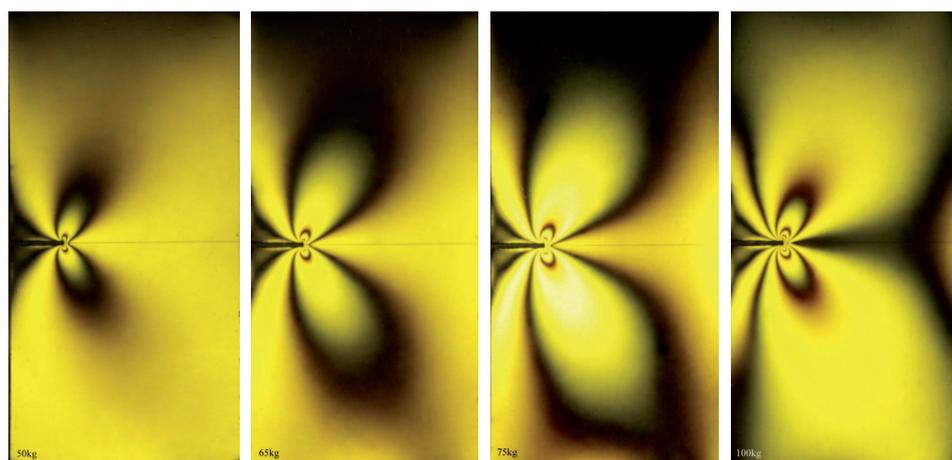


Рисунок 2.19 – Картины изохроматических полос в пластине при действии нагрузок различной интенсивности

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	4.6522 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-0.6143 МПа
a_3^1	0.3116 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	0.0149 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	-0.0458 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	0.0251 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	-0.01135 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	0.0487 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	-0.0019 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.7 – Амплитудные коэффициенты ряда Уильямса у вершины бокового надреза, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента

2.11. Пластина с двумя боковыми надрезами

Схематичное представление образца с двумя боковыми надрезами приведено на рисунке 2.20. Размеры образца следующие: $2w = 50$ мм, $t = 4.8$ мм, $a = 8.5$ мм. Картины изохроматических полос получены для четырех нагружений образца (рисунок 2.21) 3.40 МПа, 4.53 МПа, 5.66 МПа и 7.92 МПа. Карта изохроматических полос и результаты работы программы, реали-

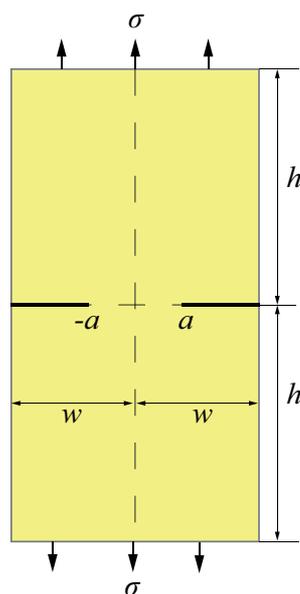


Рисунок 2.20 – Конфигурация образца с двумя боковыми горизонтальными надрезами одинаковой длины

зующей цифровую обработку изображений, представлены на рисунке 2.22.

Теоретически реконструированное поле изохром показано на рисунке 2.23. Слева голубыми точками изображена линия уровня разности главных напряжений у вершины бокового надреза, полученная с помощью найденных коэффициентов ряда Уильямса, в котором удержано пятнадцать слагаемых, справа показано реконструированная картина изохроматических полос. Рассчитанные с помощью переопределенного метода коэффициенты ряда Уильямса продемонстрированы в таблице 2.8.

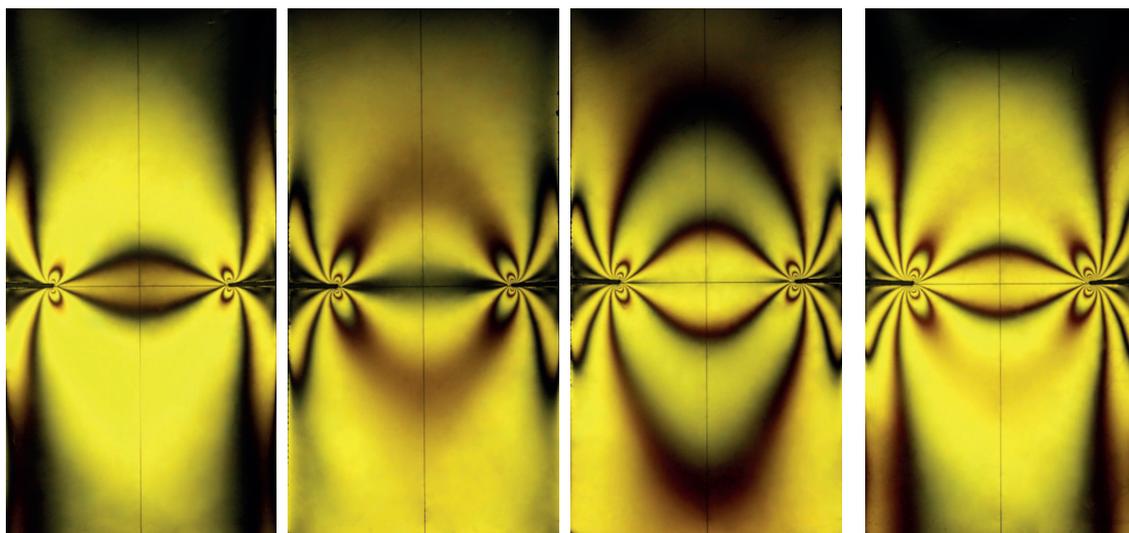


Рисунок 2.21 – Результаты оптико-механических испытаний на ППУ-7: карты изохроматических полос в пластине с двумя боковыми надрезами

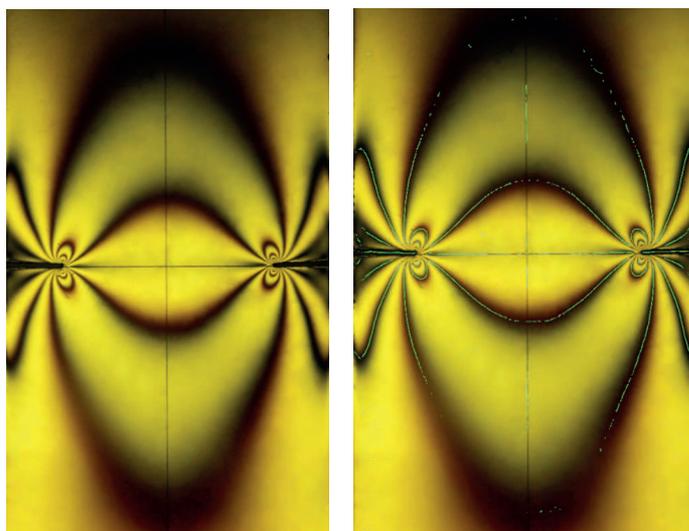


Рисунок 2.22 – Оригинальное изображение и скелетон изохроматической картины нагруженного образца

Коэффициент ряда	Значение, (метод фотоупругости)
a_1^1	4.4836 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-0.8220 МПа
a_3^1	0.8446 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	0.1186 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	-0.1421 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	0.1039 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	-0.0645 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	0.0460 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	-0.0352 МПа см ^{-13/2}

Таблица 2.8 – Амплитудные коэффициенты ряда Уильямса у вершины бокового выреза, восстановленные из результатов фотоупругого эксперимента

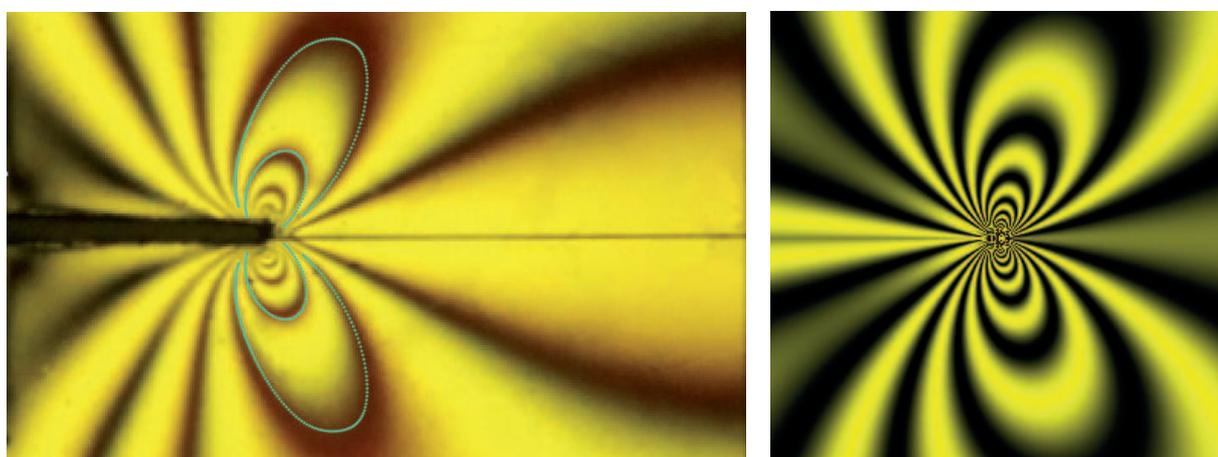


Рисунок 2.23 – Теоретически реконструированное поле изохром с помощью найденных коэффициентов ряда Уильямса

2.12. Пластина с двумя боковыми наклонными надрезами

Вкупе с рассмотренными выше образцами в настоящей работе был исследован образец с двумя боковыми наклонными надрезами, предназначенный для анализа смешанного деформирования тел с разрезами. Была изготовлена серия плоских образцов со следующими геометрическими параметрами: ширина образца равна $2w = 43\text{мм}$, высота образца равна $h = 120\text{мм}$, толщина составляет $t = 5\text{мм}$, глубина надрезов составляет $a = 7\text{ мм}$. Картины интерференционных полос, полученные в полярископе, приведены на рисунке 2.24. Угол наклона каждого разреза к вертикальной оси равен $\pi/4$. С помощью цифровой камеры зафиксированы изохромы для шести нагру-

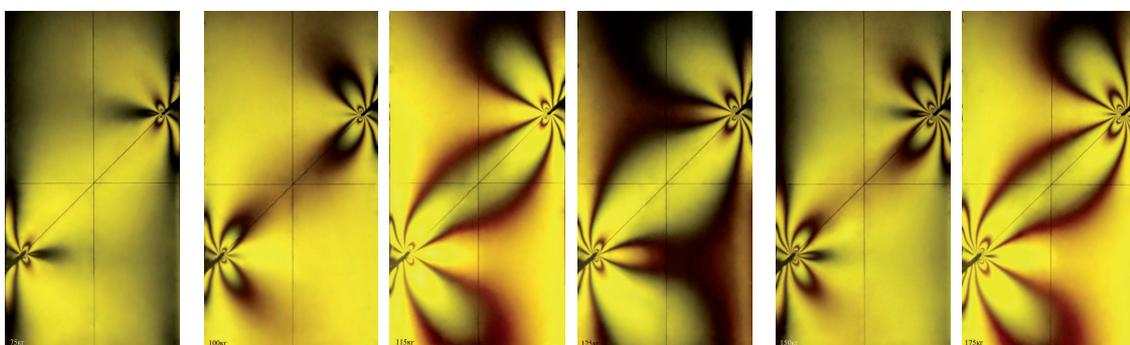


Рисунок 2.24 – Результаты оптико-механических испытаний на ППУ-7:
карты изохроматических полос в пластине с двумя краевыми
наклонными надрезами

жений образца 3.40 МПа, 4.53МПа, 5.21МПа, 5.66МПа, 6.79МПа и 7.92МПа. Результаты работы цифрового приложения, осуществляющего выделение точек с минимальной освещенностью, принадлежащим изохромам разных порядков, представлены на рисунках 2.25. Координаты точек, составляющих скелетон, и порядковые номера изохроматических полос сохраняются в отдельные файлы и являются основой для работы переопределенного метода. Полученные в ходе итерационной процедуры переопределенного

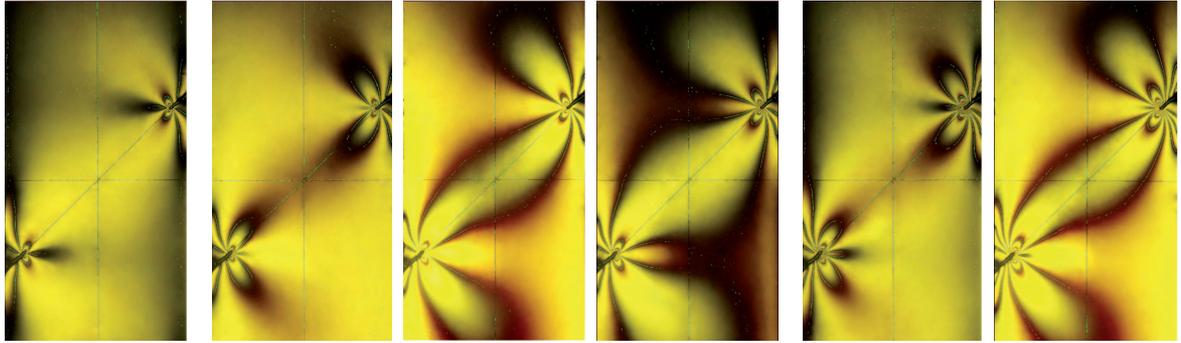


Рисунок 2.25 – Скелетоны изохроматических полос в пластине с двумя краевыми наклонными надрезами

метода значения масштабных множителей приведены в таблице 2.9.

a_k^1	a_k^{exp}	a_k^2	a_k^{exp}
a_1^1	3.58229 МПа см ^{1/2}	a_1^2	-1.83154 МПа см ^{1/2}
a_2^1	0.71624 МПа	a_2^2	0
a_3^1	-0.64279 МПа см ^{-1/2}	a_3^2	1.43050 МПа см ^{-1/2}
a_4^1	-0.17732 МПа см ⁻¹	a_4^2	0.02643 Па см ⁻¹
a_5^1	0.96787 МПа см ^{-3/2}	a_5^2	-0.80179 МПа см ^{-3/2}
a_6^1	-0.39363 МПа см ⁻²	a_6^2	0.50397 МПа см ⁻²
a_7^1	-0.18286 МПа см ^{-5/2}	a_7^2	-0.20964 МПа см ^{-5/2}
a_8^1	0.00932 МПа см ⁻³	a_8^2	-0.35606 МПа см ⁻³
a_9^1	-0.000065 МПа см ^{-7/2}	a_9^2	-0.32969 МПа см ^{-7/2}
a_{10}^1	-0.00022 МПа см ⁻⁴	a_{10}^2	-0.00842 МПа см ⁻⁴

Таблица 2.9 – Значения амплитудных множителей ряда Уильямса для пластины с двумя наклонными боковыми надрезами

2.13. Выводы по Главе 2

Во второй главе

1. описано назначение и функциональные возможности разработанного

приложения для анализа интерференционных картин изохром, получаемых методом фотоупругости;

2. показано, что предлагаемое приложение позволяет осуществлять быструю обработку изображения и находить точки с наименьшей освещенностью, принадлежащие изохроматическим полосам различного порядка;

3. с помощью метода цифровой фотоупругости определены коэффициенты аппроксимации М. Уильямса, представляющей поля у вершины трещины или надреза.

Можно сделать вывод, что цифровая обработка изохроматических картин обеспечивает аналитическую реконструкцию поля напряжений вблизи вершины трещины и позволяет проводить детальный анализ поля напряжений у вершины трещины. Цифровая обработка является эффективным средством повышения точности фотоупругих данных за счет нахождения скелетона контуров интерференционных полос. Разработанные процедуры значительно упрощают анализ механических полей и позволяют существенно увеличить размеры области, из которой собираются экспериментальные данные. С помощью разработанного приложения появляется возможность быстрого извлечения экспериментальных точек из картины изохроматических полос. На основании развитого подхода получены параметры разрушения для нормального отрыва и смешанного режима нагружения для целого ряда образцов. Вычислены КИН, T -напряжения и коэффициенты ряда Уильямса слагаемых более высокого порядка малости.

Глава 3. Конечно-элементное восстановление разложения Макса Уильямса полей, ассоциированных с вершиной трещины

3.1. Численный расчет коэффициентов разложения Макса Уильямса

Неотъемлемой частью современного исследования напряженно-деформированного состояния в областях клиновидной формы (вблизи концентраторов напряжений: вершин трещин или надрезов), ставящего своей целью верификацию результатов цифровой обработки экспериментальных данных [86], является проведение виртуального компьютерного имитационного эксперимента и численное определение напряженно-деформированного состояния в образцах с подобной геометрией и нагрузками методом конечных элементов [8, 16, 48–50, 72, 75, 80, 103, 115, 136, 166, 167, 169, 187]. Поэтому задачей настоящей главы является численное определение коэффициентов многопараметрического разложения Макса Уильямса, представляющего собой распределения напряжений и перемещений вблизи устья трещины и клиновидного выреза в изотропном линейно упругом материале с удержанием регулярных (неособых) слагаемых в разложении и получение вычислительной базы для вывода аппроксимационных формул для коэффициентов высших приближений. Следует подчеркнуть еще раз, что необходимость сохранения неособых слагаемых была показана ранее в работах представителей различных научных школ [76, 116, 130], занимающихся реконструкцией разложения Уильямса посредством численного или экспериментального анализа (подробный перечень ссылок был приведен ранее в первой главе). В настоящей главе на основании полученных в первой главе выводов удерживается пятнадцать слагаемых для построения ряда Уильямса, обеспечивающего асимптотическую структуру полей напряже-

ний, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины в образцах, ранее испытанных с помощью метода фотоупругости. С целью конечно-элементного восстановления коэффициентов ряда Уильямса был выполнен обширный вычислительный эксперимент, в рамках которого были получены конечно-элементные решения цикла задач о нагружении плоских образцов с разрезами, испытанных с помощью техники фотоупругости. Все вычисления были выполнены в многоцелевом пакете SIMULIA Abaqus, реализующем метод конечных элементов. Ниже приведены детали и особенности конечно-элементного моделирования, результаты, полученные с помощью вычислительного эксперимента, и их анализ.

Пластина с центральной трещиной

Первой конфигурацией, рассмотренной в вычислительном эксперименте, была квадратная пластина с центральным разрезом, длина стороны которой много больше длины трещины. На рисунке 3.1 показана типичная сетка, окружающая устье трещины и состоящая из семейства концентрических окружностей, разбитых на семьдесят два сектора с углом раствора сектора, равным пяти градусам.

В документации к пакету SIMULIA Abaqus отмечается, что для построения конечно-элементного решения для областей с острыми вырезами и трещинами следует прибегать к сингулярным конечным элементам, причем раствор сектора сингулярного конечного элемента может варьироваться от десяти до двадцати двух градусов. Тем не менее, проведенные расчеты и анализ построений, выполненных другими авторами [70,115,188], показывает, что следует прибегать к более мелкой сетке. В силу указанной причины во всех расчетах окружность делилась на семьдесят два сектора. Конечно-элементное решение позволяет восстановить асимптотическое разложение М. Уильямса, используя вычисленные значения механических

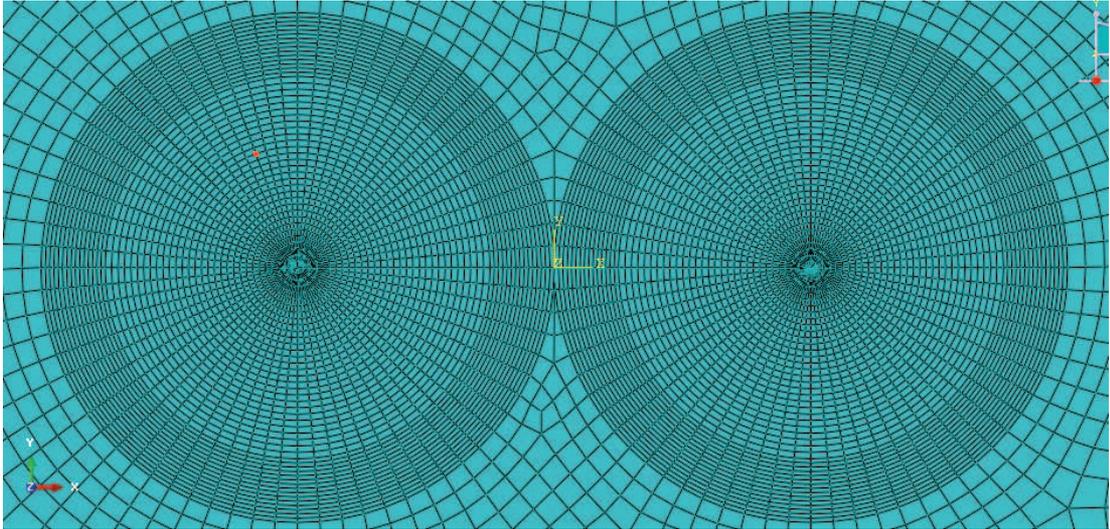


Рисунок 3.1 – Пример характерного конечно-элементного разбиения, содержащего сингулярные конечные элементы в области вершин трещин

величин в узлах конечно-элементной сетки. В проведенной серии расчетов для извлечения параметров механики разрушения были использованы узлы, принадлежащие концентрическим окружностям, охватывающим устье дефекта. Для вычисления масштабных (амплитудных) множителей разложения М. Уильямса используется переопределенный метод, который снискал известность в последнее время [69, 70, 115] и стал, по всей видимости, основным подходом при решении данного класса задач [50, 86]. Суть переопределенного метода была описана ранее, во второй главе, но в методических целях приведем основные положения метода ниже. Существо переопределенного метода заключается в формировании и последующем решении переопределенной системы линейных уравнений, число которых, в общем случае, много больше числа неизвестных. Число неизвестных – число коэффициентов удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении М. Уильямса вблизи острия трещины. Число уравнений в системе обуславливается числом рассматриваемых экспериментальных точек (в вычислительном или натурном эксперименте). Поэтому в самом общем слу-

чае число уравнений может быть существенно больше числа неизвестных системы уравнений. Для формирования системы уравнений могут быть использованы 1) значения компонент тензора напряжений в узловых точках (рисунок 3.1); 2) значения компонент вектора перемещений в узловых точках; 3) значения компонент тензора напряжений и вектора перемещений в узловых точках. Невзирая на достаточно широкое использование описанной стратегии восстановления разложения Уильямса, многие вопросы не получили должного обсуждения и остаются неразрешенными в настоящее время. К числу таких проблем относятся вопросы, связанные с числом уравнений в переопределенной системе, вопросы, связанные с влиянием числа удерживаемых слагаемых на их значения, получаемые в ходе реализации переопределенного метода. На основании проведенного широкого эксперимента выбора узловых точек было установлено, что наиболее простым и надежным способом вычисления коэффициентов разложения Макса Уильямса у острия трещины или надреза, является подход, базирующийся на применении значений компонент тензора напряжений в точках концентрических окружностей, охватывающих вершину дефекта.

Переопределенный метод основан на представлении решения задачи усеченными рядами Уильямса

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,ij}^{(k)}(\theta) + \sum_{k=1}^L a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,ij}^{(k)}(\theta), \quad (3.1)$$

где K, L – количество удерживаемых слагаемых ряда в решении, отвечающих нормальному отрыву и поперечному сдвигу соответственно, в матричной форме:

$$\Sigma = CA, \quad (3.2)$$

где Σ – матрица размерности $1 \times 3M$, где M – количество эксперименталь-

ных точек:

$$\Sigma = (\sigma_{11}^1, \sigma_{11}^2, \dots, \sigma_{11}^M, \sigma_{12}^1, \sigma_{12}^2, \dots, \sigma_{12}^M, \sigma_{22}^1, \sigma_{22}^2, \dots, \sigma_{22}^M), \quad (3.3)$$

извлекаемых из вычислений, проведенных методом конечных элементов.

A – матрица размерности $(K + L - 1) \times 1$, состоящая из искоемых коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \dots \\ a_K^1 \\ a_1^2 \\ a_3^2 \\ \dots \\ a_L^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Матрица C размерности $3M \times (K + L - 1)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} r_1^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{K-1/2} f_{1,11}^{(K)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,11}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{L-1/2} f_{2,11}^{(L)}(\theta_1) \\ r_2^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{K-1/2} f_{1,11}^{(K)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,11}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{L-1/2} f_{2,11}^{(L)}(\theta_2) \\ \dots & \dots \\ r_M^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_M) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_M) & r_M^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_M^{K-1/2} f_{1,11}^{(K)}(\theta_M) & r_M^{-1/2} f_{2,11}^{(2)}(\theta_M) & r_M^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_M^{L-1/2} f_{2,11}^{(L)}(\theta_M) \\ r_1^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{K-1/2} f_{1,12}^{(K)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,12}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{L-1/2} f_{2,12}^{(L)}(\theta_1) \\ r_2^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{K-1/2} f_{1,12}^{(K)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,12}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{L-1/2} f_{2,12}^{(L)}(\theta_2) \\ \dots & \dots \\ r_M^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_M) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_M) & r_M^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_M^{K-1/2} f_{1,12}^{(K)}(\theta_M) & r_M^{-1/2} f_{2,12}^{(2)}(\theta_M) & r_M^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_M^{L-1/2} f_{2,12}^{(L)}(\theta_M) \\ r_1^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{K-1/2} f_{1,22}^{(K)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,22}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{L-1/2} f_{2,22}^{(L)}(\theta_1) \\ r_2^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{K-1/2} f_{1,22}^{(K)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,22}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{L-1/2} f_{2,22}^{(L)}(\theta_2) \\ \dots & \dots \\ r_M^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_M) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_M) & r_M^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_M^{K-1/2} f_{1,22}^{(K)}(\theta_M) & r_M^{-1/2} f_{2,22}^{(2)}(\theta_M) & r_M^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_M^{L-1/2} f_{2,22}^{(L)}(\theta_M) \end{pmatrix}$$

Тогда переопределенная система уравнений допускает замкнутое решение

$$A = (C^T C)^{-1} C^T \Sigma, \quad (3.5)$$

где $(C^T C)^{-1}$ – псевдообратная матрица матрицы C .

Дополнительно вводилась целевая функция

$$J(A) = (1/2) (\Sigma - CA)^T (\Sigma - CA) \quad (3.6)$$

и средствами пакета оптимизации системы символьных вычислений Maple находились значения масштабных множителей, обеспечивающие минимум целевой функции.

На рисунках 3.2 и 3.3 приведены результаты конечно-элементных расчетов напряженного состояния в пластине с центральной трещиной. На рисунках показаны полученные картины интенсивности напряжений и компонент тензора напряжений. Для восстановления коэффициентов асимптотического разложения Макса Уильямса выбиралось семейство концентрических окружностей, охватывающих вершину трещины. В выполненных вычислениях число окружностей варьировалось от одной до десяти. Пример избранного контура приведен на рисунке 3.4.

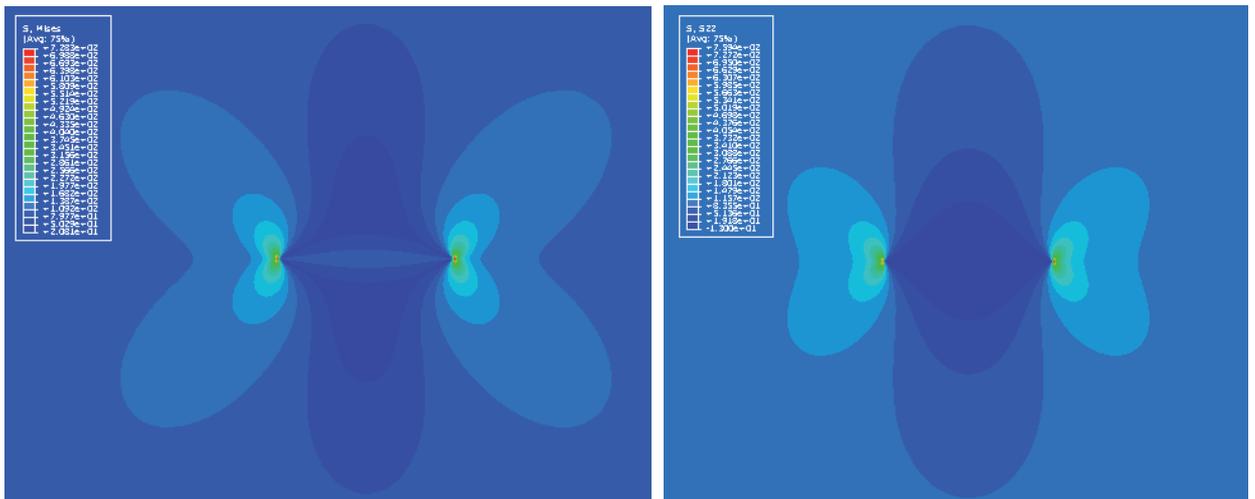


Рисунок 3.2 – Результаты конечно-элементного моделирования: распределение интенсивности напряжений $\sigma_e(x_1, x_2)$ (слева) и компоненты $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ (справа)

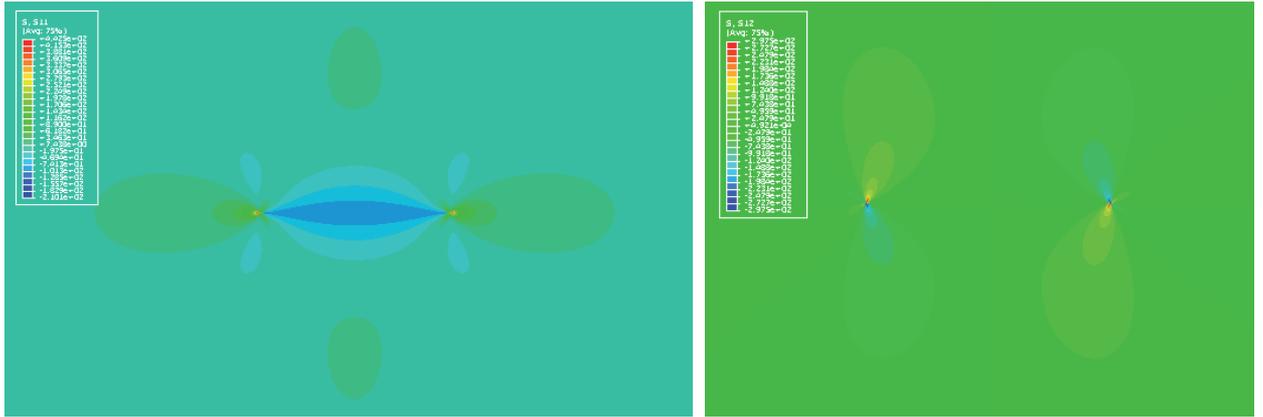


Рисунок 3.3 – Результаты конечно-элементного моделирования: распределение компонент тензора напряжений $\sigma_{11}(x_1, x_2)$ (слева) и $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ (справа)

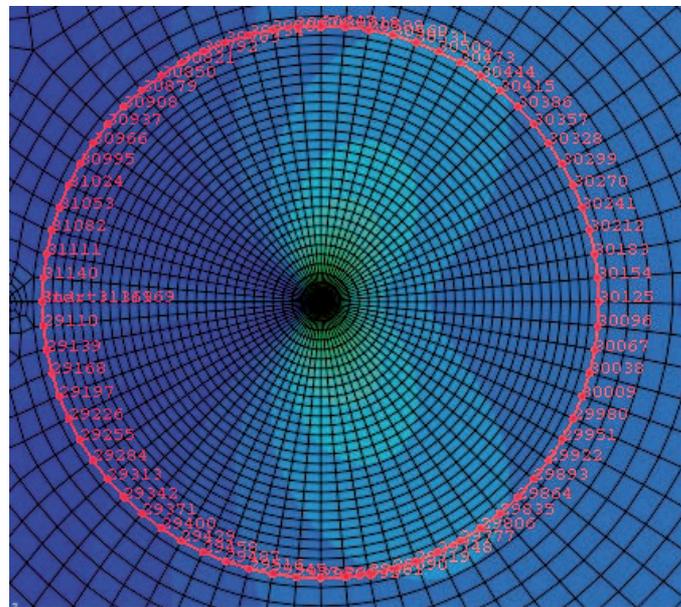


Рисунок 3.4 – Путь, избранный для реализации переопределенного метода, – окружность, охватывающая вершину трещины

Тем самым, общее количество уравнений в системе менялось от 219 до 2190. Число неизвестных менялось от 15 до 25 (в большинстве случаев удерживалось 15 коэффициентов). Рассматриваемая задача о деформировании пластины с центральной трещиной выступает как тестовая задача

и позволяет, в силу наличия аналитического решения задачи, сравнить зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла, полученные конечно-элементным анализом, и предоставляемые аналитическим решением задачи о нагружении изотропной линейно упругой бесконечной пластины с центральным разрезом, удерживая различное число слагаемых ряда на разных расстояниях от кончика трещины.

Ниже приведены сравнения зависимостей компонент тензора напряжений от полярного угла θ , извлеченных из аналитического и конечно-элементного решений. На рисунках 3.5 – 3.29 изображены результаты сравнения конечно-элементного решения и асимптотического решения задачи, жидущегося на усеченных разложениях Макса Уильямса. На рисунках 3.5 – 3.29 синими точками показано конечно-элементное решение, тогда как асимптотическое решение, полученное с помощью усеченных на разном количестве слагаемых разложений, показано красным цветом. На рисунках 3.5 – 3.7 приведено сопоставление численного решения и приближенного аналитического решения, в котором удержано первое (лидирующее) слагаемое. На рисунке 3.5 показана компонента тензора напряжений $\sigma_{11}(\hat{r} = 0.75, \theta)$. Из рисунка 3.5 очевидно, что одночленное разложение не может представлять решение на указанном расстоянии от вершины трещины и, следовательно, оценки полученные для коэффициента интенсивности напряжений и следующих за ним коэффициентов ряда будут неверными. На рисунке 3.6 изображена зависимость компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла на заданном расстоянии $\hat{r} = 0.75$ от вершины дефекта. Снова можно видеть значительное отличие численного распределения от приближенного аналитического решения. К такому же выводу можно прийти, анализируя зависимость касательного напряжения $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ , продемонстрированную на рисунке 3.7.

На рисунке 3.8 построена зависимость компоненты тензора напряжения

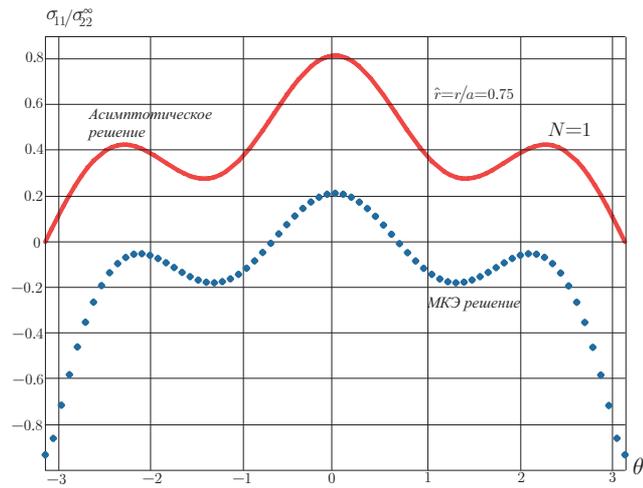


Рисунок 3.5 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ

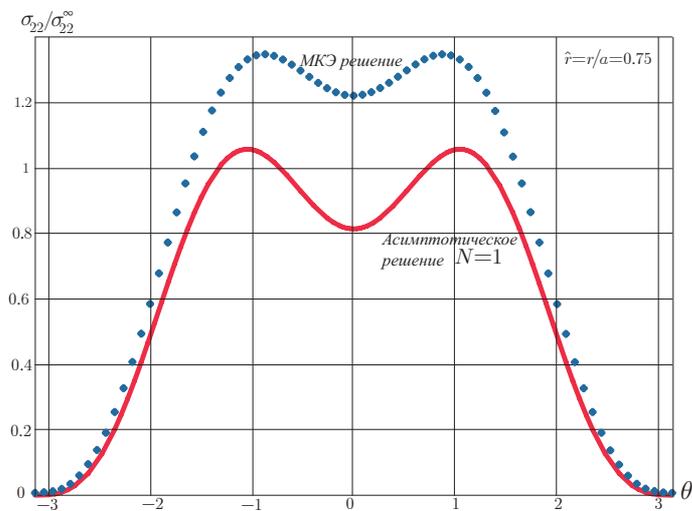


Рисунок 3.6 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ

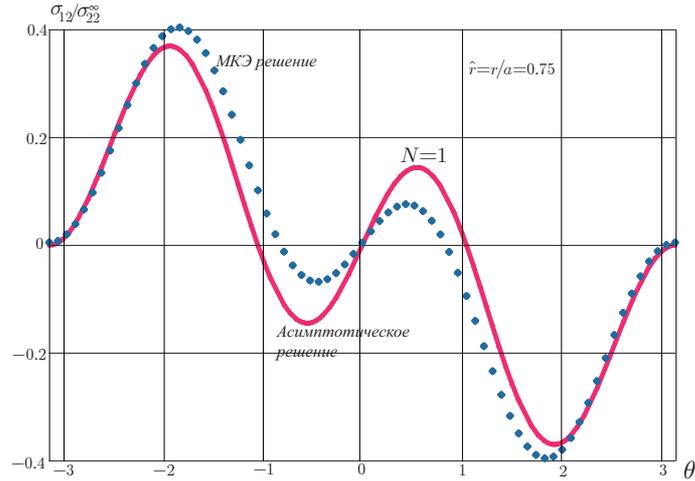


Рисунок 3.7 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ

$\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ . Как и ранее, синими точками показано конечно-элементное решение, сплошная кривая построена с помощью двучленного асимптотического разложения нормального напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$. В этом случае можно было бы ожидать, что соответствие между приближенным и асимптотическим решением будет лучше, поскольку учтены T -напряжения. Тем не менее, как показывает рисунок 3.8, кривые в значительной степени разнятся, что свидетельствует о недостаточности двухпараметрического описания поля напряжений и о необходимости рассмотрения следующих слагаемых.

Зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла θ , к которым приводят трехчленные асимптотические разложения, представлены на рисунках 3.9 – 3.11. Можно видеть, что кривые, представляющие асимптотическое решение, становятся ближе к численным распределениям, однако кривые по-прежнему разнятся и трехчленных асимптотических разложений для точного описания напряженного состояния, очевидно, недостаточно.

Последовательное увеличение количества удерживаемых слагаемых

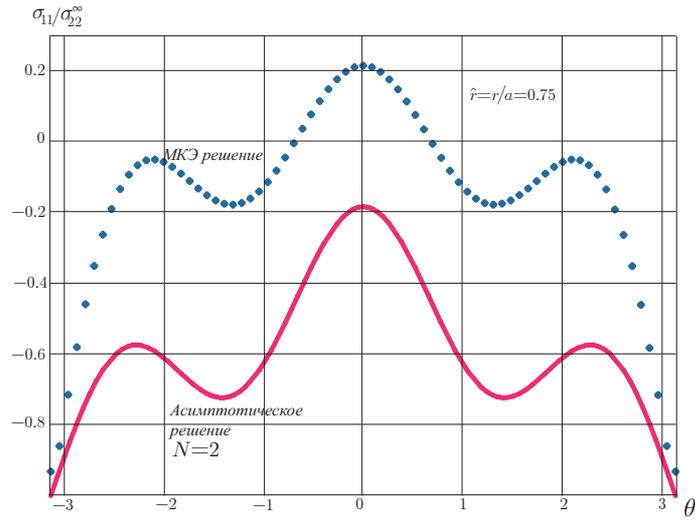


Рисунок 3.8 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (двучленное асимптотическое разложение)

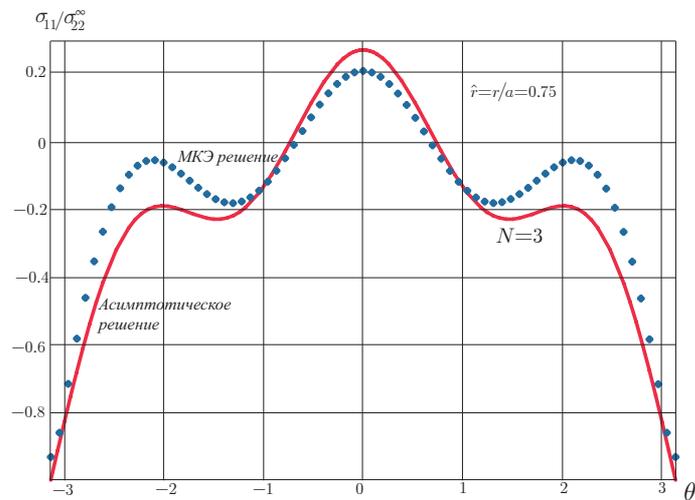


Рисунок 3.9 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

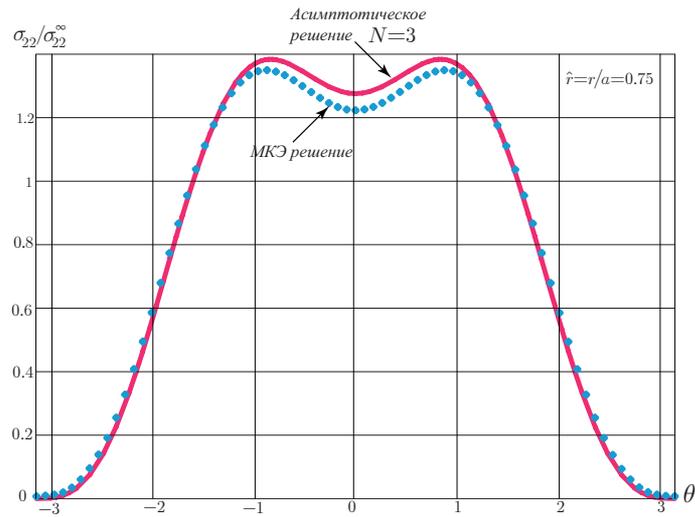


Рисунок 3.10 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

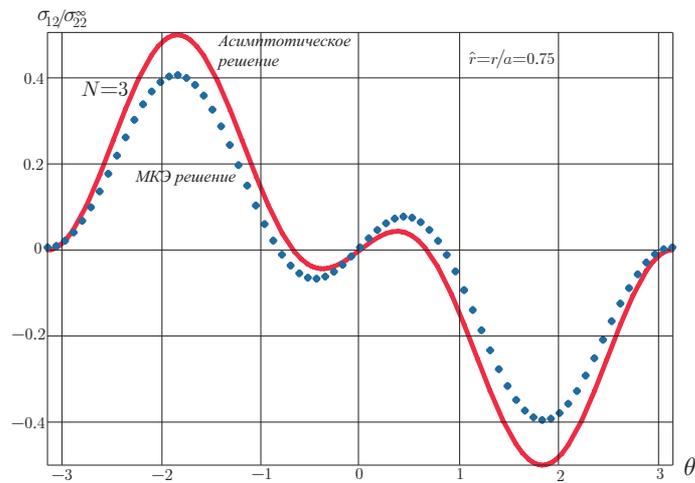


Рисунок 3.11 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

$N = 5$, $N = 7$ и $N = 9$ приводят к зависимостям, показанным на рисунках 3.12 – 3.20. Например, на рисунке 3.12 изображена компонента $\sigma_{11}(\hat{r} = 0.75, \theta)$. Различия между численным и приближенным асимптотическим решениями отчетливы. Более близкими оказываются распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ (рисунок 3.13). Явно заметны отличия между угловыми зависимостями касательного напряжения $\sigma_{12}(r, \theta)$ (рисунок 3.14). Остаются видимыми различия и для семичленных разложений, например, для распределения нормальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, показанной на рисунке 3.15. На основании проведенного анализа и сопоставления асимптотического и конечно-элементного решений можно утверждать обобщенно, что увеличение числа слагаемых в усеченных решениях приводит к заметному сближению решений: чем больше число сохраненных слагаемых ряда, тем лучше соответствие. Далее, можно показать, что для совпадения решений с точностью до 10^{-4} (так чтобы в каждой точке асимптотическое решение отличалось от численного не более, чем на 10^{-4}), следует сохранять не менее 25 слагаемых ряда на указанном расстоянии. Количественные оценки погрешностей между численным и приближенным решениями в случае удержания различного количества слагаемых будут даны ниже при рассмотрении образца с наклонной трещиной.

Для визуализации поведения зависимостей компонент тензора напряжений от полярного угла с ростом количества удерживаемых слагаемых приведены графики 3.21 – 3.26, где показаны компоненты тензора напряжений, построенные с помощью одиннадцатичленных и тринадцатичленных разложений Уильямса. Из приведенных графиков следует, что при $N = 13$ различия между асимптотическим и численным решениями начинают стираться. Поэтому можно утверждать, что для точного описания полей напряжений и перемещений на избранном расстоянии должно сохранять одиннадцать – тринадцать слагаемых в асимптотическом разложе-

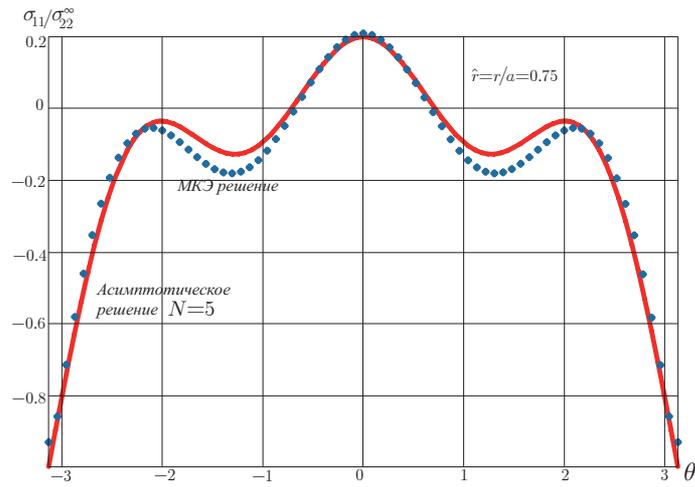


Рисунок 3.12 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (пятичленное асимптотическое разложение)

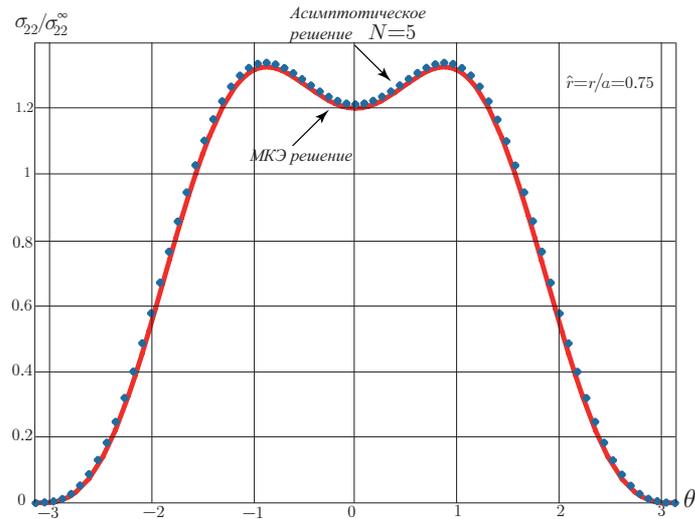


Рисунок 3.13 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (пятичленное асимптотическое разложение)

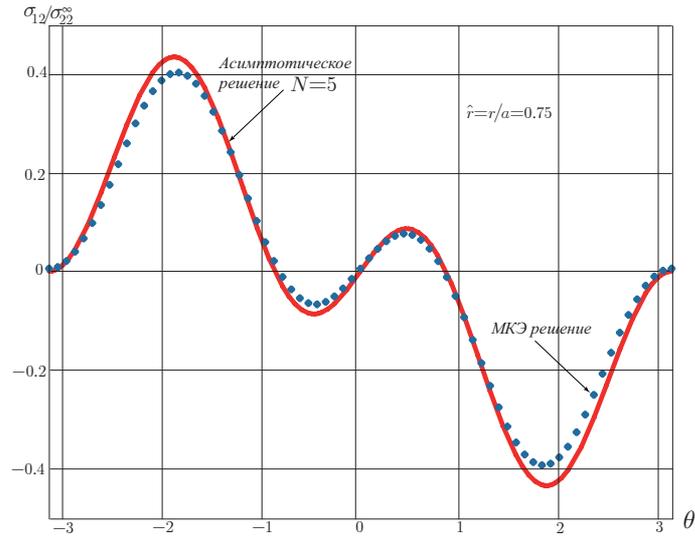


Рисунок 3.14 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (пятичленное асимптотическое разложение)

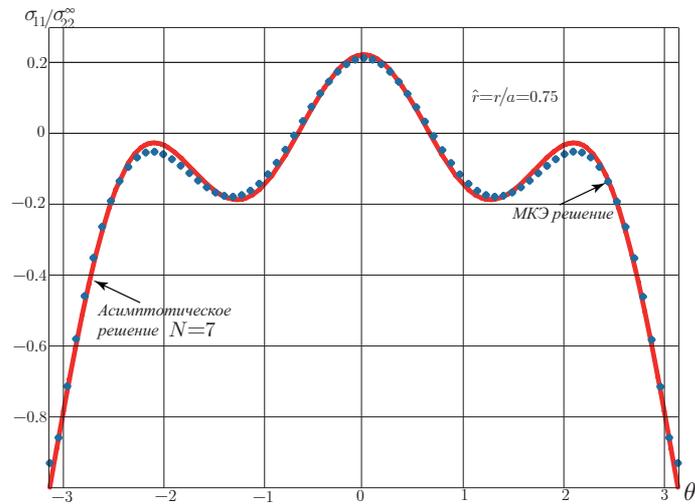


Рисунок 3.15 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

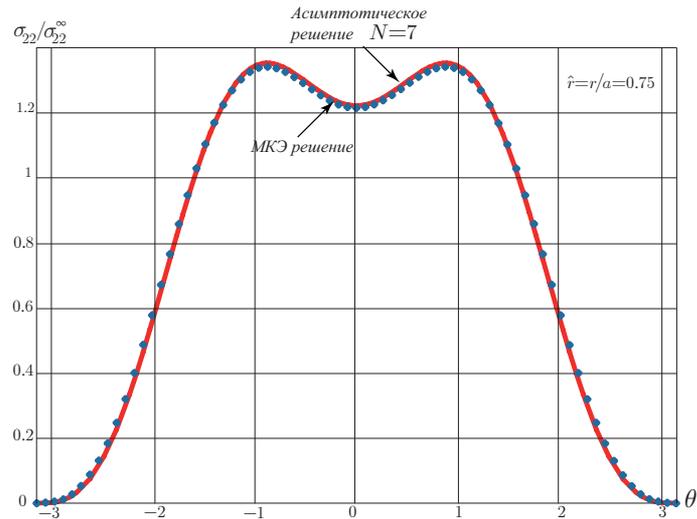


Рисунок 3.16 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

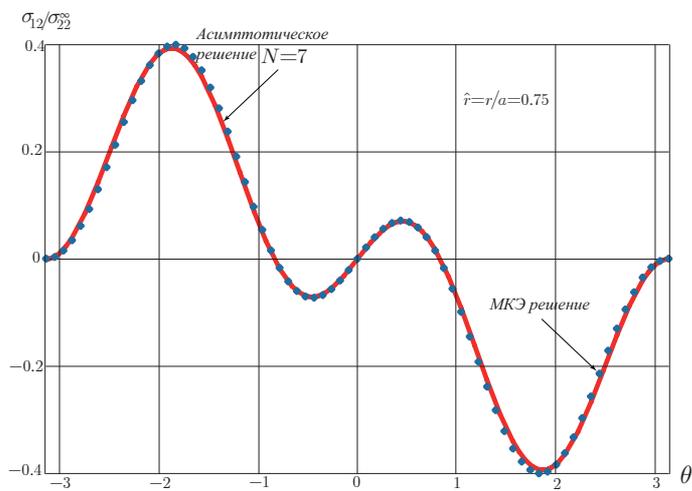


Рисунок 3.17 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

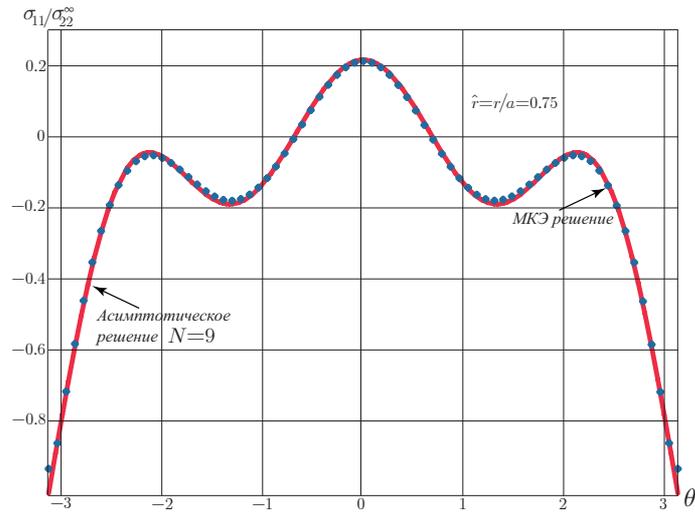


Рисунок 3.18 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (девятичленное асимптотическое разложение)

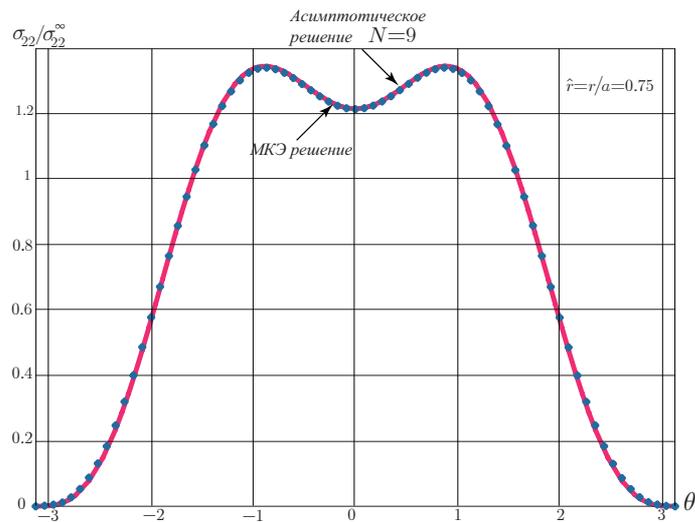


Рисунок 3.19 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (девятичленное асимптотическое разложение)

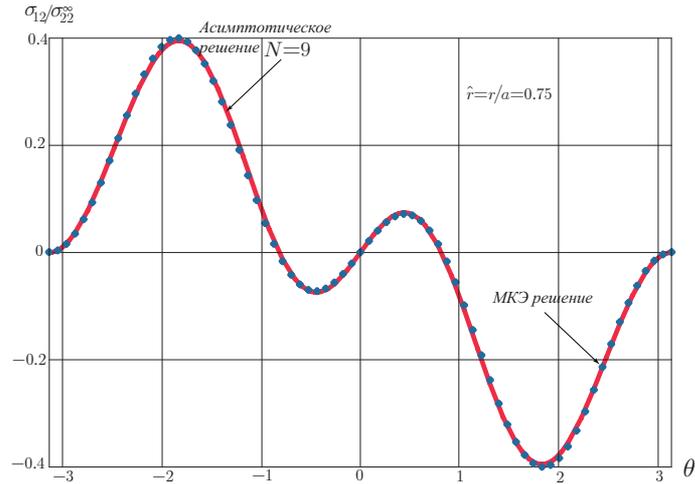


Рисунок 3.20 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (девятичленное асимптотическое разложение)

нии М. Уильямса. Ответ на вопрос, сколько именно слагаемых необходимо удерживать, обуславливается требованиями достичь наперед заданной точности при вычислении коэффициентов ряда Уильямса (как было сказано выше).

На графиках 3.27–3.29 изображены зависимости компонент тензора напряжений, вычисленные с помощью пятнадцатичленных асимптотических разложений Макса Уильямса, и посредством конечно-элементного моделирования. Видно, что распределения визуально полностью совпадают.

Из приведенных графиков явствует, что чем больше задаваемое расстояние от устья трещины, тем больше слагаемых в асимптотическом представлении решения следует сохранять. Можно отметить дополнительно, что результаты конечно-элементного моделирования полностью согласуются с выводами относительно роли и значения высших приближений в ряде Уильямса, приведенными в первой главе работы.

Результаты вычислений коэффициентов ряда Уильямса сведены в таблицу 3.1. Поскольку в настоящем примере речь идет о квадратной пластине

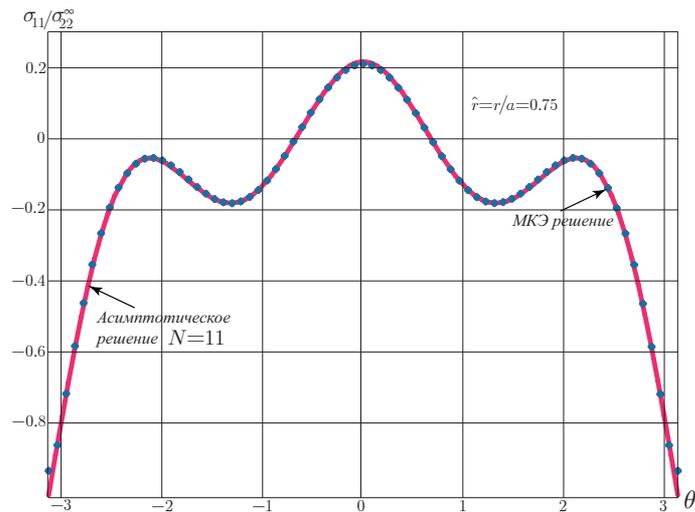


Рисунок 3.21 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (одиннадцатичленное асимптотическое разложение)

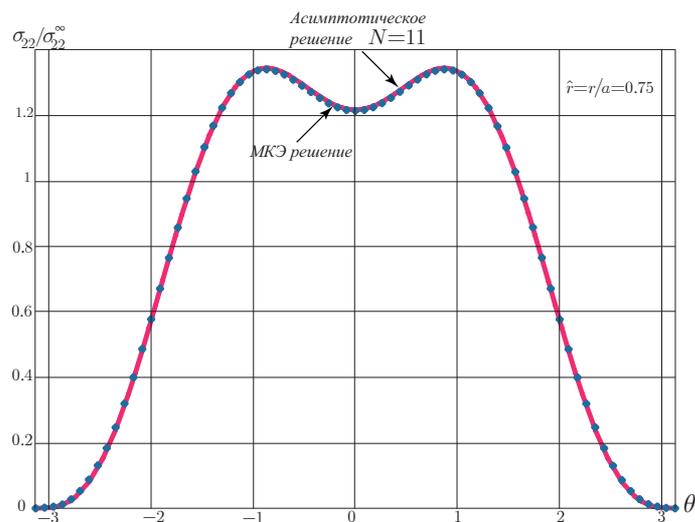


Рисунок 3.22 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (одиннадцатичленное асимптотическое разложение)

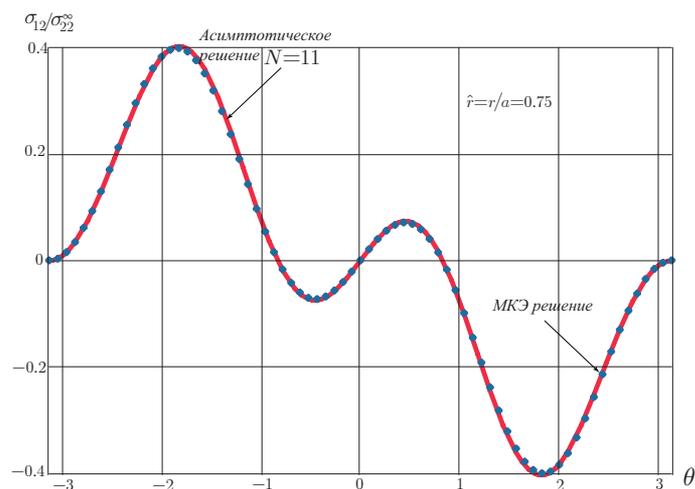


Рисунок 3.23 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (одиннадцатичленное асимптотическое разложение)

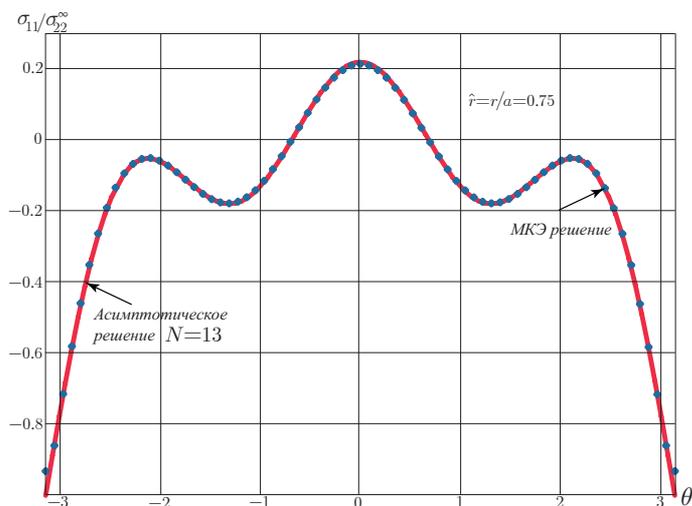


Рисунок 3.24 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (тринадцатичленное асимптотическое разложение)

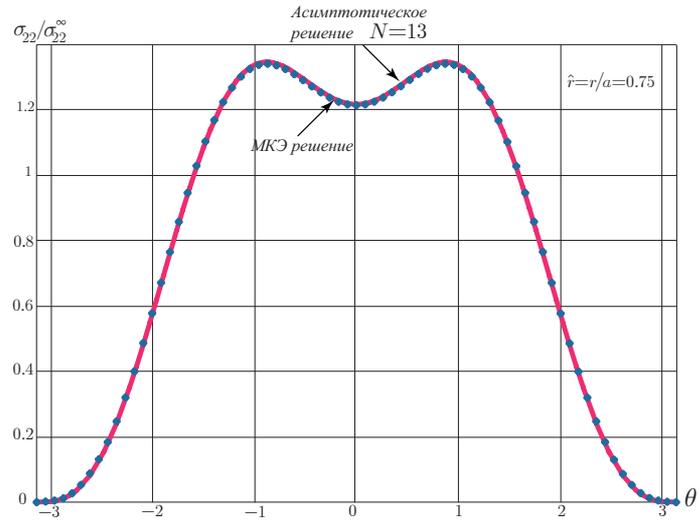


Рисунок 3.25 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (тринадцатичленное асимптотическое разложение)

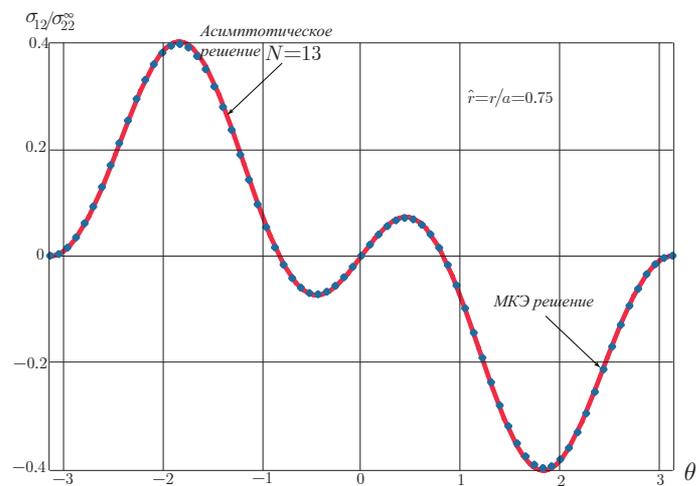


Рисунок 3.26 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (тринадцатичленное асимптотическое разложение)

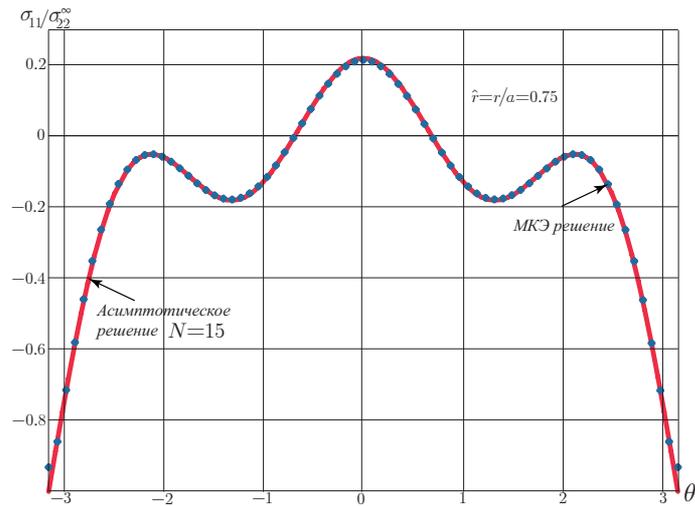


Рисунок 3.27 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (пятнадцатичленное асимптотическое разложение)

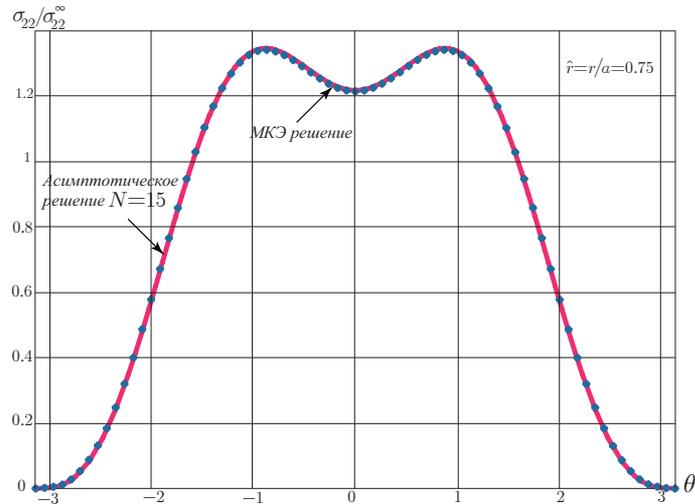


Рисунок 3.28 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (пятнадцатичленное асимптотическое разложение)

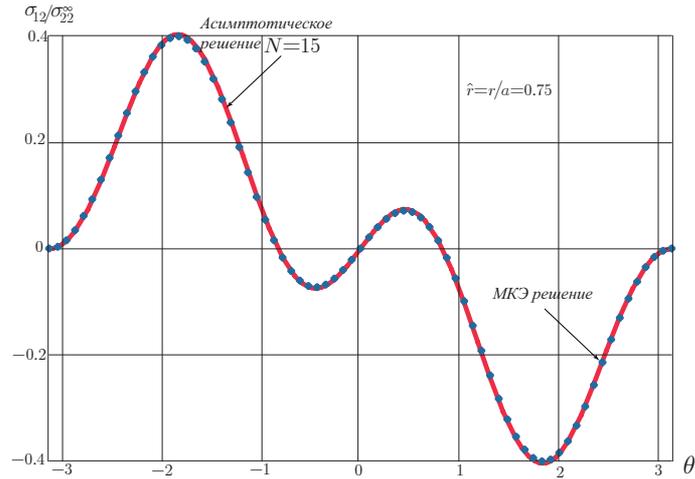


Рисунок 3.29 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от полярного угла θ (пятнадцатичленное асимптотическое разложение)

с центральной трещиной, длина которой много меньше длины стороны, то можно провести сопоставительный анализ вычисленных коэффициентов и коэффициентов многопараметрического разложения, известных из теоретического решения, для которых имеются аналитические выражения. Результаты сравнения коэффициентов для случая растяжения пластины с центральной трещиной приведены в таблице 3.1. В таблицах 3.1 – 3.3 приняты следующие обозначения $\Delta = (a_k^{exact} - a_k^{fem})/a_k^{fem}$, $a_k^{exact} = a_k^m$ – амплитудные множители для пластины с центральной трещиной, взятые из аналитического решения задачи, $a_k^{fem} = a_k^m$ – значения множителей, вычисленные с помощью переопределенного метода. Рассматриваемая конфигурация – пластина с центральной трещиной является удобным тестовым образцом для изучения нормального отрыва и смешанного нагружения пластины. Характер смешанного нагружения указывается посредством параметра смешанности нагружения и в конечно-элементном моделировании параметр смешанности деформирования связывается с углом наклона трещины.

a_k^1	a_k^{exact}	a_k^{fem}	Δ
a_1^1	70.710678 МПа см ^{1/2}	70.710678 МПа см ^{1/2}	0.00%
a_2^1	-25.000000 МПа	-25.000000 МПа	0.00%
a_3^1	17.677669 МПа см ^{-1/2}	17.695347 МПа см ^{-1/2}	0.10%
a_5^1	-2.209708 МПа см ^{-3/2}	-2.214349 МПа см ^{-3/2}	0.21%
a_7^1	0.552472 МПа см ^{-5/2}	0.554636 МПа см ^{-5/2}	0.40%
a_9^1	-0.172633 МПа см ^{-7/2}	-0.173669 МПа см ^{-7/2}	0.60%
a_{11}^1	0.060421 МПа см ^{-9/2}	0.060087 МПа см ^{-9/2}	0.75%
a_{13}^1	-0.022658 МПа см ^{-11/2}	-0.022884 МПа см ^{-11/2}	1.40%
a_{15}^1	0.008901 МПа см ^{-13/2}	0.00907 МПа см ^{-13/2}	2.00%

Таблица 3.1 – Значения амплитудных множителей ряда Уильямса и их сравнение с аналитическим решением

3.2. Пластина с центральной наклонной трещиной (смешанное нагружение образца с трещиной)

В параграфе приводится анализ конечно-элементных расчетов нагружения пластины с центральной трещиной, наклоненной к каждой из координатных осей под углом 45 градусов. Данная конфигурация является удобной для изучения смешанного нагружения образца с дефектом. В рассматриваемом случае параметр смешанности нагружения равен $M^e = 0.5$. В вычислительном эксперименте рассмотрена пластина с трещиной, длина которой много меньше длины стороны квадратной пластины. Данное условие позволяет провести сравнение конечно-элементного расчета и приближенного решения М. Уильямса с целью выяснения количества слагаемых, необходимых для удержания в асимптотическом представлении решения в областях, примыкающих к вершине трещины различной протяженности.

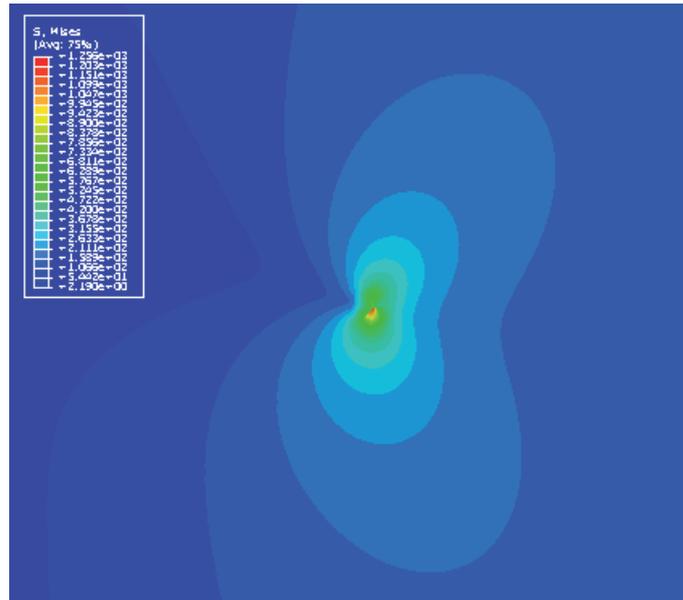


Рисунок 3.30 – Типичное конечно-элементное распределение интенсивности напряжений $\sigma_e(x_1, x_2)$ у кончика наклонной трещины

Типичное распределение интенсивности касательных напряжений вблизи верхней вершины наклонной трещины, полученное в конечно-элементной системе SIMULIA Abaqus, приведено на рисунке 3.30.

Ниже приводятся сравнения зависимостей компонент тензора напряжений от полярного угла, полученные с помощью конечно-элементного моделирования и с помощью асимптотического представления Макса Уильямса, для двух различных расстояний от вершины наклонной трещины с целью выяснения зависимости числа подлежащих сохранению слагаемых ряда Уильямса от размеров области и расстояний от вершины наклонной трещины. Первым расстоянием от кончика наклонной трещины выбрано расстояние $\hat{r} = r/a = 0.33$, где a – половина длины трещины. На рисунках 3.31 – 3.33 продемонстрированы зависимости компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$, $\sigma_{12}(r, \theta)$ $\sigma_{22}(r, \theta)$ вдоль окружности выбранного радиуса. Синими точками показано конечно-элементное решение, тогда как красными сплошными линиями показано приближенное аналитическое решение, полученное с

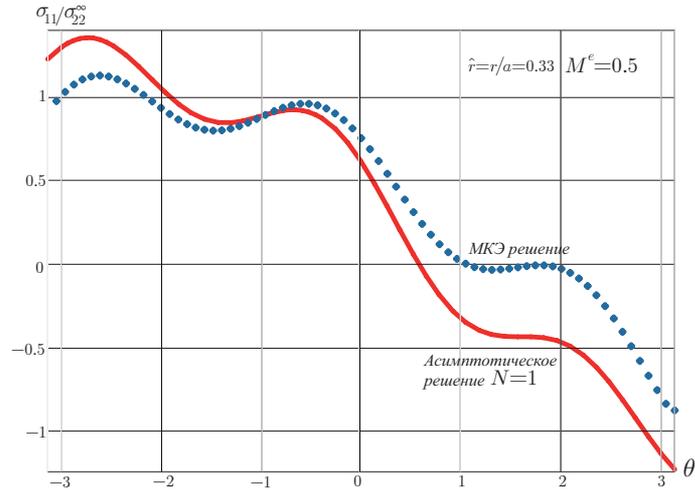


Рисунок 3.31 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (одночленное асимптотическое разложение)

помощью ряда М. Уильямса с универсальными угловыми зависимостями $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$, входящими в разложение, в котором удержано главное (доминирующее) слагаемое. Несмотря на сравнительно небольшое (по сравнению с длиной трещины) расстояние от кончика трещины, кривые, полученные методом конечных элементов и посредством асимптотического решения, в значительной степени отличаются друг от друга.

Из рисунков 3.31 – 3.33 явствует, что угловые распределения напряжений существенно различаются между собой и удержание исключительно первого лидирующего слагаемого на выбранном расстоянии от вершины трещины приведет к значительным погрешностям при вычислении коэффициентов интенсивности напряжения и следующих за ним коэффициентов многопараметрического разложения М. Уильямса. Следовательно, в выбранной области у вершины трещины для точного описания поля напряжений должно сохранять большее количество слагаемых. Для выяснения необходимого числа слагаемых сопоставим численное решение задачи и усеченные на различном количестве слагаемых ряды Уильямса.

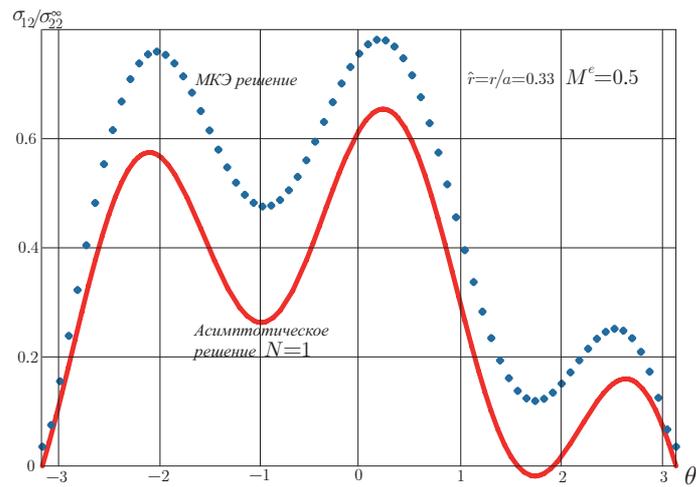


Рисунок 3.32 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (одночленное асимптотическое разложение)

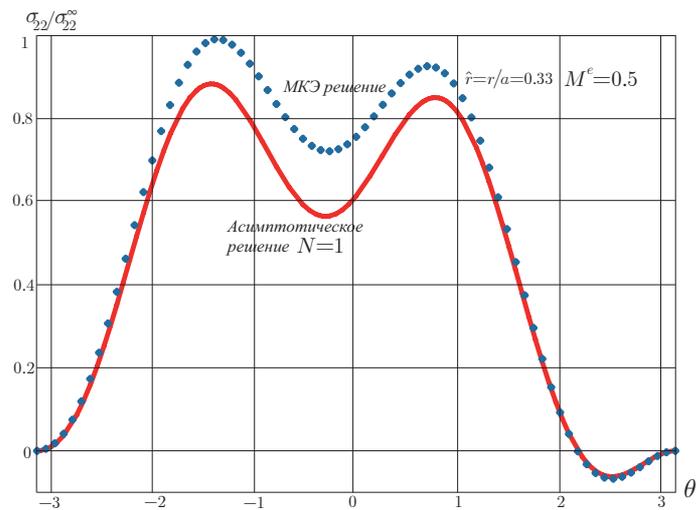


Рисунок 3.33 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (одночленное асимптотическое разложение)

На рисунках 3.34 – 3.36 продемонстрированы зависимости компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$, $\sigma_{12}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$ вдоль того же контура – окружности радиуса $\hat{r} = r/a = 0.33$. Из рисунков 3.34 – 3.36 ясно, что трехчленное асимптотическое разложение значительно ближе к точному численному решению, чем одночленное асимптотическое разложение. Тем не менее, как это видно из рисунков 3.34 – 3.36, сохранение трех слагаемых в ряде Уильямса не является достаточным и имеется очевидная необходимость увеличения числа слагаемых ряда. На рисунках 3.37 – 3.39 продемонстрированы зависимости напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, $\sigma_{12}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$, вычерченные с помощью пятичленных асимптотических разложений Макса Уильямса. Наблюдается очень хорошее соответствие численного и асимптотического решений. Из рисунков 3.40 – 3.42, где показаны семичленные разложения поля напряжений, становится ясным, что дальнейшее увеличение числа слагаемых разложения не является необходимым на избранном расстоянии от устья трещины. В круговой области, охватывающей вершину трещины, с радиусом $\hat{r} = 0.33$ достаточно удерживать 5-7 слагаемых ряда.

Поучительно рассмотреть окрестность вершины трещины большего радиуса. Настоящий анализ направлен на возможность расширения области действия решения Уильямса (на представление полей напряжений, деформаций и перемещений с помощью асимптотического разложения Уильямса в области, простирающейся на расстояния, сопоставимые с длиной трещины). С этой целью далее проводится сопоставление зависимостей компонент тензора напряжений от полярного угла вблизи вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$. На рисунке 3.43 показана верхняя вершина наклонной трещины и выбранный путь – окружность радиуса $\hat{r} = r/a = 0.95$ с центром в вершине трещины. На рисунках 3.44–3.58 красной сплошной линией снова показано асимптотическое представление решения, тогда как синими точками представлено численное решение задачи в узлах конечно-

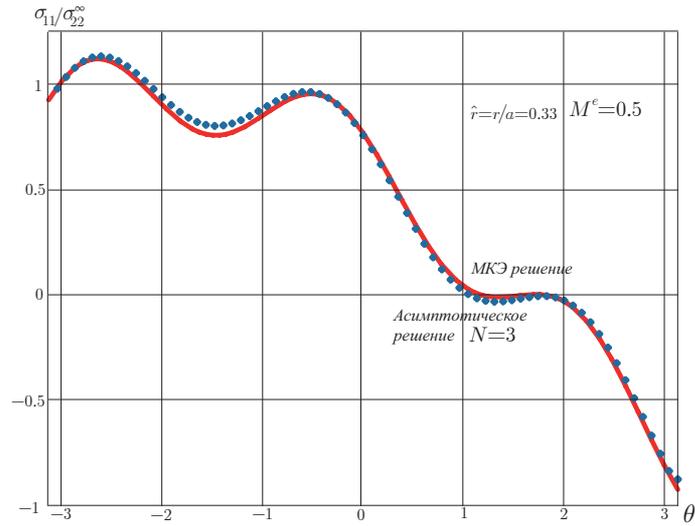


Рисунок 3.34 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

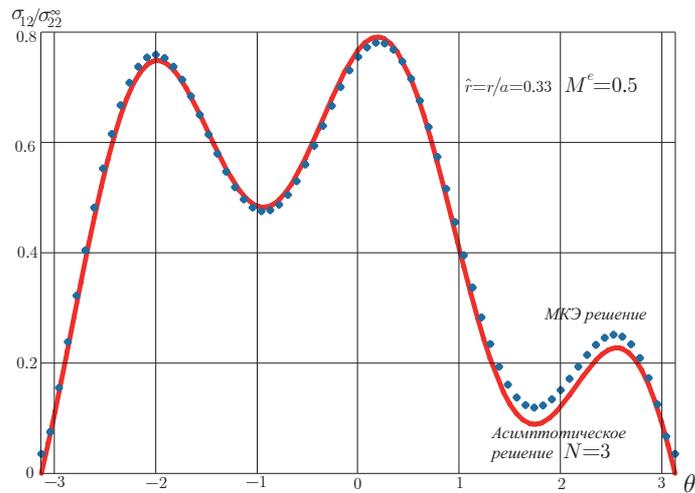


Рисунок 3.35 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

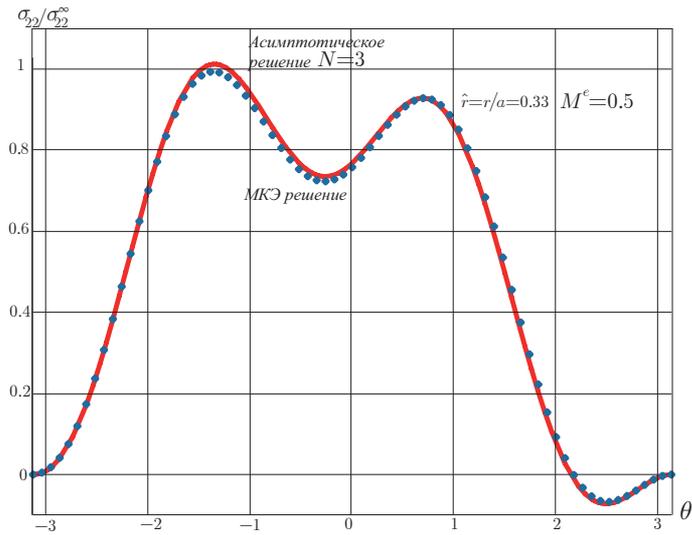


Рисунок 3.36 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

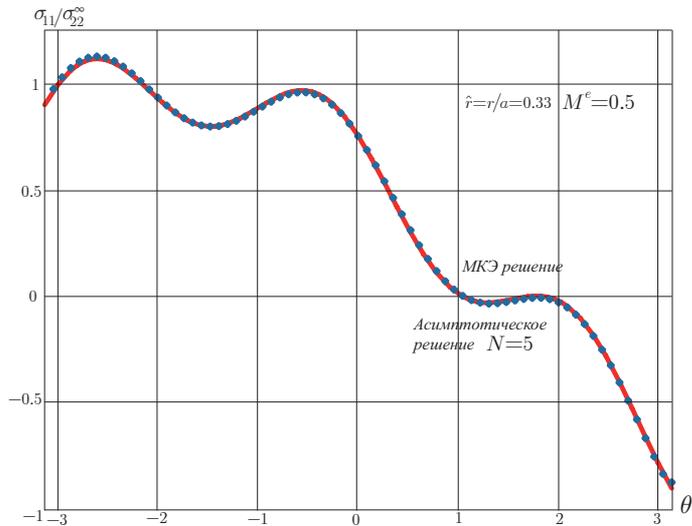


Рисунок 3.37 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (пятичленное асимптотическое разложение)

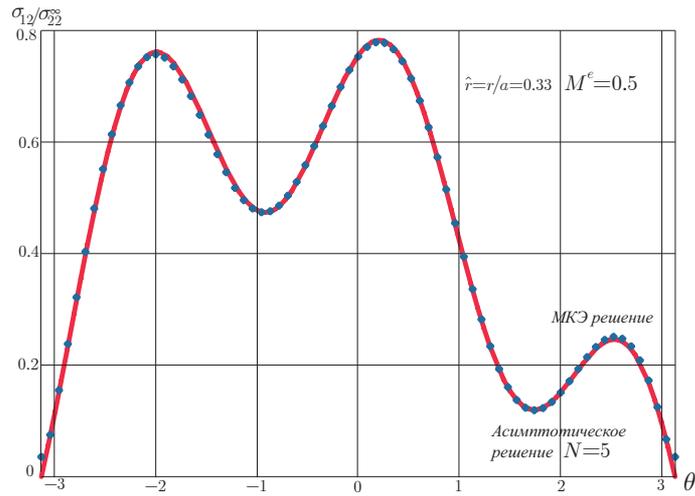


Рисунок 3.38 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (пятичленное асимптотическое разложение)

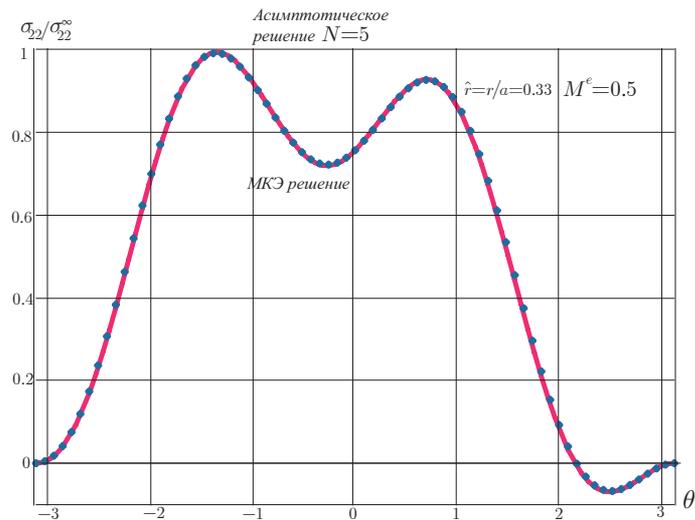


Рисунок 3.39 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (пятичленное асимптотическое разложение)

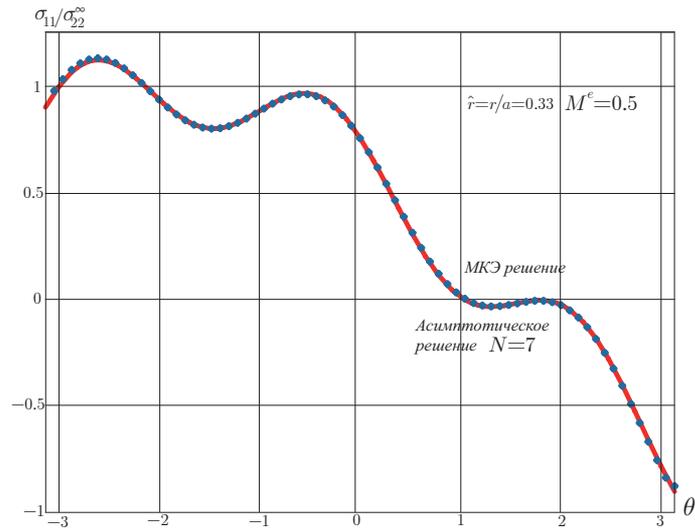


Рисунок 3.40 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

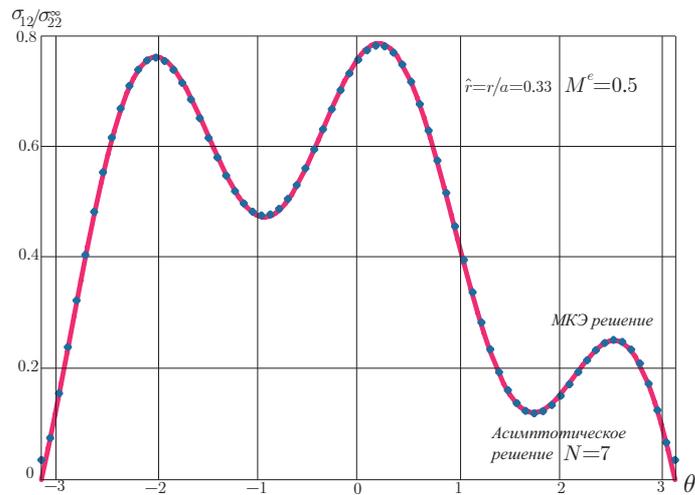


Рисунок 3.41 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

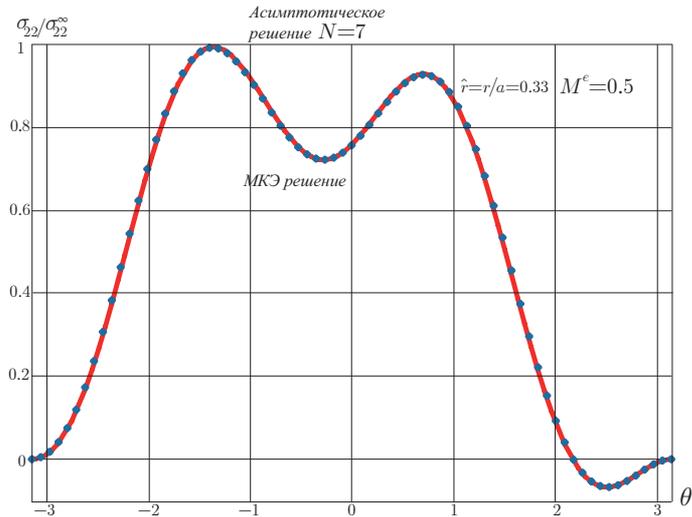


Рисунок 3.42 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.33$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

элементной сетки.

На рисунках 3.44 – 3.46 отображены угловые зависимости напряжений на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$, полученные методом конечных элементов и с помощью асимптотического представления решения, в котором сохранено исключительно доминирующее слагаемое. Совершенно ясно, что главный член асимптотического разложения не может правильно описать поведение компонент тензора напряжений, ибо наблюдаются существенные расхождения между численным и асимптотическим распределениями напряжений. В существенной степени отличаются друг от друга все три компоненты тензора напряжений на указанном расстоянии от вершины трещины. Легко показать, что T -напряжение в случае угла наклона трещины, равного 45 градусам, обращается в нуль. Поэтому следующие изображения, взятые для анализа, отвечают $N = 3$.

На рисунках 3.47 – 3.49 отображены угловые зависимости напряжений на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$, полученные методом конечных элементов

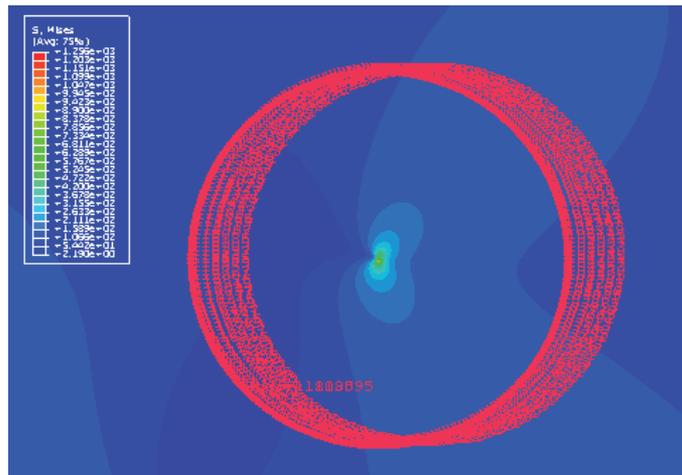


Рисунок 3.43 – Выбранный для анализа контур в конечно-элементной модели: окружность радиуса $\hat{r} = r/a = 0.95$ в центром в вершине трещины

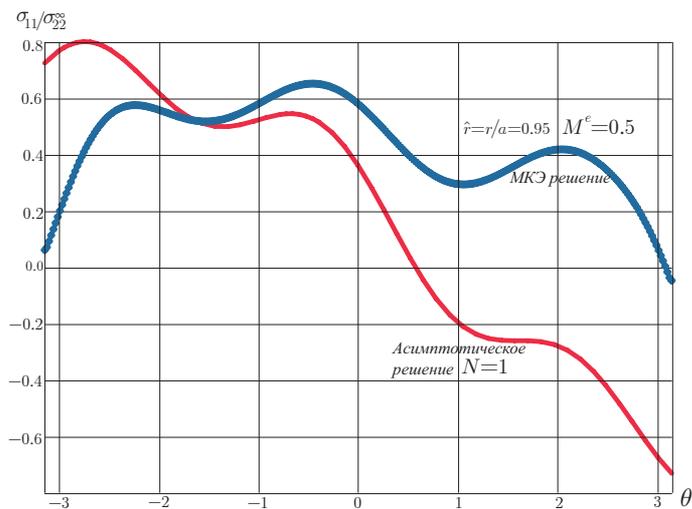


Рисунок 3.44 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (одночленное асимптотическое разложение)

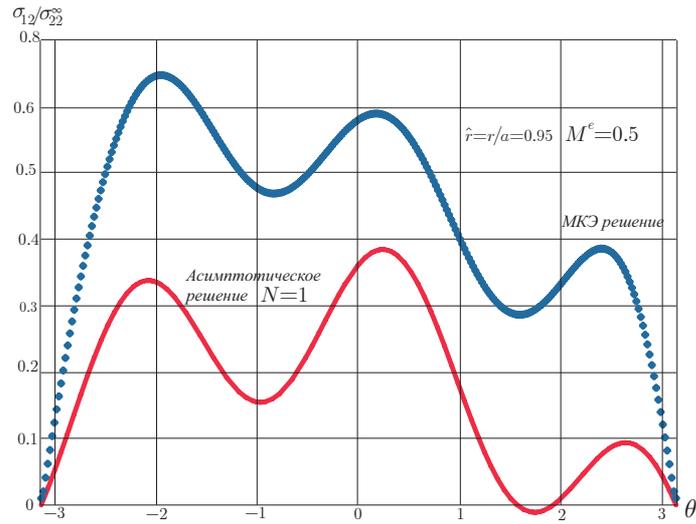


Рисунок 3.45 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (одночленное асимптотическое разложение)

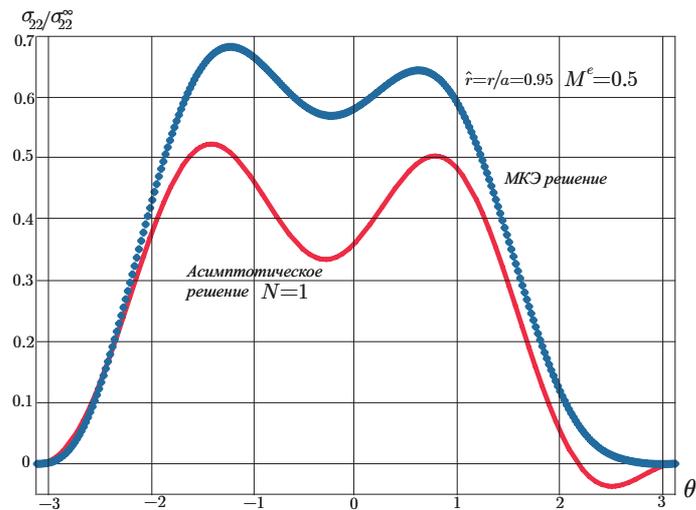


Рисунок 3.46 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (одночленное асимптотическое разложение)

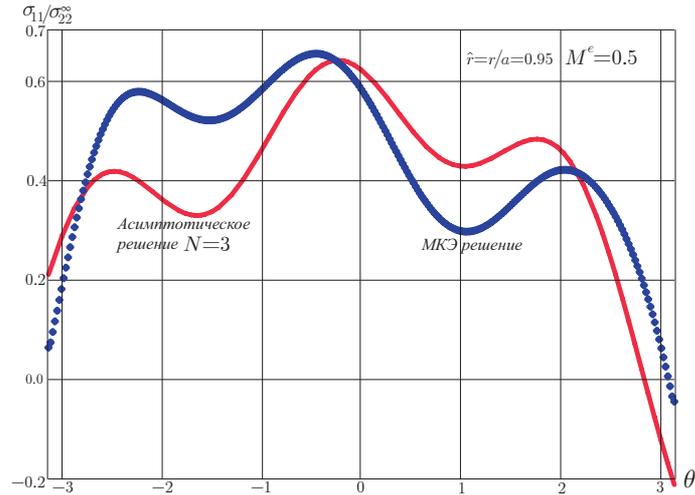


Рисунок 3.47 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

(синие точки) и с помощью асимптотического представления решения, в котором сохранены два первых слагаемых (сплошная красная линия). Очевидно, что трехчленное представление напряжений (фактически, являющееся двучленным) изменяет картину, т.е. добавленное слагаемое привносит значимый вклад в описание поля напряжений, но является недостаточным.

Минуя пятичленное разложение, обратимся к ряду Уильямса, усеченному на семи слагаемых. Результаты построения угловых зависимостей приведены на рисунках 3.50 – 3.52. Сличение конечно-элементного и асимптотического решений позволяет сделать заключение, что и семичленных разложений не достаточно для правильного представления компонент напряжений.

Одиннадцатичленные разложения, приведенные на рисунках 3.53 – 3.55, становятся ближе к конечно-элементному решению, но можно отметить различия. Лишь удержание пятнадцатичленного разложения (рисунки 3.56 – 3.58) дает возможность получить совпадающие распределения

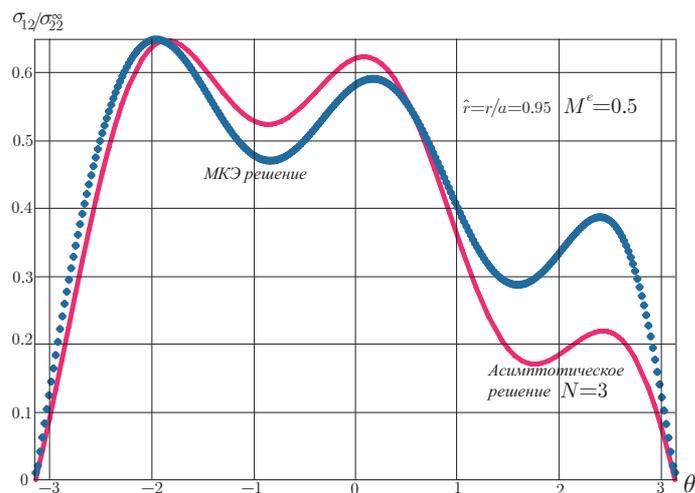


Рисунок 3.48 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

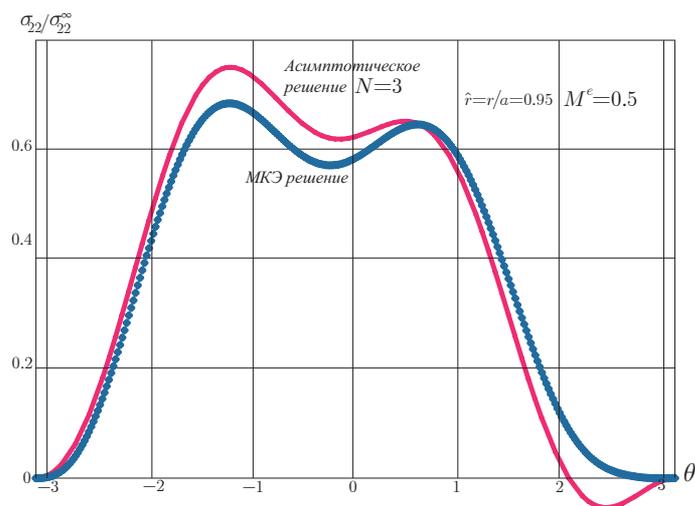


Рисунок 3.49 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (трехчленное асимптотическое разложение)

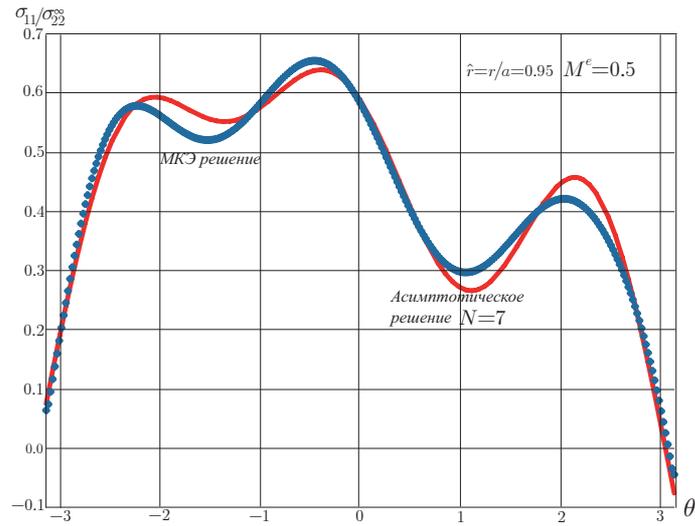


Рисунок 3.50 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

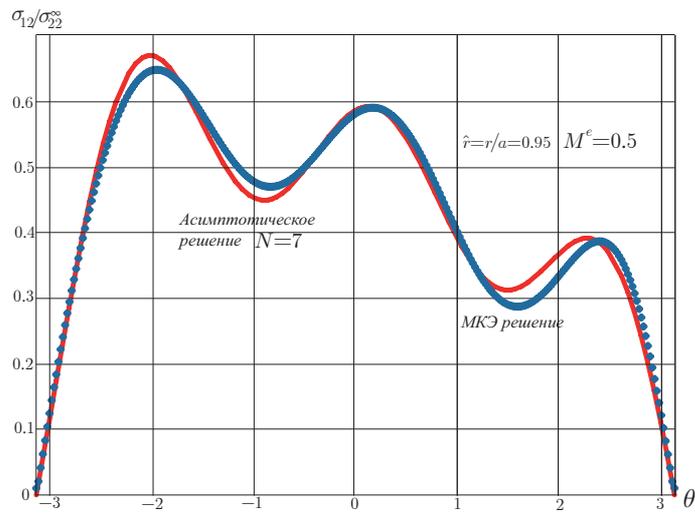


Рисунок 3.51 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

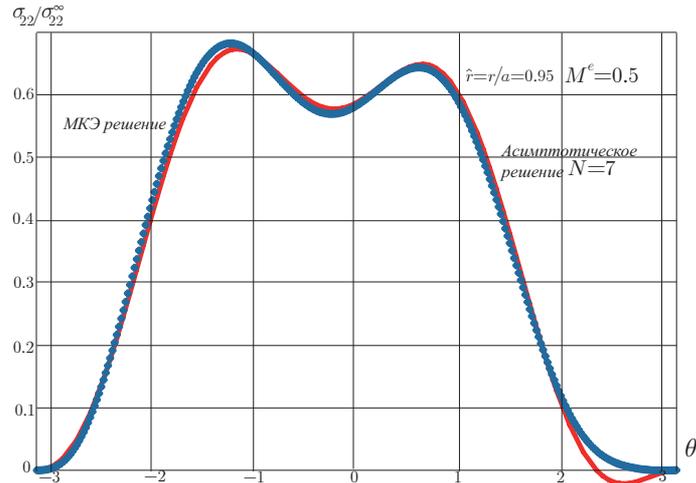


Рисунок 3.52 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (семичленное асимптотическое разложение)

напряжений.

На рисунках 3.59 – 3.61 приведены сравнения значений конечно-элементных решений и приближенных решений, получаемых с помощью усеченных на различном количестве слагаемых рядов, для компонент тензора напряжений σ_{11} (слева) и σ_{12} (справа) у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$. На рисунках 3.59 – 3.61 показана относительная погрешность в процентах между численным значением компоненты в узловой точке конечно-элементной сетки и значением тензора напряжений в этой же точке, вычисленным посредством ряда Макса Уильямса, в котором удержаны пятнадцать слагаемых (рисунок 3.59), семнадцать слагаемых (рисунок 3.60) и девятнадцать слагаемых (рисунок 3.61). Компонента σ_{22} у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ не показана, поскольку относительная погрешность существенно меньше по сравнению с данными для приведенных компонент σ_{11} и σ_{12} .

Из рисунков 3.59 – 3.61 видно, что относительная погрешность уменьшается с ростом числа удерживаемых слагаемых. Чем больше число удер-

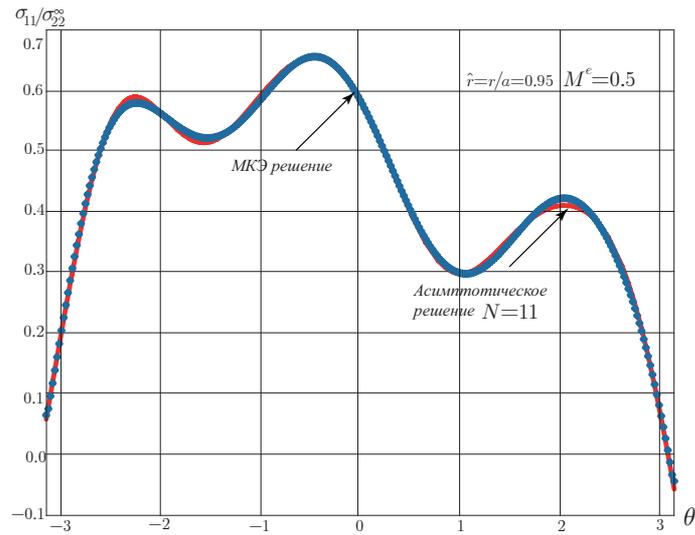


Рисунок 3.53 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (одиннадцатичленное асимптотическое разложение)

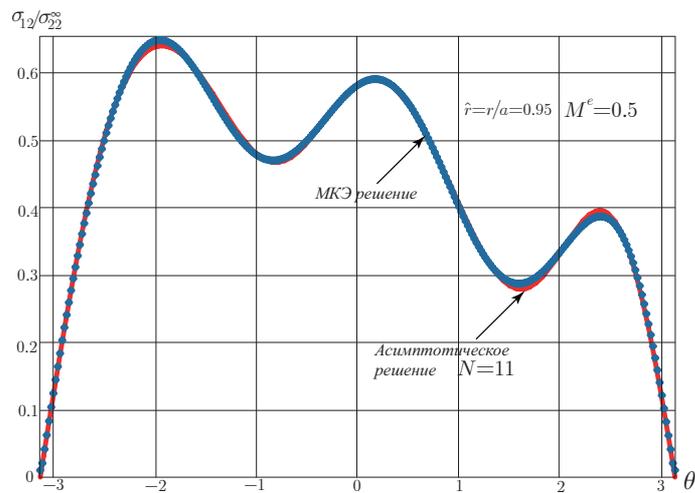


Рисунок 3.54 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (одиннадцатичленное асимптотическое разложение)

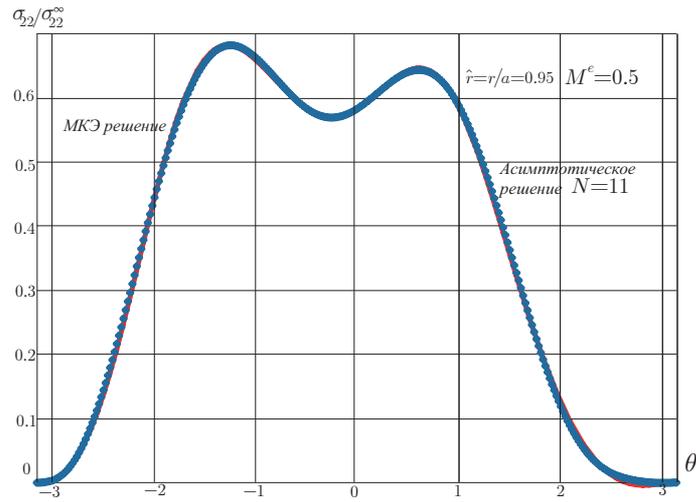


Рисунок 3.55 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (одиннадцатичленное асимптотическое разложение)

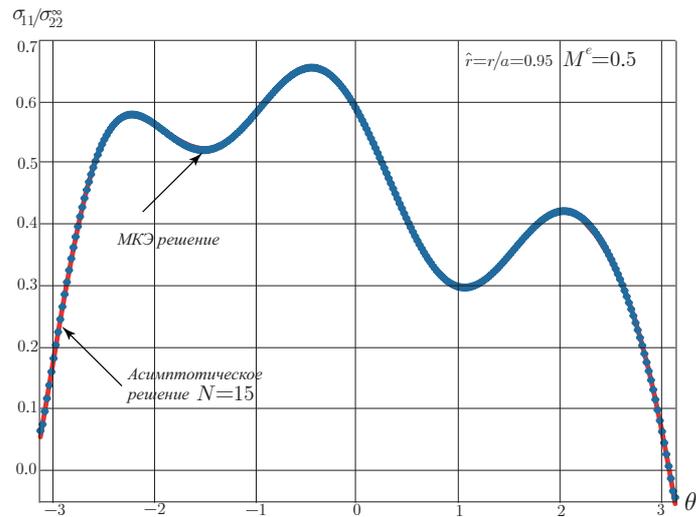


Рисунок 3.56 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (пятнадцатичленное асимптотическое разложение)

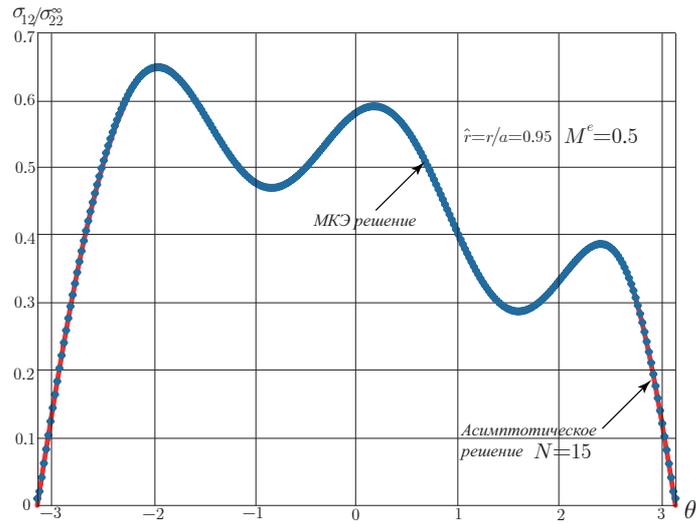


Рисунок 3.57 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (пятнадцатичленное асимптотическое разложение)

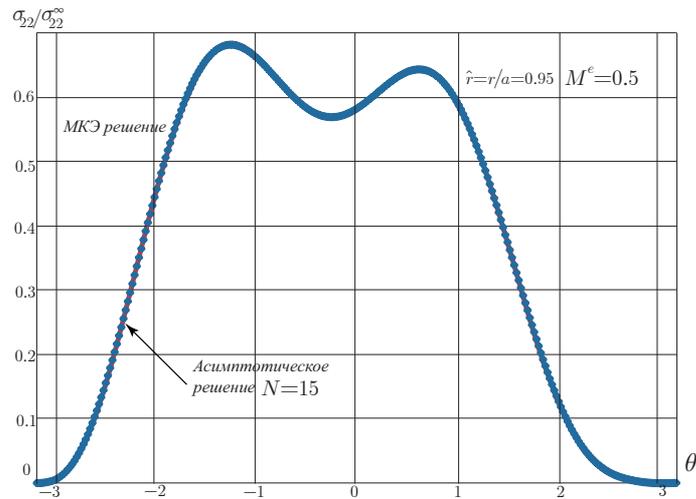


Рисунок 3.58 – Зависимость компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$ от полярного угла θ (пятнадцатичленное асимптотическое разложение)

жанных слагаемых, тем меньше относительная погрешность поля напряжений у вершины наклонной трещины, описываемого рядом Уильямса. Приведем полученные числовые оценки относительной погрешности. В случае, когда $N = 13$ компонента тензора напряжений σ_{11} , найденная с помощью подхода Уильямса, отличается от конечно-элементного решения на 1.5%, компонента σ_{12} не более, чем на 2%. Максимальное значение относительной погрешности в узлах сетки компоненты σ_{22} не превышает 0.5%. Усекая асимптотический ряд на пятнадцатом слагаемом, т.е принимая $N = 15$, можно найти, что максимальная погрешность для компоненты σ_{11} равна 0.80%, для компоненты σ_{12} – 1.30% и для компоненты σ_{22} – 0.25% соответственно. Для $N = 17$ относительная погрешность для каждой компоненты уменьшается и составляет: σ_{11} – 0.70%, σ_{12} – 0.96%, σ_{22} – 0.07% соответственно. Наконец, для $N = 19$ относительные погрешности для каждой компоненты равны: σ_{11} – 0.53%, σ_{12} – 0.78%, σ_{22} – 0.04%. Дающий основу вывод, явствующий из сопоставления результатов конечно-элементного моделирования и приближенного решения М. Уильямса, состоит в том, что высшие приближения на рассмотренном расстоянии приносят свой вклад и окончательный выбор количества удерживаемых слагаемых определяется желанием достичь значений параметров механики разрушения с заданной точностью. Если допустима погрешность порядка одного процента, то достаточно сохранить семнадцать слагаемых ряда Уильямса. Если нужна большая точность (менее одного процента), то следует прибегать к ряду с большим числом слагаемых. В противном случае, значения коэффициентов ряда Уильямса из численного анализа будут определены с погрешностью, превышающей один процент. Необходимость определения значения масштабных множителей с более высокой точностью потребует сохранения в разложении М. Уильямса большего числа слагаемых. Если исследователю необходимо расширить область, из которой выбираются точки, то в

асимптотическом разложении М. Уильямса должно удерживать большее количество слагаемых.

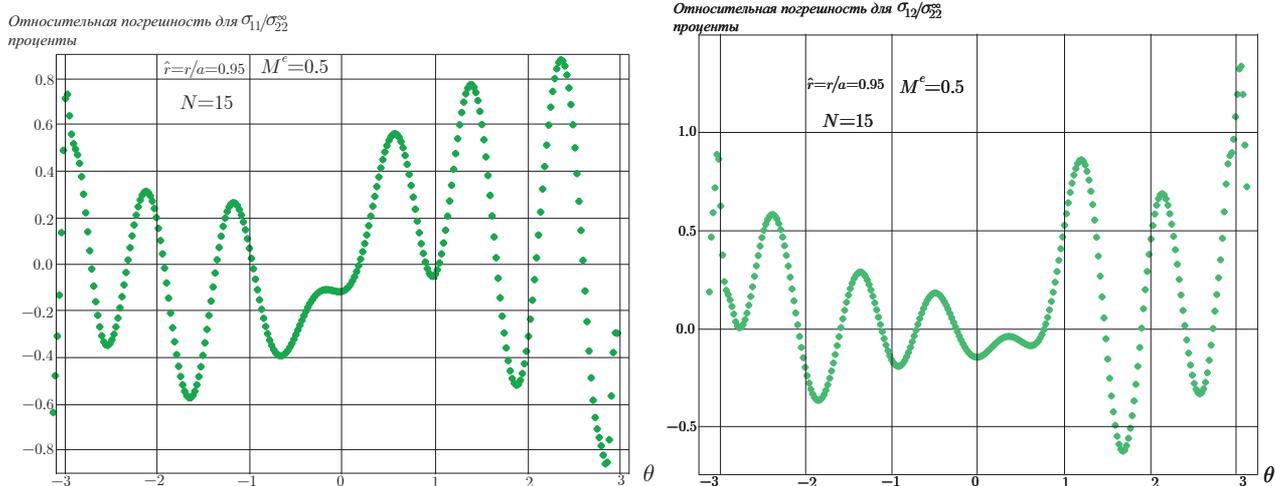


Рисунок 3.59 – Относительная погрешность (в процентах) между конечно-элементным решением и пятнадцатичленным асимптотическим рядом для компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ (слева) и $\sigma_{12}(r, \theta)$ (справа) у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$

В таблицах 3.2, 3.3 приведены амплитудные множители для пластины с наклонной центральной трещиной, вычисленные с помощью переопределенного метода.

Становится ясным, что решение для смешанного деформирования пластины с разрезом обладает закономерностями, освещенными ранее для чистого растяжения. Описание полей перемещений и напряжений с использованием разложения Макса Уильямса с учетом только первого или первых двух членов возможно только в очень малой области вокруг вершины трещины. С увеличением расстояния от вершины трещины также увеличивается количество слагаемых, необходимых для поддержания необходимой точности описания. На больших расстояниях от вершины трещины реконструкция поля напряжений обеспечивается большим количеством членов ряда Уильямса при анализе разрушения.

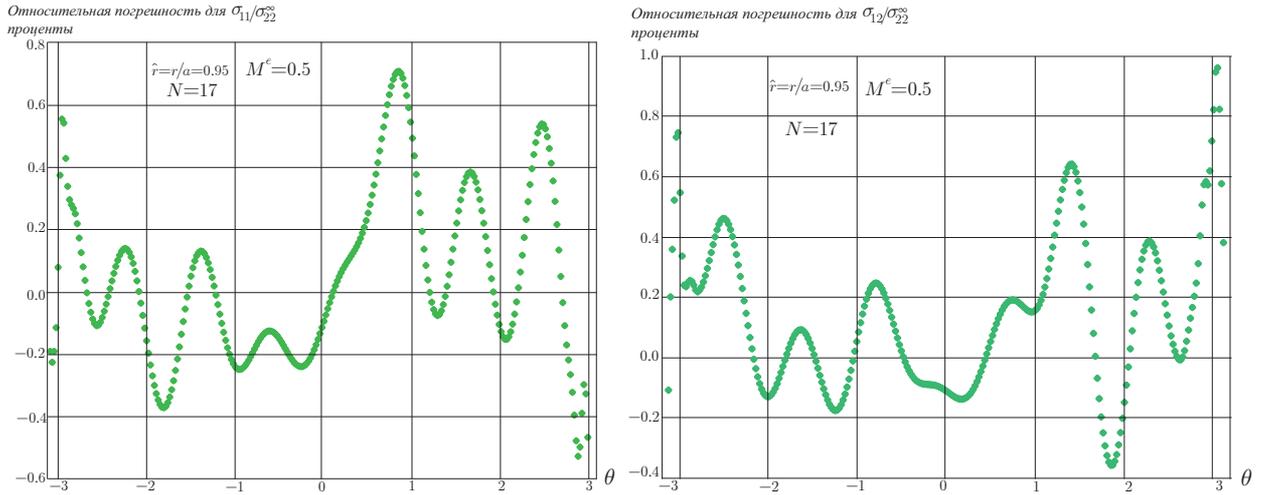


Рисунок 3.60 – Относительная погрешность (в процентах) между конечно-элементным решением и семнадцатичленным асимптотическим рядом для компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ (слева) и $\sigma_{12}(r, \theta)$ (справа) у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$

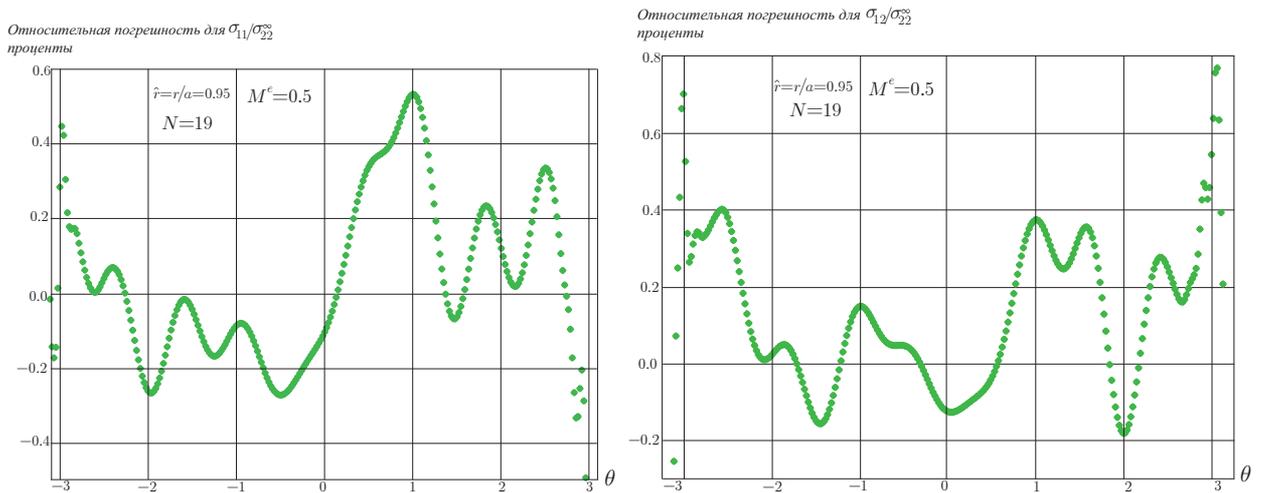


Рисунок 3.61 – Относительная погрешность (в процентах) между конечно-элементным решением и девятнадцатичленным асимптотическим рядом для компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ (слева) и $\sigma_{12}(r, \theta)$ (справа) у кончика трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.95$

Установлено, что члены более высокого порядка степенного разложения Уильямса, полученные для описания поля напряжений/смещений в

a_k^1	a_k^{exact}	a_k^{fem}	Δ
a_1^1	35.35539 МПа см ^{1/2}	35.35539 МПа см ^{1/2}	0.00%
a_3^1	8.838834 МПа см ^{-1/2}	8.838834 МПа см ^{-1/2}	0.15%
a_5^1	-1.104854 МПа см ^{-3/2}	-1.108168 МПа см ^{-3/2}	0.30%
a_7^1	0.276213 МПа см ^{-5/2}	0.277346 МПа см ^{-5/2}	0.41%
a_9^1	-0.086316 МПа см ^{-7/2}	-0.086382 МПа см ^{-7/2}	0.72%
a_{11}^1	0.030210 МПа см ^{-9/2}	0.030482 МПа см ^{-9/2}	0.90%
a_{13}^1	-0.011329 МПа см ^{-11/2}	-0.011499 МПа см ^{-11/2}	1.50%
a_{15}^1	0.004450 МПа см ^{-13/2}	0.004557 МПа см ^{-13/2}	2.40%

Таблица 3.2 – Значения амплитудных множителей ряда Уильямса для симметричной части решения и их сравнение с аналитическим решением (пластина с наклонной трещиной)

a_k^2	a_k^{exact}	a_k^{fem}	Δ
a_1^2	-35.35539 МПа см ^{1/2}	35.35539 МПа см ^{1/2}	0.00%
a_3^2	-8.838834 МПа см ^{-1/2}	-8.838834 МПа см ^{-1/2}	0.19%
a_5^2	1.104854 МПа см ^{-3/2}	1.108389 МПа см ^{-3/2}	0.32%
a_7^2	-0.276213 МПа см ^{-5/2}	-0.277561 МПа см ^{-5/2}	0.49%
a_9^2	0.086316 МПа см ^{-7/2}	0.087072 МПа см ^{-7/2}	0.80%
a_{11}^2	-0.030210 МПа см ^{-9/2}	-0.030543 МПа см ^{-9/2}	1.10%
a_{13}^2	0.011329 МПа см ^{-11/2}	0.011510 МПа см ^{-11/2}	1.60%
a_{15}^2	0.004450 МПа см ^{-13/2}	-0.004584 МПа см ^{-13/2}	3.00%

Таблица 3.3 – Значения амплитудных множителей ряда Уильямса для антисимметричной части решения их сравнение с аналитическим решением (пластина с наклонной трещиной)

образце с трещиной, играют ключевую роль, если требуется знание точных полей напряжений/смещений не только очень близко к вершине трещины. Достаточное количество членов более высокого порядка, необходимых для точного описания поля напряжений и перемещений внутри тела с трещиной, зависит от размера рассматриваемой области; представленные исследования показывают, что, очевидно, следует принимать во внимание 15 слагаемых, а не одно, либо два слагаемых, которые обычно используются в качестве хорошо известной одно- или двухпараметрической механики разрушения. Например, в случае квазихрупких материалов, где распределение напряжений должно быть известно дальше от вершины трещины, использование членов разложения Уильямса более высокого порядка может способствовать более точному и надежному анализу разрушения и прогнозированию поведения конструкции.

Представленное исследование показывает, что, особенно на больших расстояниях от вершины трещины, члены высшего порядка имеют решающее значение для минимизации ошибки, соответствующей использованию только одного или двух параметров разрушения (первого и второго членов разложения Уильямса). Другими словами, учет членов более высокого порядка разложения Уильямса имеет важное значение, если требуется знание точных полей напряжений/смещений вокруг вершины трещины в анализируемом образце/структуре.

Можно резюмировать: на примере чистого растяжения и смешанного нагружения пластины с разрезом выкристаллизовывается и оттачивается концепция, являющаяся каркасом для экспериментального и вычислительного определения масштабных множителей ряда Уильямса: для точного нахождения параметров ряда Уильямса (коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжения и слагаемых более высокого порядка) следует оценить характерный линейный размер области, содержащей вершину тре-

щины, из которой будут извлекаться точки натурального или вычислительного эксперимента, и, опираясь на данный характерный размер области, следует задаться и руководствоваться определенным числом удерживаемых слагаемых (опираясь на теоретические и численные результаты).

После того, как рассмотрен пример простой конфигурации, для которой имеется точное решение, можно обратиться к геометрии образцов, испытанных в рамках метода цифровой фотоупругости.

3.3. Пластина с центральной трещиной с размерами, аналогичными натурному эксперименту

В настоящем параграфе приведены результаты вычислений, проведенных МКЭ для геометрий образцов с трещинами, полностью идентичных конфигурациям, рассмотренным в фотомеханическом эксперименте. С целью обоснования достоверности выполненной цифровой обработки экспериментальных данных создана конечно-элементная модель пластины с центральной трещиной, аналогичной рассмотренной в натурном эксперименте. Распределение интенсивности напряжений приведено на рисунке 3.62 для нагрузки $\sigma = 4.135$ МПа. Видно, что карта изохроматических полос подобна распределению интенсивности напряжений.

Для пластины, содержащей центральную трещину, с геометрическими параметрами и условиями нагружения, подобными тем, которые были рассмотрены ранее в фотомеханическом эксперименте, вычисления, основанные на переопределенном методе и базирующиеся на конечно-элементном решении, приводят к значениям множителей ряда М. Уильямса, сведенным в таблицу 3.4. Сравнение коэффициентов, найденных посредством двух различных подходов (таблицы 2.1 и 3.4), явствует об их хорошем соответствии друг другу и можно оценить относительную погрешность.

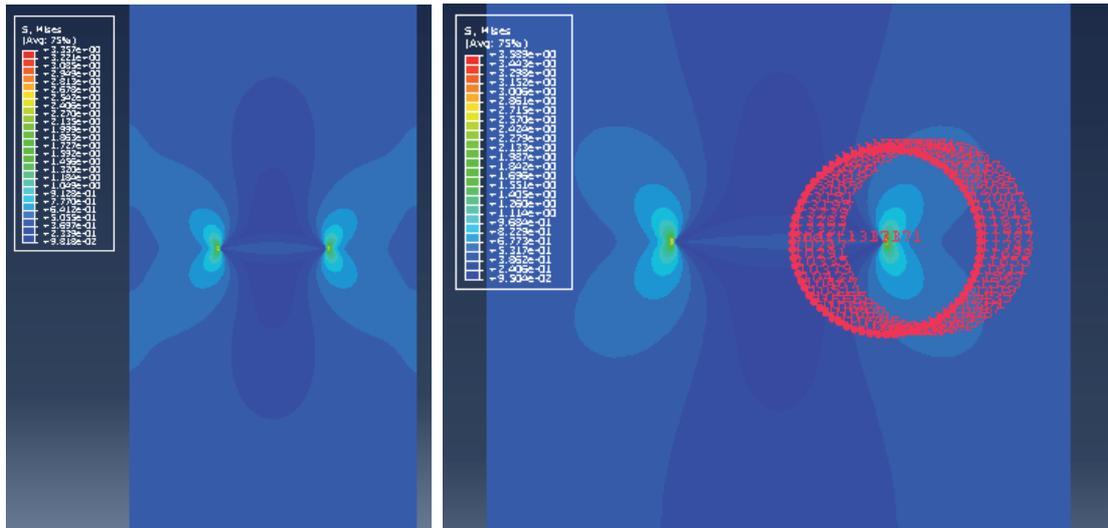


Рисунок 3.62 – Конечно-элементное решение задачи о напряженном состоянии пластины с центральным дефектом с размерами, идентичными конфигурации, рассмотренной в фотоупругом эксперименте

При сравнении результатов получены следующие значения погрешностей: первые два коэффициента совпадают с точностью до 10^{-4} , далее погрешность растет с ростом порядкового номера коэффициента, но не превышает четырех процентов для последнего удержанного слагаемого. Таким образом, переопределенный метод приводит к значениям коэффициентов ряда М. Уильямса, сведенным в таблице 3.4, близким к тем, что получены методом фотомеханики.

Следует заметить, что конечно-элементные расчеты, в которых можно выбрать достаточно мелкую сетку, дают основания полагать, что коэффициенты ряда вычисляются точнее, поскольку в рамках фотоупругости есть ограничения, связанные с разрешением фотографии и увеличить количество пикселей (при имеющихся изображениях изохроматических полос) невозможно. Поэтому конечно-элементное решение принималось за эталонное, и вычислялось относительное отклонение коэффициентов ряда Уильямса, полученное методом фотоупругости, от конечно-элементных

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	2.102454 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.149868 МПа
a_3^1	0.768208 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.088993 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.017598 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.007259 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.001592 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.000965 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.000116 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.4 – Амплитудные коэффициенты, восстановленные из результатов МКЭ эксперимента

оценок. Поэтому из представленных таблиц следует, что первые два коэффициента ряда определяются с точностью до 10^{-4} . Погрешность возрастает с порядковым номером коэффициента: максимальное относительное отклонение составляет 3.55% для последнего удерживаемого слагаемого.

3.4. Пластина, ослабленная двумя трещинами одинаковой длины, с размерами, аналогичными размерам в натурном эксперименте и ряд других конфигураций

Аналогично вышеизложенному с помощью метода конечных элементов и разработанной процедуры переопределенного метода были вычислены амплитудные факторы ряда Уильямса у вершин каждой из трещин в пластине, ослабленной двумя горизонтальными разрезами. Результаты вычислений представлены в таблицах 3.5 и 3.6.

Из сопоставления таблиц 2.2 и 3.5 можно заключить, что коэффициен-

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	3.541733 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.754387 МПа
a_3^1	1.741406 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.443449 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.1999997 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.153898 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.073591 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0734443 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.056431 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.5 – Амплитудные коэффициенты у вершины трещины $z = b$,
восстановленные из результатов МКЭ эксперимента

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	3.590625 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.696512 МПа
a_3^1	1.885446 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.316820 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.319014 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.016616 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.080926 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.067371 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.029502 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.6 – Амплитудные коэффициенты у вершины трещины $z = a$,
восстановленные из результатов МКЭ эксперимента

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	5.403966 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.683840 МПа
a_3^1	1.092866 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.232412 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.117290 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.033705 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.023368 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.024201 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.026612 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.7 – Амплитудные коэффициенты ряда Уильямса у вершины трещины $z = d$, восстановленные из результатов вычислительного эксперимента (пластина с двумя трещинами различной длины)

ты аппроксимации Уильямса, которые определяются посредством процедуры переопределенного метода, основанной на экспериментальных данных и данных вычислительного эксперимента, находятся в хорошем соответствии друг с другом, относительная погрешность не превышает трех процентов.

Для пластины с трещинами различной длины МКЭ приводит к следующим оценкам, приведенным в таблицах 3.7 и 3.8.

Для пластины с одним центральным наклонным разрезом переопределенный метод позволяет найти коэффициенты ряда Уильямса, показанные в таблице 3.9. Коэффициенты аппроксимации М. Уильямса сведены в таблицу 3.9, в которой приведены множители, отвечающие нормальному отрыву и поперечному сдвигу.

Рассчитанные на основании метода конечных элементов коэффициенты ряда Уильямса для пластины с одним краевым разрезом продемонстриро-

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	3.998395 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-1.740420 МПа
a_3^1	2.461395 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.223018 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.191132 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.087884 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.041391 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.023554 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.019116 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.8 – Амплитудные коэффициенты ряда Уильямса у вершины трещины $z = b$, восстановленные из результатов вычислительного эксперимента (пластина с двумя трещинами различной длины)

Коэффициент	Значение, (МКЭ)	Коэффициент	Значение, (МКЭ)
a_1^1	2.658133 МПа см ^{1/2}	a_1^2	-2.387434 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-0.114582 МПа	a_2^2	0 МПа
a_3^1	0.499026 МПа см ^{-1/2}	a_3^2	-0.610883 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	-0.119638 МПа см ^{-3/2}	a_5^2	0.083304 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	0.017093 МПа см ^{-5/2}	a_7^2	-0.025570 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	-0.009881 МПа см ^{-7/2}	a_9^2	0.003854 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	0.006442 МПа см ^{-9/2}	a_{11}^2	-0.003554 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	-0.0013769 МПа см ^{-11/2}	a_{13}^2	0.001214 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	0.000258 МПа см ^{-13/2}	a_{15}^2	-0.000213 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.9 – Амплитудные коэффициенты ряда Уильямса у вершины наклонной трещины, восстановленные из результатов вычислительного эксперимента

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	4.652226 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-0.614350 МПа
a_3^1	0.312235 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	0.015044 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	-0.046175 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	0.025411 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	-0.011534 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	0.04915 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	-0.002019 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.10 – Амплитудные коэффициенты у вершины бокового надреза, восстановленные из результатов вычислительного эксперимента

ваны в таблице 3.10.

Рассчитанные коэффициенты ряда Уильямса для пластины с двумя боковыми надрезами одинаковой длины продемонстрированы в таблице 3.11.

Коэффициент ряда	Значение, (МКЭ)
a_1^1	4.483625 МПа см ^{1/2}
a_2^1	-0.822098 МПа
a_3^1	0.847999 МПа см ^{-1/2}
a_5^1	0.119503 МПа см ^{-3/2}
a_7^1	-0.143619 МПа см ^{-5/2}
a_9^1	0.105333 МПа см ^{-7/2}
a_{11}^1	-0.065509 МПа см ^{-9/2}
a_{13}^1	0.046953 МПа см ^{-11/2}
a_{15}^1	-0.036159 МПа см ^{-13/2}

Таблица 3.11 – Амплитудные коэффициенты у вершины надреза, восстановленные из результатов вычислительного эксперимента

3.5. Выводы по Главе 3

В главе приведены результаты широкого конечно-элементного эксперимента, нацеленного на разработку, апробирование и использование переопределенного метода, опирающегося на конечно-элементные решения для компонент тензора напряжений, с целью вычисления коэффициентов аппроксимации Уильямса полей напряжений у вершины надреза, трещины или выреза.

Установлено, что переопределенный метод, основанный на поле напряжения, которое найдено посредством МКЭ-анализа, позволяет с высокой точностью отыскать коэффициенты ряда Уильямса с учетом высших приближений. Проведен анализ количества удерживаемых слагаемых ряда Уильямса, необходимых для целостного описания полей, ассоциированных с трещиной. Показано, что число слагаемых, подлежащих сохранению в ряде, обуславливается размером области, охватывающей трещину.

Чем больше область, выбранная для анализа, тем больше слагаемых ряда Уильямса требуется для реконструкции поля напряжений, совпадающего с численным решением краевой задачи.

Глава 4. Аппроксимация результатов серии конечно-элементных вычислений для моделей с трещинами

Долгое время задачи определения напряженно-деформированного состояния вблизи трещин и разрезов сводились к определению коэффициента интенсивности напряжений и T -напряжений [61, 82, 82, 83, 135, 174]. Для типовых конфигураций с трещинами и разрезами хорошо известны [133, 174] аппроксимационные функции, позволяющие определить численные значения коэффициента интенсивности напряжений в зависимости от совокупности параметров геометрии образца и приложенных нагрузок. Более того, современные вычислительные системы, реализующие метод конечных элементов, такие как комплекс SIMULIA Abaqus, позволяют без лишних усилий определять КИН и T -напряжения вблизи трещины или разреза. Аналитическое решение Уильямса, являющееся классическим и до сих пор актуальным, позволяет построить угловые функции напряжений в окрестности вершины трещины, а первые два слагаемых, включающие коэффициент интенсивности напряжений $K_I = \sqrt{2\pi}a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0)$, $K_{II} = -\sqrt{2\pi}a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0)$ и T -напряжения, равные $a_2^1 f_{1,11}^{(2)}(0)$, несколько десятилетий считались ключевыми. Однако, исследования [73, 76, 84, 106, 118, 125–127, 130, 157–161, 164, 165], как численные, так и аналитические, включая настоящую работу, доказали необходимость учета высших приближений в ряде Уильямса для более аккуратного описания полей напряжений.

Поэтому настоящая глава посвящена получению аппроксимационных формул, позволяющих определить масштабные (амплитудные) коэффициенты ряда Уильямса, в том числе и коэффициенты высших приближений, для серии образцов с вырезами и трещинами. Для определения тарировочных функций масштабных множителей была проведена серия конечно-

элементных вычислений и обработка результатов проходила по следующему алгоритму:

1. моделирование серии одноосных испытаний пластины с трещинами или разрезами разных длин;
2. выбор точек для последующей обработки информации – построение путей в окрестности вершин трещин и разрезов для каждого нагрузочного испытания;
3. использование массива данных для вычисления масштабных множителей с помощью переопределенного метода и построение тарировочных функций из совокупности безразмерных масштабных коэффициентов, например, в случае пластин с одной центральной трещиной, с одним боковым надрезом или с двумя боковыми надрезами

$$\hat{a}_k^1 = \frac{a_k^1 (a/w)^{k/2-1}}{\sigma} = F_k^1 \left(\frac{a}{w} \right),$$
$$\hat{a}_k^2 = \frac{a_k^2 (a/w)^{k/2-1}}{\sigma} = F_k^2 \left(\frac{a}{w} \right),$$

где a – длина трещины или разреза, w – ширина пластины, σ – приложенная нагрузка.

4.1. Аппроксимационные формулы для масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с центральной трещиной

В пакете SIMULIA Abaqus смоделирована серия нагрузочных испытаний пластины с центральной трещиной. В ходе каждого вычисления неизменными оставались следующие параметры: $h = 50\text{мм}$, $w = 25\text{мм}$, $\sigma = 12.258\text{МПа}$ (рисунок 4.1). Величина $k = a/w$ менялась в диапазоне 0.1..0.5 с шагом 0.05 в каждом испытании.

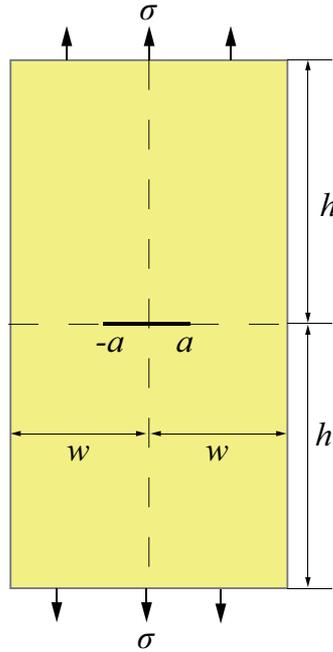


Рисунок 4.1 – Геометрия модели образца с центральной трещиной

На основе результатов серии конечно-элементных вычислений получены следующие тарировочные функции масштабных множителей:

$$F_1^1(a/w) = 0.688674 + 0.241646(a/w) + 0.573033(a/w)^2 - 1.618550(a/w)^3 - 0.433294(a/w)^4,$$

$$F_2^1(a/w) = -0.231570 - 0.383461(a/w) + 2.230730(a/w)^2 - 5.678210(a/w)^3 + 4.237223(a/w)^4,$$

$$F_3^1(a/w) = 0.178098 + 0.055430(a/w) - 0.572106(a/w)^2 + 1.909807(a/w)^3 - 1.541715(a/w)^4,$$

$$F_5^1(a/w) = 0.022332 - 0.849517(a/w) + 4.885081(a/w)^2 - 11.207006(a/w)^3 + 8.826599(a/w)^4,$$

$$F_7^1(a/w) = -0.107531 + 2.041505(a/w) - 12.026450(a/w)^2 + 28.907078(a/w)^3 - 25.086123(a/w)^4,$$

$$F_9^1(a/w) = -0.146016 + 2.636871(a/w) - 14.335207(a/w)^2 + 29.804504(a/w)^3 - 19.607271(a/w)^4,$$

$$F_{11}^1(a/w) = 1.239163 - 22.811969(a/w) + 134.287846(a/w)^2 - 319.216576(a/w)^3 + 268.709(a/w)^4,$$

$$F_{13}^1(a/w) = -0.636841 + 14.379577(a/w) - 117.023321(a/w)^2 + 382.825505(a/w)^3 - 435.776005(a/w)^4,$$

$$F_{15}^1(a/w) = -2.375227 + 41.979169(a/w) - 212.011335(a/w)^2 + 384.268130(a/w)^3 - 191.335851(a/w)^4.$$

4.2. Аппроксимационные формулы для масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с одним боковым надрезом

Согласно предложенному ранее алгоритму, построены конечно-элементные модели пластины с одним боковым надрезом (рисунок 4.2). Размеры пластины и нагрузка идентичны рассмотренной ранее конфигурации: $h = 50\text{мм}$, $w = 25\text{мм}$, $\sigma = 12.258\text{МПа}$.

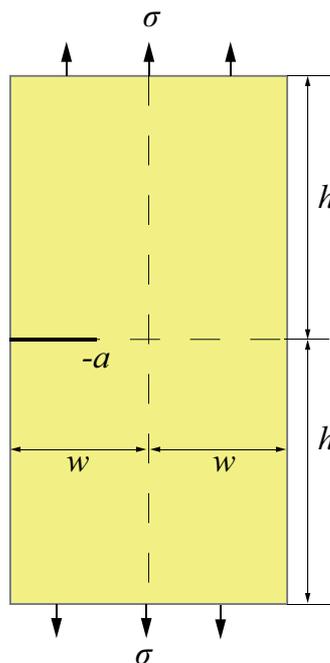


Рисунок 4.2 – Геометрия модели образца с боковым надрезом

Совокупность результатов численного анализа позволяет определить тарировочные функции для конфигурации с одним боковым надрезом:

$$F_1^1(a/w) = 0.766313 + 0.390726(a/w) + 3.106122(a/w)^2 - 2.208076(a/w)^3 + 8.252977(a/w)^4,$$

$$F_2^1(a/w) = -0.165005 + 0.510454(a/w) - 3.358356(a/w)^2 + 7.333343(a/w)^3 - 4.327666(a/w)^4,$$

$$F_3^1(a/w) = 0.143960 - 0.285703(a/w) + 0.338197(a/w)^2 + 2.923441(a/w)^3 - 16.647526(a/w)^4,$$

$$F_5^1(a/w) = 0.036689 - 0.340082(a/w) + 1.397915(a/w)^2 - 1.222588(a/w)^3 - 4.440991(a/w)^4,$$

$$F_7^1(a/w) = 0.758385 - 15.173791(a/w) + 98.989989(a/w)^2 - 260.783704(a/w)^3 + 234.383371(a/w)^4,$$

$$F_9^1(a/w) = -4.733209 + 91.892951(a/w) - 594.589052(a/w)^2 + 1549.011899(a/w)^3 - 1381.482975(a/w)^4,$$

$$F_{11}^1(a/w) = -22.622843 + 439.489627(a/w) - 2845.671790(a/w)^2 + 7394.899189(a/w)^3 - 6558.939337(a/w)^4,$$

$$F_{13}^1(a/w) = 280.928168 - 5444.937229(a/w) + 35133.367614(a/w)^2 - 90790.777241(a/w)^3 + 80008.020829(a/w)^4,$$

$$F_{15}^1(a/w) = -416.467296 + 8055.342665(a/w) - 51809.031157(a/w)^2 - 133268.206129(a/w)^3 - 116852.014556(a/w)^4.$$

4.3. Аппроксимационные для формулы масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с двумя боковыми надрезами

Для следующей конфигурации – пластины с двумя боковыми надрезами (рисунок 4.3) аналогично получены конечно-элементные решения с целью

аппроксимации численных результатов. Размеры пластины и нагрузка равны: $h = 50\text{мм}$, $w = 25\text{мм}$, $\sigma = 12.258\text{МПа}$. Проведен цикл из девяти конечно-элементных вычислений с $a/w = 0.1$ до $a/w = 0.5$, параметр a/w увеличивался с каждым шагом на 0.05.

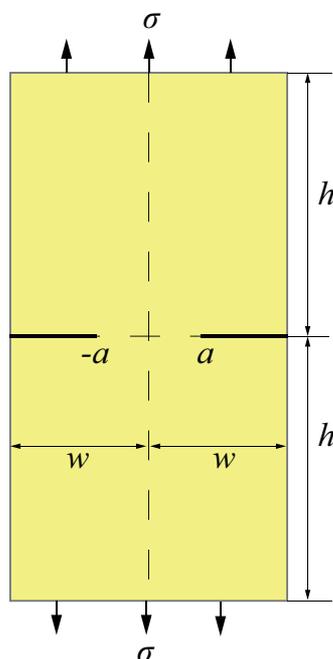


Рисунок 4.3 – Геометрия модели образца с двумя боковыми надрезами

Тарировочные функции, позволяющие определить коэффициенты разложения Уильямса для нормального нагружения пластины с двумя боковыми надрезами, имеют вид:

$$F_1^1(a/w) = 0.892269 - 1.6681116(a/w) + 8.678849(a/w)^2 - 18.311286(a/w)^3 + 14.230210(a/w)^4,$$

$$F_2^1(a/w) = -0.127420 - 0.109642(a/w) + 0.683828(a/w)^2 - 1.730786(a/w)^3 + 1.482993(a/w)^4,$$

$$F_3^1(a/w) = 0.065539 + 0.765212(a/w) - 4.004880(a/w)^2 + 8.854104(a/w)^3 - 6.488668(a/w)^4,$$

$$F_5^1(a/w) = 0.013647 - 0.079392(a/w) + 0.734837(a/w)^2 - 2.056(a/w)^3 + 1.851466(a/w)^4,$$

$$F_7^1(a/w) = -0.02634 + 0.207149(a/w) - 1.298795(a/w)^2 + 3.225953(a/w)^3 - 3.077239(a/w)^4,$$

$$F_9^1(a/w) = -0.10671 + 1.977164(a/w) - 10.930045(a/w)^2 + 23.810539(a/w)^3 - 17.08838(a/w)^4,$$

$$F_{11}^1(a/w) = 0.023722 + -0.432834(a/w) + 2.632768(a/w)^2 - 7.938769(a/w)^3 + 11.316333(a/w)^4,$$

$$F_{13}^1(a/w) = 0.603894 - 10.891815(a/w) + 61.748533(a/w)^2 - 128.299436(a/w)^3 + 73.392985(a/w)^4,$$

$$F_{15}^1(a/w) = 0.204031 - 5.083339(a/w) + 40.87978(a/w)^2 - 132.417545(a/w)^3 + 147.127447(a/w)^4.$$

4.4. Аппроксимационные для формулы для масштабных множителей ряда Уильямса для пластины с центральной наклонной трещиной

С целью получения тарировочных функций масштабных коэффициентов для нормального отрыва и поперечного сдвига пластины с центральной наклонной трещиной (рисунок 4.4), проведена серия конечно-элементных расчетов для одноосного растяжения пластины с наклонной трещиной. Ширина, длина и приложенная нагрузка к пластине не менялись: $h = 50\text{мм}$, $w = 25\text{мм}$, $\sigma = 12.258\text{МПа}$. Угол наклона трещины $\gamma = 135^\circ$.

Коэффициенты для пластины с центральной наклонной трещиной, соответствующие симметричной части решения, имеют вид:

$$F_1^1(a/w) = 0.205318 + 2.599871(a/w) - 15.169561(a/w)^2 + 37.91872(a/w)^3 - 32.577971(a/w)^4,$$

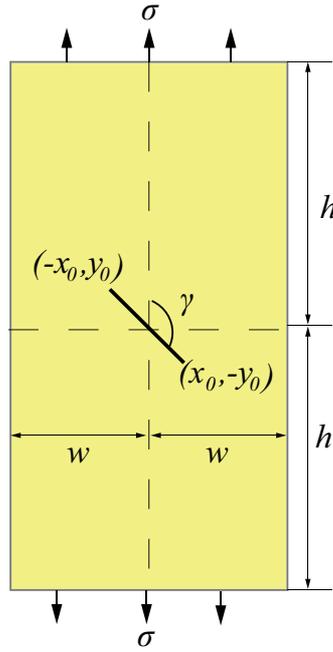


Рисунок 4.4 – Геометрия образца с двумя боковыми надрезами

$$F_2^1(a/w) = -0.075252 + 1.512006(a/w) - 10.122906(a/w)^2 + 26.586657(a/w)^3 - 24.202543(a/w)^4,$$

$$F_3^1(a/w) = 0.255088 - 3.096609(a/w) + 19.663794(a/w)^2 - 50.651844(a/w)^3 + 45.306469(a/w)^4,$$

$$F_5^1(a/w) = 0.379385 - 7.678582(a/w) + 50.155906(a/w)^2 - 132.467025(a/w)^3 + 121.473471(a/w)^4,$$

$$F_7^1(a/w) = -0.360817 + 6.902312(a/w) - 47.414341(a/w)^2 + 136.371369(a/w)^3 - 137.185244(a/w)^4,$$

$$F_9^1(a/w) = 0.194566 - 3.923379(a/w) + 29.800826(a/w)^2 - 96.441334(a/w)^3 + 108.068524(a/w)^4,$$

$$F_{11}^1(a/w) = 2.726479 - 54.969794(a/w) + 387.461776(a/w)^2 - 1119.723422(a/w)^3 + 1120.268499(a/w)^4,$$

$$F_{13}^1(a/w) = -19.769189 + 391.902351(a/w) - 2634.204645(a/w)^2 + 7192.866997(a/w)^3 - 6844.753132(a/w)^4,$$

$$F_{15}^1(a/w) = -10.528667 + 210.522021(a/w) - 1462.791818(a/w)^2 + 4183.942597(a/w)^3 - 4167.168115(a/w)^4.$$

Коэффициенты для пластины с центральной наклонной трещиной, соответствующие антисимметричной части решения, имеют вид:

$$F_1^2(a/w) = 36.31765 + 344.692626(a/w) - 26.62206(a/w)^2 - 897.893838(a/w)^3 + 1278.757042(a/w)^4,$$

$$F_3^2(a/w) = 0.603013 - 9.582237(a/w) + 53.599648(a/w)^2 - 126.113309(a/w)^3 + 105.215447(a/w)^4,$$

$$F_5^2(a/w) = 0.304639 - 3.849244(a/w) + 17.844625(a/w)^2 - 35.45819(a/w)^3 + 25.612455(a/w)^4,$$

$$F_7^2(a/w) = -0.152338 + 2.274267(a/w) - 11.76043(a/w)^2 + 25.439(a/w)^3 - 19.433572(a/w)^4,$$

$$F_9^2(a/w) = 0.018663 - 0.310006(a/w) + 1.706404(a/w)^2 - 3.823244(a/w)^3 + 3.00744(a/w)^4,$$

$$F_{11}^2(a/w) = -0.005219 + 0.03447(a/w) - 0.039816(a/w)^2 - 0.11006(a/w)^3 + 0.188287(a/w)^4,$$

$$F_{13}^2(a/w) = 0.004187 - 0.043562(a/w) + 0.163094(a/w)^2 - 0.261367(a/w)^3 + 0.151613(a/w)^4,$$

$$F_{15}^2(a/w) = 0.000773 - 0.008461(a/w) + 0.03347(a/w)^2 - 0.057069(a/w)^3 + 0.035569(a/w)^4.$$

4.5. Современные тенденции механики разрушения в машиностроении

Результаты изложенных выше исследований и, в целом, результаты, полученные в механике разрушения в последнее время, востребованы различными предприятиями и компаниями машиностроения, нефтяной и газовой

промышленности. Так, например, в настоящее время цилиндрические трубы используются в различных областях применения, таких как нефтяная, газовая, авиационная отрасли и энергетика. В некоторых ситуациях в этих трубах могут возникать трещины, приводящие к серьезным нарушениям работоспособности конструкции. Типичные примеры разрушения нефте- и газопроводов показаны на фотографиях (рисунки 4.5 – 4.7), взятых из открытых источников.



Рисунок 4.5 – Осевая (продольная) и криволинейная трещины в эксплуатационной трубе



Рисунок 4.6 – Типичные разрушения линейных трубопроводов вследствие распространения трещины

Большинство проводимых в настоящее время инженерных исследований, анализирующих разрушения труб, опираются на действующие нор-



Рисунок 4.7 – Типичные разрушения линейных трубопроводов вследствие распространения трещины: окружная трещина

мативы [11]. В настоящее время в РФ для расчета трубопроводов нефтяной и газовой промышленности (насосно-компрессорных, обсадных и бурильных труб) действуют формулы национальных стандартов. В ГОСТ Р 54918-2012 выделяют два типа хрупкого разрушения 1) вследствие распространения трещин и 2) разрушение, обусловленное зарождением, подрастанием и стабильным распространением трещины в том месте поверхности трубы, где она предварительно не выявлялась. Расчет характеристик эксплуатационных свойств линейных участков трубопроводов в случае, когда возникают несовершенства в трубах, основывается на коэффициенте интенсивности напряжений (КИН). Согласно ГОСТ [11], когда КИН в вершине трещины достигает критического значения, трещина начинает расти и разрушение трубы становится неотвратимым. Таким образом, показателем эксплуатационных свойств является в этом случае КИН. После определения этого показателя в лабораторных условиях показатель используется для оценки целостности и возможности эксплуатации трубопровода с несовершенствами. Для оценки прочности и целостности трубы во всем вре-

менном интервале хрупкого и вязкого разрушений составляют диаграмму вероятности разрушения (FAD – failure assessment diagram). Вероятностная диаграмма FAD – кривая зависимости КИН от приложенной нагрузки. Для получения данных о КИН для линейных трубопроводов широко применяются образцы в форме двухконсольной балки (рисунки 4.8 и 4.9). Такой образец является стандартным образцом для испытаний на трещиностойкость и носит название прямоугольного компактного (двухконсольного) образца с краевой трещиной на внецентренное растяжение. Детальная геометрия образца показана на рисунке 4.10. Для вычисления характеристик эксплуатационных свойств трубопроводов для проверки и годности их применения по назначению выполняют исследования в конкретной окружающей среде, представляющей интерес. Поскольку обсадные, нефтяные насосно-компрессорные и бурильные трубы эксплуатируются в условиях периодически действующей нагрузки, то образец в форме двухконсольной балки используется для оценки скорости усталостного подрастания трещины при действии циклической нагрузки.

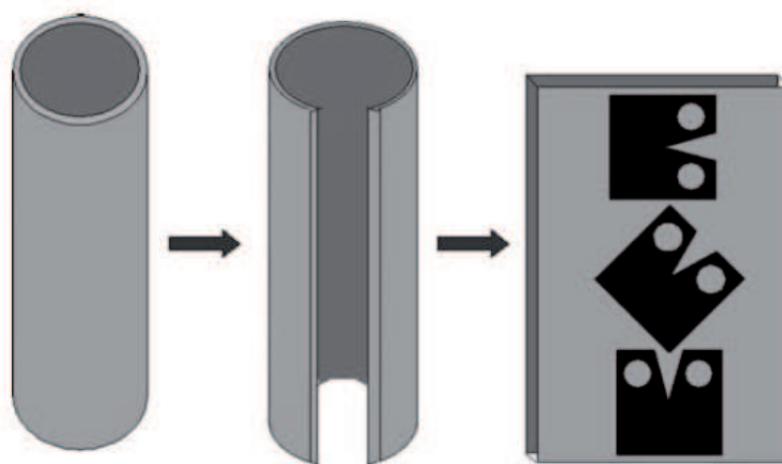


Рисунок 4.8 – Способы выреза компактного образца из трубы

Усталостное разрушение часто происходит в результате возникновения

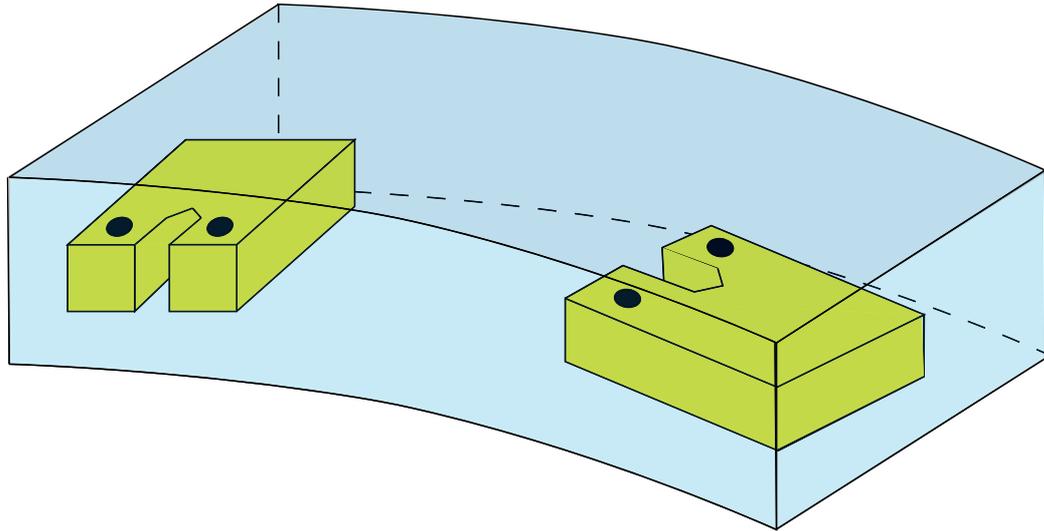


Рисунок 4.9 – Способы выреза компактного образца из трубы (с ориентацией в осевом и окружном направлениях)

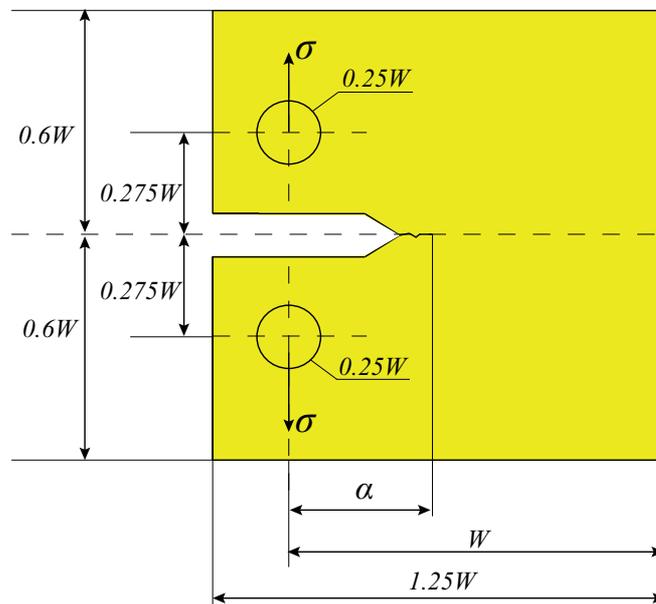


Рисунок 4.10 – Схематичное изображение компактного образца

и распространения трещин. Существуют различные подходы к прогнозированию скорости роста усталостной трещины и усталостной долговечности компонентов, содержащих трещину. Одним из наиболее известных методов является закон Париса-Эрдогана в области высокой циклической усталости, в котором корреляция между скоростью роста усталостной тре-

щины da/dN и циклическим коэффициентом интенсивности напряжений при нагружении в режиме идеального растяжения задается соотношением $da/dN = C(\Delta K)^m$ [29, 131, 132], а параметры усталости C и m рассматриваются как материальные константы и не зависят от геометрии образца. В последнее время, невзирая на повсеместное практическое использование модели Париса-Эрдогана, отмечаются существенные отклонения наблюдаемого роста трещины от модельной кривой, предсказанной законом Париса-Эрдогана. Исследователи [67, 154] объясняют неадекватность закона Париса-Эрдогана для оценки поведения фатального роста трещин в компонентах, особенно в сложных условиях нагружения, двумя причинами. Во-первых, усталостное нагружение правильно определено, когда выражение роста усталостной трещины da/dN содержит как амплитуду напряжения $\Delta\sigma$, так и средний уровень напряжения σ в качестве двух параметров нагружения, в то время как закон Париса включает только $\Delta\sigma$. Во-вторых, уравнение ограничено чистым режимом отрыва, при котором предполагается, что трещина всегда распространяется вдоль своего первоначального направления. Однако при циклическом нагружении в сложном и смешанном режимах нагружения трещины не распространяются перпендикулярно приложенной нагрузке и значительно отклоняются от своих начальных направлений. Это побудило исследователей [154] предложить некоторые улучшенные теории роста усталостных трещин, чтобы преодолеть недостатки модели Париса-Эрдогана. Одна из этих моделей, предложенная в [154], основана на размахе функции плотности энергии деформации вблизи вершины трещины:

$$\frac{da}{dN} = A (\Delta S)^n. \quad (4.1)$$

В [154] использовались только сингулярные члены напряжений вокруг острия трещины для расчета плотности энергии деформации. Однако, рас-

смаатривая члены более высокого порядка разложения в ряд Уильямса, в частности T -напряжение и несколько слагаемых более высокого порядка малости, можно получить более точную формулировку закона на основе плотности энергии деформации вокруг вершины трещины.

Поэтому в настоящей работе на основании ранее проведенного анализа весомости и роли регулярных слагаемых ряда М. Уильямса предложена и развита методика прогнозирования трещиностойкости, основанная на применении концепции плотности энергии упругой деформации, для расчета которой используется полное представление Уильямса поля напряжений.

4.5.1. Методика оценки скорости усталостного распространения трещины (оценка ресурса трубопроводов нефтегазовой отрасли)

В настоящем параграфе изложена методика оценки скорости роста трещины, основанная на цифровой модели циклического нагружения компактного образца.

Разработанная методика включает в себя следующие этапы.

1. Проведение широкого компьютерного имитационного моделирования для компактного образца (2D и 3D моделирование) с целью вычисления КИН, T -напряжений и коэффициентов высших приближений (коэффициентов регулярных (неособых) слагаемых ряда Уильямса).

2. Получение аппроксимирующих выражений для коэффициентов неособых слагаемых ряда Уильямса для компактного образца.

3. Компьютерное имитационное моделирование нагружения компактного образца с помощью расширенного метода конечных элементов для условий циклического нагружения с помощью Direct cycling. Построение диаграммы зависимости скорости роста трещины от функции плотности энергии упругой деформации (с учетом слагаемых более высокого поряд-

ка). Построение диаграммы зависимости скорости роста трещины от размаха функции плотности энергии упругой деформации. Сравнение двух подходов (основанных на КИН и функции плотности энергии упругой деформации).

4. Регрессионный анализ для получения материальных параметров формулы (4.1) для оценки скорости роста усталостной трещины, основанной на функции плотности энергии упругой деформации.

Предлагаемая методика основывается на функции плотности энергии упругой деформации S :

$$S = r \frac{dW}{dV} = r \left[\frac{1}{2E} (\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{2G} (\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{rz}^2 + \sigma_{z\theta}^2) \right], \quad (4.2)$$

в случае плоской задачи последнее выражение упрощается

$$S = r \frac{dW}{dV} = \frac{r}{2G} \left[\frac{\nu + 1}{8} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}^2 \right], \quad (4.3)$$

где dW – накопленная энергия элемента объема dV , расположенного в зоне перед вершиной трещины. Функция плотности энергии упругой деформации определяется как $S/r = dW/dV$, где r – расстояние от кончика трещины.

Компоненты тензора напряжений в (4.3) определяются выражениями

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^{m=2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m r^{k/2-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta). \quad (4.4)$$

Для среднего участка зависимости скорости усталостного роста трещины предлагается следующая альтернатива закону Париса-Эрдогана

$$\frac{da}{dN} = A (\Delta S_{min})^n, \quad (4.5)$$

где A, n – материальные константы, определяемые экспериментально, N – число циклов, ΔS – циклический размах функции плотности энергии

упругой деформации, определяемый соотношением

$$\Delta S_{min} = S_{min}^{max} - S_{min}^{min}, \quad (4.6)$$

где под S_{min}^{max} и S_{min}^{min} понимаются максимальное и минимальное значения функции плотности энергии упругой деформации в течение одного цикла нагружения, вычисляемые для максимальной и минимальной нагрузок цикла соответственно:

$$S_{min}^{max} = S(\theta_0 = 0, \sigma_{max}), \quad S_{min}^{min} = S(\theta_0 = 0, \sigma_{min}), \quad (4.7)$$

θ_0 – направление роста дефекта (в данном случае имитационное моделирование проводилось для нормального нагружения $\theta_0 = 0$).

4.5.2. Цифровая модель распространения трещины в компактном образце

Для моделирования роста трещины в компактном образце с помощью расширенного метода конечных элементов была создана модель в расчетном комплексе SIMULIA Abaqus. Рассматривался трехмерный компактный образец с размерами: $W = 50$ мм, высота модели – $1.2W = 60$ мм, толщина – 5 мм. Упругие константы соответствуют стали 15Х5М: модуль Юнга равен $2.1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона – 0.29. Геометрические размеры показаны на рисунке 4.11.

Построенная КЭ-модель (содержащая 15076 элементов) показана на рисунке 4.12.

Сетка, построенная в рамках 2D моделирования, имеет вид, показанный на рисунке 4.13.

Полученные распределения напряжений в компактном образце показаны на рисунках 4.14 – 4.17. В ходе вычислений аппроксимирующих функций для каждого значения отношения длины трещины к ширине образца

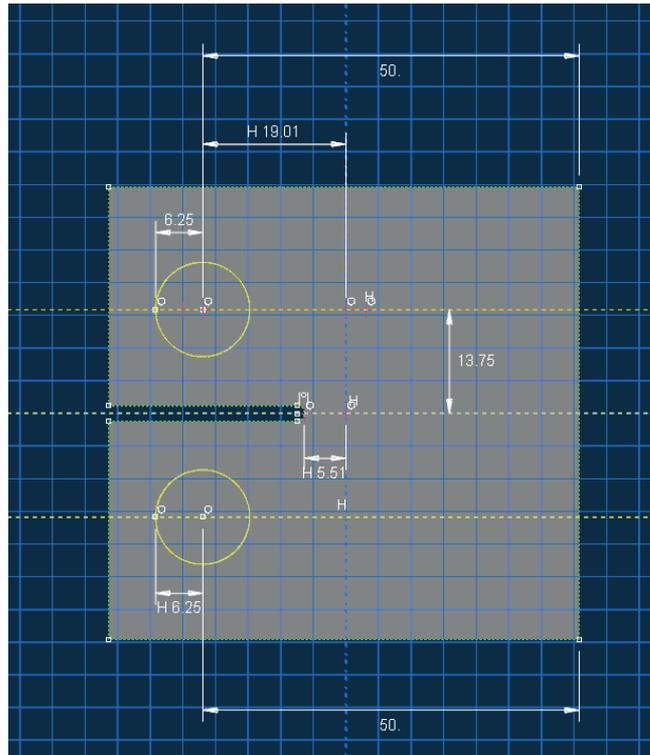


Рисунок 4.11 – Геометрия трехмерной конечно-элементной модели компактного образца

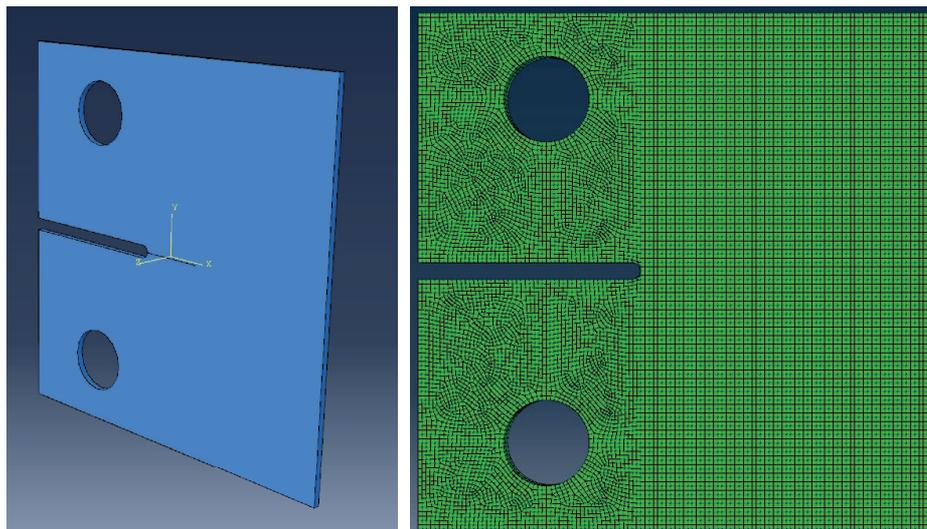


Рисунок 4.12 – Геометрия трехмерной конечно-элементной модели компактного образца и использованная в рамках расширенного метода конечных элементов сетка

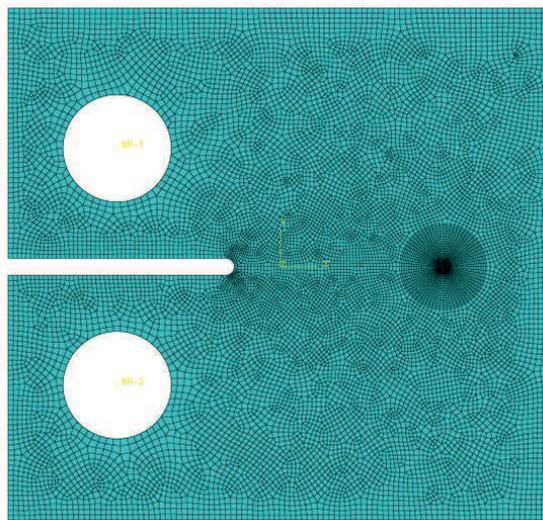


Рисунок 4.13 – Геометрия двумерной конечно-элементной модели компактного образца

проверялись значения КИН и T -напряжений, полученные с помощью аппроксимирующих функций и даваемых системой SIMULIA Abaqus.

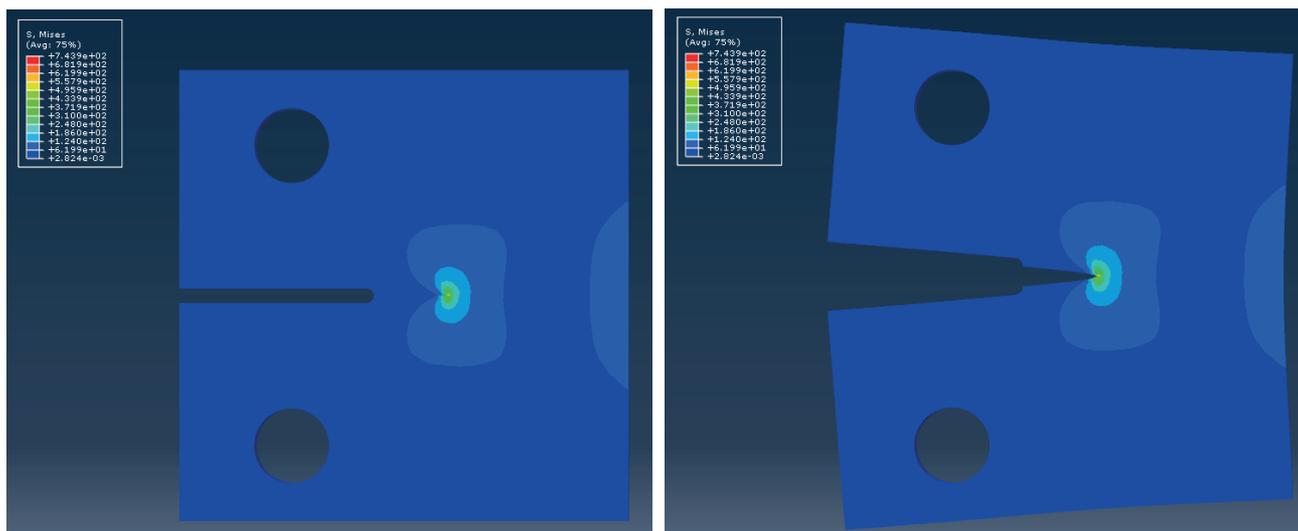


Рисунок 4.14 – Карта интенсивности напряжений в недеформированной и деформированной конфигурациях

Процесс роста трещины представлен на рисунке 4.18.

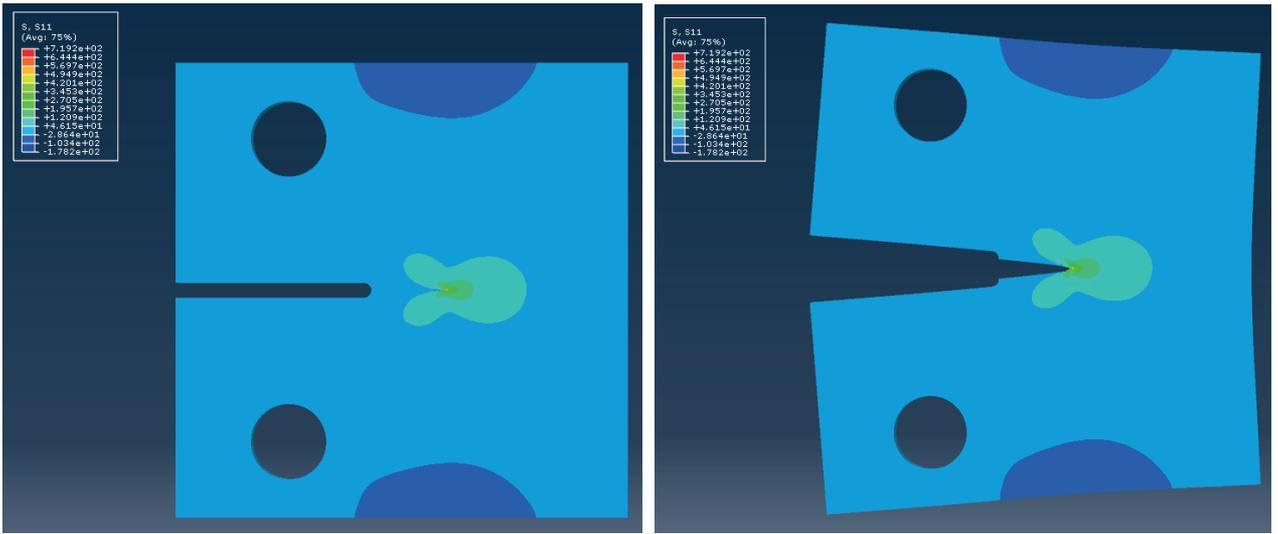


Рисунок 4.15 – Карта компоненты напряжений σ_{11} в недеформированной и деформированной конфигурациях

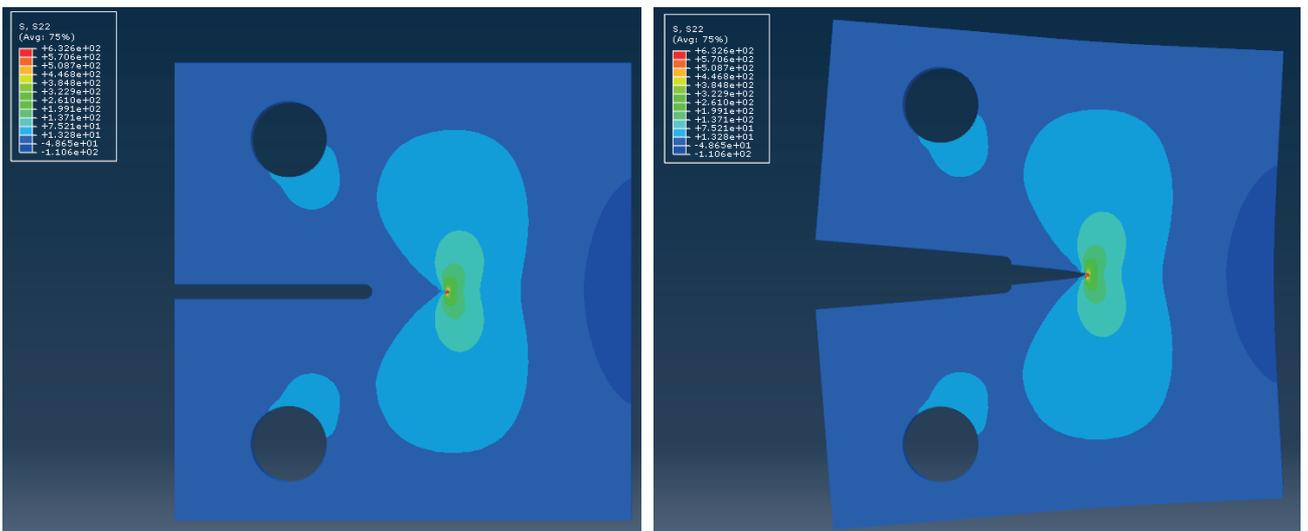


Рисунок 4.16 – Карта компоненты напряжений σ_{22} в недеформированной и деформированной конфигурациях

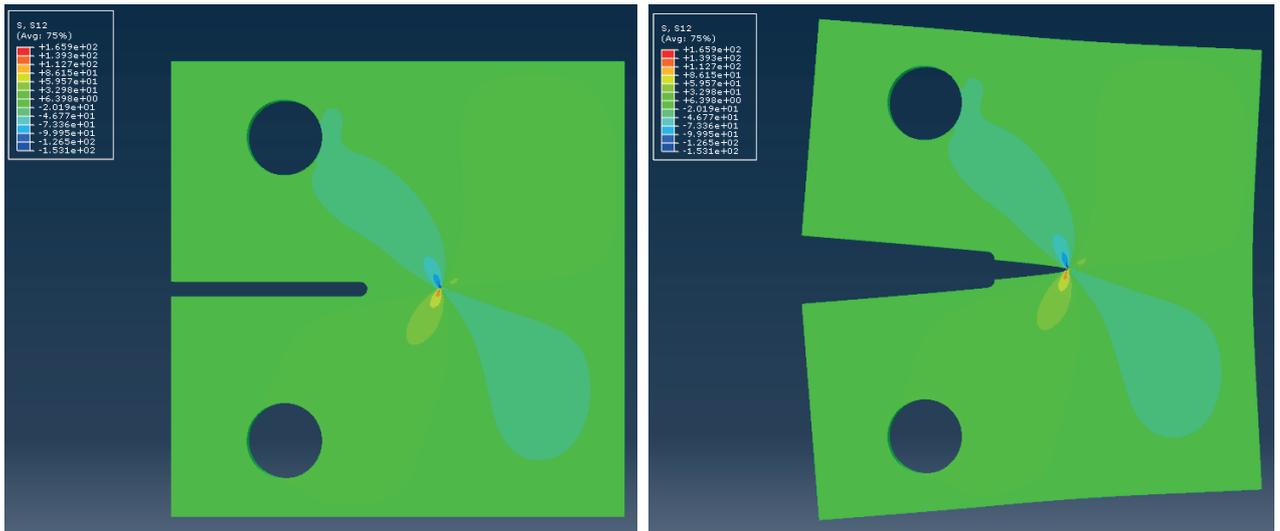


Рисунок 4.17 – Карта компоненты напряжений σ_{12} в недеформированной и деформированной конфигурациях

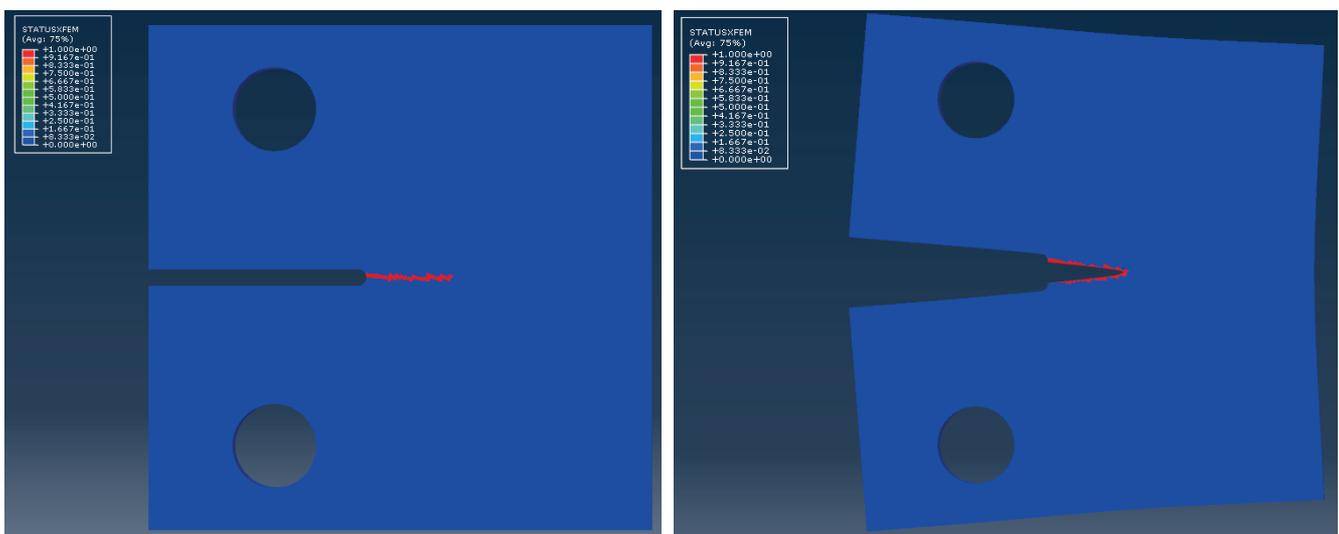


Рисунок 4.18 – Подрастание трещины в недеформированной и деформированной конфигурациях

Тарировочные функции $F_k^2(a/W) = \hat{a}_k^1 = a_k^1(W)^{k/2-1}\sigma$, позволяющие вычислить коэффициенты разложения М. Уильямса, получены с помощью серии конечно-элементных вычислений при вариации значения a/W :

$$F_1^1(a/W) = 33.639691 - 278.97514(a/W) + 902.447444(a/W)^2 - 1261.35593(a/W)^3 + 668.969189(a/W)^4,$$

$$F_2^1(a/W) = 0.13845 - 1.512148(a/W) + 5.842310(a/W)^2 - 9.117574(a/W)^3 + 5.118953(a/W)^4,$$

$$F_3^1(a/W) = -0.0964391 + 0.833703(a/W) - 2.659727(a/W)^2 + 3.681414(a/W)^3 - 1.889928(a/W)^4,$$

$$F_5^1(a/W) = -0.000122 + 0.00097(a/W) - 0.002853(a/W)^2 + 0.003689(a/W)^3 - 0.001776(a/W)^4,$$

$$F_7^1(a/W) = 2.188202 \cdot 10^{-7} - 1.368248 \cdot 10^{-6}(a/W) + 3.046516 \cdot 10^{-6}(a/W)^2 - 2.814545 \cdot 10^{-6}(a/W)^3 + 8.701989 \cdot 10^{-7}(a/W)^4,$$

$$F_9^1(a/W) = 3.273928 \cdot 10^{-9} - 2.222558 \cdot 10^{-8}(a/W) + 5.543174 \cdot 10^{-8}(a/W)^2 - 6.024222 \cdot 10^{-8}(a/W)^3 + 2.411009 \cdot 10^{-7}(a/W)^4,$$

$$F_{11}^1(a/W) = -7.268 \cdot 10^{-11} + 5.003597 \cdot 10^{-10}(a/W) - 1.266975 \cdot 10^{-9}(a/W)^2 + 1.400113 \cdot 10^{-9}(a/W)^3 - 5.703871 \cdot 10^{-10}(a/W)^4,$$

$$F_{13}^1(a/W) = -5.201486 \cdot 10^{-13} + 3.572649 \cdot 10^{-12}(a/W) - 9.026824 \cdot 10^{-12}(a/W)^2 + 9.954111 \cdot 10^{-12}(a/W)^3 - 4.047801 \cdot 10^{-12}(a/W)^4,$$

$$F_{15}^1(a/W) = 9.903612 \cdot 10^{-15} - 6.809686 \cdot 10^{-14}(a/W) + 1.72218 \cdot 10^{-13}(a/W)^2 - 1.900722 \cdot 10^{-13}(a/W)^3 - 7.733957 \cdot 10^{-14}(a/W)^4.$$

Из вычислительного эксперимента извлекались значения прироста длины трещины за каждый цикл нагружения и вычислялись на основании полученных аппроксимирующих формул напряжения и функция плотности энергии упругой деформации. Результаты вычислений объединены на диаграмме 4.19. Найденные в результате расчетов зависимости в полной мере повторяют типичные кривые, получаемые в натурном эксперименте. Следует отметить, что точки, полученные в ходе имитационного моделирования, отражают влияние T -напряжений и слагаемых более высокого порядка.

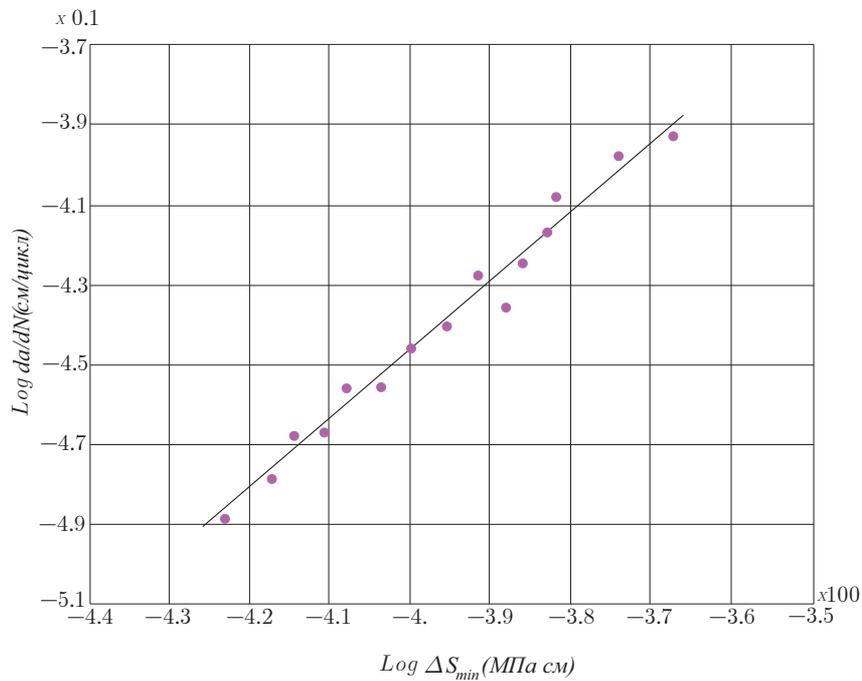


Рисунок 4.19 – Зависимость скорости роста усталостной трещины от размаха функции плотности энергии упругой деформации

Как описано выше, константы усталости материала A и n были рассчитаны с использованием вычислительных экспериментов на усталость на компактном образце. На рисунке 4.19 показаны полученные данные о скорости распространения усталостной трещины da/dN в компактном образце с материальными константами стали 15Х5М в зависимости от диапазона

плотности энергии циклической деформации ΔS_{min} в двойных логарифмических координатах. Значения размаха плотности энергии циклической деформации определялись с использованием уравнения (4.6) для любой желаемой длины усталостной трещины. Рисунок 4.19 показывает, что существует линейная зависимость между скоростью распространения усталостной трещины и диапазоном плотности энергии циклической деформации. Константы усталости материала были определены с помощью линейного регрессионного анализа и равны $n = 1.67$, $A = 152.52(\text{МПа см})^{-n}\text{см}$.

4.6. Выводы по Главе 4

В четвертой главе на основании широкого конечно-элементного моделирования получены аппроксимирующие формулы для масштабных (амплитудных) коэффициентов ряда Макса Уильямса высоких порядков для рассмотренных в настоящей диссертации образцов с дефектами. Аппроксимирующие формулы выведены для пятнадцати коэффициентов ряда Уильямса, что позволяет без обращения к конечно-элементным расчетам вычислять коэффициенты многопараметрического разложения М. Уильямса для пластины с центральным разрезом, для пластины с одним боковым надрезом, для пластины с двумя симметричными краевыми надрезами.

В настоящей главе разработана и реализована методика расчета постоянных обобщенного закона Париса, опирающегося на функцию плотности энергии упругой деформации. Предложенная усовершенствованная методика оценки ресурса трубы позволяет учесть влияние неособых слагаемых в ряде Уильямса на показатели эксплуатационных свойств трубопроводных систем.

Заключение

В рамках диссертационной работы проведен теоретический, экспериментальный и численный анализ поля напряжений вблизи поверхности разрыва в изотропном линейном упругом материале на основе многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений с удержанием слагаемых высокого порядка.

Основные результаты работы:

1) Проведено теоретическое сопоставление асимптотических распределений напряжений у вершин надрезов и трещин, полученных с помощью усеченных на разном количестве слагаемых рядов М. Уильямса, с точными аналитическими решениями, построенными посредством теории функции комплексного переменного, и выполнен анализ вклада высших приближений в описание полей напряжений и перемещений, ассоциированных с вершиной трещины. Выявлены закономерности зависимости количества удерживаемых слагаемых от расстояния до вершины трещины.

2) Выполнен цикл экспериментальных исследований, проведенных с помощью метода цифровой фотоупругости, для новых конфигураций образцов, предназначенных для изучения проблем нормального отрыва и смешанного нагружения (образцы с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, образцы с одним боковым и двумя боковыми горизонтальным надрезами, образцы с двумя боковыми наклонным надрезами) и экспериментально определены коэффициенты ряда Уильямса с учетом неособых слагаемых высшего порядка.

3) Разработано и применено новое цифровое приложение, нацеленное на цифровую обработку всей совокупности экспериментальных данных, получаемых методом фотоупругости (построение скелетона картин изохрома-

тических полос и запись в текстовый файл координат точек с наименьшей освещенностью, принадлежащих изохроматическим полосам различных порядков).

4) Численно определены амплитудные (масштабные) параметры ряда М. Уильямса с удержанием неособых слагаемых высших порядков на основе переопределенного метода, базирующегося на поле напряжений, найденного методом конечных элементов в многофункциональном расчетном комплексе SIMULIA Abaqus, для серии образцов с размерами и системами нагружений, идентичным рассмотренным в натурном эксперименте.

5) Получены аппроксимационные формулы для вычисления параметров механики разрушения – амплитудных (масштабных) коэффициентов разложения М. Уильямса, содержащего слагаемые более высоких порядков, для широкой серии образцов.

6) Предложена усовершенствованная методика оценки усталостного роста трещины на основе размаха функции плотности энергии упругой деформации. Реализована методика расчета постоянных обобщенного закона Париса на основе функции плотности энергии упругой деформации, учитывающей мультипараметрическое разложение М. Уильямса.

Литература

1. Александров А.Я., Ахметзянов Н.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
2. Албаут Г.Н., Харинова Н.В., Романова А.А. Экспериментальное решение нелинейных задач механики трещин // Физическая мезомеханика. – 2004. – №7 (5). – С. 463–366.
3. Албаут Г.Н., Барышников В.Н., Панагаев В.В., Табанюхова М.В., Харинова Н.В. Определение коэффициентов концентрации напряжений в нестандартных задачах поляризационно-оптическими методами // Физическая мезомеханика. – 2003. – Т. 6. №6. – С. 91–95.
4. Албаут Г.Н., Матус Е.П., Табанюхова М.В. Исследование напряженного состояния дисперсно-армированных балок с привлечением метода фотоупругости // Физическая мезомеханика. – 2009. – №4. – С. 46–48.
5. Албаут Г.Н., Канышев Ю.И., Харинова Н.В. Фотоупругое исследование концентрации напряжений в полосах с внутренними трещинами // Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). – 2009. – Т. 12 №3. – С. 61–66.
6. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Прикладные задачи механики разрушения. – Самара: Издательство «Самарский университет», 1999. – 195 с.
7. Ахметзянов М.Х., Албаут Г.Н. Определение больших пластических деформаций в металлических элементах методом фотоупругих покрытий // Физическая мезомеханика. 2004. – №7 (3). – С. 35–42.

8. Белова О.Н., Степанова Л.В. Вычисление коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений вблизи вершины трещины. Смешанное нагружение пластины // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2020. – Т. 26. – №3. – С. 40–62.
9. Большаков А. М., Прокопьев Л.А. Прогнозирование траектории роста трещины с учетом углового распределения малых составляющих тангенциальных напряжений у вершины трещины// Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №3. С. 25–27.
10. Гербер Ю.А., Нагель А.Е., Табанюхова М.В. Влияние радиуса закругления вершины трещины на напряжения // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2021. – Т. 27. №2. – С. 62–69.
11. ГОСТ Р 54928-2021. Национальный стандарт РФ. Трубы обсадные, насосно-компрессорные, бурильные и трубы для трубопроводов нефтяной и газовой промышленности. – 2014.
12. Демидов А.С. Метод фотоупругости и его применение в лабораториях МАИ// Двигатель. – 2018. – №3(117). – С. 10–11.
13. Жаббаров Р.М. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений в механике (метод фотоупругости) // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2017). Труды Международной научно-технической конференции. – 2017. – С. 892–894.
14. Жаббаров Р. М. Теоретически реконструированное поле изохроматических полос у вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2019. – Т. 25. – №1. – С. 57-62.
15. Зеркаль С.М., Табанюхова М.В. Фотоупругий анализ концентрации

- напряжений вблизи вершины трещин-пропилы // Инновации в жизнь. – 2019. – №2(29). – 126–133.
16. Каспарова Е. А. Численные и аналитические методы моделирования роста и взаимодействия трещин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т. 11. – №1. – С. 79–91.
 17. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
 18. Киселев М.М. Разработка установки для определения главных напряжений с повышенным пространственным разрешением в плоских прозрачных изделиях // Диссертация на соискание степени кандидата технических наук. – Ижевск. – 2010. – 137 с.
 19. Конищева О.В., Брюховецкая Е.В., Кудрявцев И.В. Трехэкспозиционный метод голографической фотоупругости для исследования объемного напряженного состояния // Технология машиностроения. – 2017. – №1. – С. 45-49.
 20. Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2018. – Т. 24. – №2. – С. 55–66.
 21. Косыгин А.Н., Косыгина Л.Н. Цифровая обработка экспериментальных интерферограмм, полученных методом фотоупругости // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2019. – Т. 25. №2. – С. 75–91.
 22. Лазарев В.А. Экспериментальная проверка численного исследования

- напряженного состояния пластины с овальным вырезом// Математические методы в технике и технологиях. – 2018. – Т. 10. – С. 7–10.
23. Литвинов И.А., Матвиенко Ю.Г., Разумовский И.А. О точности определения несингулярных компонент поля напряжений в вершине трещины с применением метода экстраполяции// Машиностроение и инженерное образование. – 2014. – №4(41). С. 43–51.
24. Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Оценка расстояния от заданной точки до максимума интерференционной полосы // Автометрия. – 2021. – Т. 57. №3. – С. 30–38.
25. Луценко А.Н., Одинцев И.Н., Гриневич А.В., Северов П.Б., Плугатарь Т.П. Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика I. Поле действующих напряжений // Ученые записки ЦАГИ. – 2015. – Т. 46. №7. – С. 55–80.
26. Матвиенко Ю. Г. Двухпараметрическая механика разрушения в современных проблемах прочности// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – Т. 42. №5. – С. 374–381.
27. Матвиенко Ю. Г. Двухпараметрическая механика разрушения. – М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2020. – 210 с.
28. Матвиенко Ю. Г. Несингулярные T-напряжения в критериях механики разрушения тел с вырезами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С. 2651–2652.
29. Математические основы теории разрушения Разрушение. Т.2. / под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975. – С. 83–203.

30. Мигуренко В.Р., Мельников Б.Э., Эйгенсон С.Н., Корихин Н.В., Раимбердиев Т.П. Исследование трещиностойкости некоторых деталей гидроэнергетического оборудования// Гидротехническое строительство. – 2017. – №1. – С. 36-45.
31. Морозов Е.М., Фридман Я.Б. Некоторые закономерности в теории трещин// Прочность и деформация в неравномерных физических полях. Сб. статей МИФИ под ред. Я.Б. Фридмана. – Вып.2. М.: Атомэнергоиздат. – 1968. – С. 216-253.
32. Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. – М.: URSS, 2021. – 454 с.
33. Морозов Е.М. Механика разрушения упругих тел – М.: МИФИ, 1984. – 80 с.
34. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1954. – 648 с.
35. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения: Специальные задачи механики разрушения. – М.: URSS, 2017. – 192 с.
36. Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике – М.: URSS, 2020. – 240 с.
37. Партон В.З. Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
38. Паулиш А.Г., Загубисало П.С., Бараков В.Н., Павлов М.А. Экспериментальное исследование пьезооптического преобразователя для вы-

- сокочувствительных датчиков деформации// Автометрия. – 2018. – Т. 54. №2. – С. 78-84.
39. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел – СПб.: Профессия, 2002. – 320 с.
40. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. Курс лекций – СПб.: Профессия, 2012. – 552 с.
41. Синявский Н.Я., Корнева И.П. Исследование гидрофильности полиуретановой пленки методом фотоупругости и релаксации и релаксометрии ЯМР // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 127. №12. – С. 912-916.
42. Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений)// Сибирский журнал вычислительной математики. – 2019. – Т. 12. №12. – С.345-361.
43. Степанова Л.В., Бахарев Д.В., Жаббаров Р.М., Бахарева Ю.Н. Цифровая фотоупругость: экспериментальное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения поля напряжений в окрестности вершины трещины // Математическое моделирование в естественных науках. Тезисы XIX Всероссийской школы-конференции. – 2020. – С. 10.
44. Степанова Л.В., Белова О.Н., Туркова В.А. Определение коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости и метода конечных элементов// Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2019. – Т. 25. №3. – С. 62–82.
45. Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом

- разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2019. – Т.25. – №1. – С.63–79.
46. Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2019. – Т.25. – №1. – С.80–96.
47. Степанова Л. В., Долгих В.С. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений. Метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 21. – №4. – С. 717-735.
48. Степанова Л. В., Долгих В.С. Экспериментальное определение коэффициентов многопараметрического разложения поля напряжений у вершины трещины: метод фотоупругости // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2017. – Т. 23. №1. – С. 59–68.
49. Степанова Л. В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. №4. – С. 237–249.
50. Степанова Л. В. Экспериментальное и конечно-элементное определе-

- ние коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – №1. – С. 72–85.
51. Тырымов А. А. Численная оценка коэффициента интенсивности напряжений и коэффициента биаксиальности для компактного образца с использованием сингулярного элемента графовой модели упругого тела // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2020. – №2(237). – С. 58–61.
52. Тырымов А. А. Численная оценка т-напряжений для образца с Центральной трещиной на основе графовой модели упругого тела // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2019. – №6(229). – С. 26–29.
53. Фрохт М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений – М.: Гостехиздат, 1948-1950. – Т.1. – 432 с.
54. Хаимова-Малькова Р.И. Методика исследования напряжений поляризационно-оптическим методом // М.: Наука. – 1970. – 116 с.
55. Черепанов Г.П. Механика разрушения – М.-Ижевск: Издательство "ИКИ 2012. – 872 с.
56. Шарафутдинов Г.З. Исследование метода фотоупругости // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2018. – №3. – С. 135–141.
57. Шлянников В.Н., Захаров А.П., Герасименко А.А. Характеристики циклической трещиностойкости стали Ст-3 при двухосном нагружении // Труды Академэнерго. – 2013. №4. – С. 91–101.

58. Шлянников В.Н., Захаров А.П. Обобщенные диаграммы циклической трещиностойкости при двухосном нагружении// Труды Академэнерго. – 2015. – №4. – С. 72–89.
59. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
60. Aben H. On the role of T. J. Seebeck in the discovery of the photoelastic effect in glass // Proc. Est. Acad. Sci., Eng. – 2007. V. 13. №4. – P. 283–94.
61. Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of T-stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes// Физическая мезомеханика. – 2018. – V. 21. №1. – P. 30–40.
62. Akbardoost J., Rastin A. Scaling effect on the mixed-mode fracture path of rock materials // Fizicheskaya Mezomekhanika. – 2016. – V. 19. – №4. – P. 441–451.
63. Aliabadi M.N. Boundary element formulations in fracture mechanics// Applied Mechanics Rev. – 1997. –V. 50(2). – P. 83–96.
64. Andereson T.L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications – CRC Press, 2017. – 688 p.
65. Asundi A. MATLAB for Photomechanics – Oxford: Elsevier Science, 2002. – 198 p.
66. Ayataollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact specimen// Optics and Lasers in Engineering. – 2017. – V. 90. – P. 26–33.
67. Ayatollahi M.R., Moghaddam M.R., Berto F. T-stress effects on fatigue

- crack growth – Theory and experiment // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – V. 187. – P. 103–114.
68. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. Crack tip fields in anisotropic planes: a review // International Journal of Fracture. – 2021. – P. 1573–2673.
69. Ayatollahi M.R., Nejati M. Determination of NSIFs and coefficients of higher order terms for sharp notches using finite element method // International Journal of Mechanical Sciences. – 2011. – V. 53. – P. 164–177.
70. Ayatollahi M.R., Nejati M. Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity // Materials and Design. – 2011. – V. 32. №2. – P. 561–569.
71. Ayatolloahi M.R., Nejati M. An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. – 2011. – V. 34. – P. 159-176.
72. Bachareva Y. N., Mironov A.V., Petrova D.M. Extraction of fracture mechanics parameters from FEM analysis: algorithms and procedures // Vestnik of Samara University. Natural Sciences. – 2020. – V. 26. – №1. – P. 69-77.
73. Bahrami B., Ayatollahi, Torabi A.R. Application of digital image correlation method for determination of mixed mode stress intensity factors in sharp notches // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. – V. 124. – 105830.
74. Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and

- coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field // *Procedia Structural Integrity*. – 2021. – V. 32. – P. 32–41.
75. Belova O. N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: Construction of the Williams series expansion // *Procedia Structural Integrity*. – 2022. – V. 37. – P. 888–899.
76. Belova, O. N. Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis // *Procedia Structural Integrity*. – 2022. – V. 40. – P. 46–60.
77. Brinez J.C., Martinez A.R., Branch J.W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity// *Optik*. – 2018. – V. 157. – P. 287–297.
78. Berrekheroukh N., Sereir Z., Vivet A., Adda Bedia E.A., Fekrar A. Experimental and numerical models to study the creep behavior of the unidirectional Alfa fiber composite strength by the photoelasticity method // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2021. – P. 1573–2738.
79. Camacho-Reyes A., Vasco-Olmo J.M., James M.N., Diaz F.A. Towards a new methodology for the characterization of crack tip fields based on a hybrid computational approach // *International Journal of Fatigue*. – 2022. – V. 162. – 106942.
80. Chen C., Yang R., Xu P., Ding C. Experimental study on the interaction between oblique incident blast stress wave and static crack by dynamic photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2022. – V. 148. – 106764.

81. Chernyatin A.S., Lopez-Crespo P., Moreno B., Matvienko Y.G. Multi - approach study of crack – tip mechanics on aluminium 2024 alloy // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2018. – V. 98. – P. 38–47.
82. Hou C., Wang Z., Jin X., Ji X., Fan X. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic // Engineering Fracture Mechanics. – 2021. – V. 242. – 107455.
83. Chona R., Irwin G.R., Shukla A. Two and three parameter presentations of crack-tip stress field // Journal of strain analysis. – 1982. – V. 17, №2. – P. 79–86.
84. Dolgikh V.S., Stepanova L.V. A photoelastic and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: Stress intensity factors, T-stresses and higher order terms // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2216. – 020014.
85. Dondeti S., Tippur H.V. A Comparative Study of Crack Branching in Glass Using Photoelasticity, Digital Image Correlation and Digital Gradient Sensing Techniques // Experimental mechanics. – 2020. – V. 60. – P. 217–233.
86. Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Melo F.Q., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.M.G.P. Advancement on optical methods in stress dead-zone characterisation and SIF evaluation// Engineering Failure Analysis. – 2022. V. 140. – 106493.
87. Fett T. T-stresses in rectangular plates and circular disks // Engineering Fracture Mechanics. – 1988. – V. 506. – P. 631–652.

88. Frishter L. Stress-Strain Generation Within a Stress Concentration Zone Using the Phototelasticity Method // in International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies EMMFT. – 2018. – P. 692–708.
89. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. – 1921. – V. 221. №2. – P. 163–198.
90. Griffith A.A. The theory of rupture // Proceedings First International Congress for Applied Mechanics. Delft. – 1924. – P. 25–63.
91. Gulizzi V., Benedetti I., Milazzo A. A novel boundary element formulation for anisotropic fracture mechanics // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – V. 104. – 102329.
92. Hariprasad M.P., Ramesh K. Analysis of contact zones from whole field isochromatics using reflection photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2018. – V. 105. – 86–92.
93. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. – 2012. V. 49. – P. 556–566.
94. Hello G. Derivation of complete crack-tip expansion from Westergaard-Sanfors solutions // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – V. 144–145. – P. 265–275.
95. Huang C., Song Y., Yang L., Fan P., Wang Q., Liu H., Study on fracture behavior for sharp V-notched specimens combined with 3D-DIC and caustics // Engineering Fracture Mechanics. – 2022. – V. 260. – 108190.

96. Hu C., Ling D., Ren X., Gong S., Wang L., Huang Z. An improved crack-tip element treatment for advanced FEMs // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2020 – V. 108. – 102587.
97. Inglis C.E. Stresses in Plates Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners // Transactions of the Institute of Naval Architects. – 1913. – V. 55. – P. 219–241.
98. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate// Journal of Applied Mechanics. – 1957. – V. 24. №3. – P. 361–364.
99. Juan C. Brinez-de L., Restrepo-Martinez A., Branch-Bedoya J.W. Computational analysis of Bayer colour filter arrays and demosaicking algorithms in digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2019. – V. 122. – P. 195–208.
100. Juan C. Brinez-de L., Rico-Garcia M., Restrepo-Martinez A. PhotoelastNet: a deep convolutional neural network for evaluating the stress field by using a single color photoelasticity image// Applied Optics. – 2022. – V. 61. №7. – P. 50–62.
101. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. A photoelastic investigation of partially debonded rigid line inclusion // International Journal of Mechanical Sciences. – 2022. – V. 217. – 107003.
102. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. –V. 126. – 105855.
103. Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Interaction of a rigid line inclusion

- with various discontinuities using experimental and numerical techniques
// Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – V. 121. – 103482.
104. Karihaloo B.L., Abdalla H., Xiao Q.Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – V. 70. №17. – P. 2407–2420.
105. Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity // Engineering Fracture Mechanics. – 2001. – V. 68. №15. – P. 1609–1630.
106. Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen // International Journal of Fracture. – 2001. – V. 112. №2. – P. 129–137.
107. Kim S. Palta B., Oh H.-S. Extraction formulas of stress intensity factors for the biharmonic equations containing crack singularities// Computers and Mathematics with Applications. – 2020. – V. 80. – P. 1142–1163.
108. Krepl O., Klusak J. Multi-parameter failure assessment of a bi-material V-notch – Crack initiation from a free-edge singularity // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – V. 100. – P. 233–241.
109. Lee K.H., Kim B.S., Kim J.S. Fabrication of transparent homogeneous functionally graded materials and crack analysis by photoelasticity // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2021. – V. 35. – P. 3919–3929.
110. Li D., Huang P., Chen Z., Yao G., Guo X., Zheng X., Yang Y. Experimental study on fracture and fatigue crack propagation processes

- in concrete based on DIC technology // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – V. 2335. – 107166.
111. Liebowitz H., Moyer E. T. Jr. Finite element methods in fracture mechanics // Computers & Structures. – 1989. – V. 31. – P. 1–9.
 112. Li H., Zhong H. Weak form quadrature element analysis of crack-tip asymptotic field coefficients // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – V. 119. – 103320.
 113. Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2021. – V. 113. – 102971.
 114. Liu Z.-E., Wei Y. An analytical solution to the stress fields of kinked cracks// Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2021. V. – 156. – 104619.
 115. Liu W., Ma Z., Li L., Yue Z. Photoelastic evaluation of stress fields and notch stress intensity factors for blunt V-notches// Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2020. – V. 110. – 102806.
 116. Liu H., Zhong H. Weak form quadrature element analysis of crack-tip asymptotic field coefficients // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – V. 119. – 103320.
 117. Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – V. 143. – P. 32–46.
 118. Malikova L., Vesely V. Significance of higher-order terms of the Williams expansion for plastic zone extent estimation demonstrated on a mixed-

- mode geometry // *Procedia Structural Integrity*. – 2014. – V. 3. – P. 1383–1388.
119. Malikova L., Vesely V. The influence of higher order terms of Williams series on a more accurate description of stress fields around the crack tip // *Fatigue and Fracture Engineering Materials and Structures*. – 2014. – V. 38. – P. 91–103.
120. Manjit Y., Limpichaipanit A., Ngamjarurojana A. Mechanical analysis of square shaped PMMA using reflection photoelasticity // *Optik*. – 2021. – V. 240. – 166943.
121. Mazurowski B., Sanchez-Rivadeneira A.G., Shauer N., Duarte C.A. High-order stable generalized/eXtended finite element approximations for accurate stress intensity factors // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2021. – V. 241. – 107308.
122. Mehdi-Soozani A. Experimental fracture mechanics through digital image analysis – Retrospective Theses and Dissertations. Iowa State University, 1986. – 157 p.
123. Miarka P., Cruces A.S., Seitzl S., Malikova L., Lopez-Crespo P. Evaluation of the SIF and T-stress values of the Brazilian disc with a central notch by hybrid method // *International Journal of Fatigue*. – 2020. – V. 135. – 105562.
124. Mirzaei A.M., Bahrami B., Ayatollahi M.R. Asymptotic stress field around the blunt and sharp notches in bimaterial media under mixed mode I/II loading // *Applied Mathematical Modelling*. – 2022. – V. 109. – P. 848–863.
125. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B. Asymptotic stress field and

- the coefficients of singular and higher order terms for V-notches with end holes under mixed – mode loading // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – V. 172–173. – P. 51-69.
126. Mirzaei A.M., Ayatollahi M.R., Bahrami B., Berto F. Elastic stress analysis of blunt V-notches under mixed mode loading by considering higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – V. 78. – P. 665-684.
127. Moazzami M., Ayataollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano M., Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique // *Optics and Laser Technology*. – 2018. – V. 107. – P. 344–352.
128. Mose B., Shin D., Nam J. Experimental Stress Analysis of Spherical Roller Bearing for High-Speed Trains Using Photoelasticity // *Experimental Techniques*. – 2022.
129. Murakami Y. *Stress Intensity Factors Handbook* – New York: Pergamon, 1986. – 1566 p.
130. Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – V. 91. – P. 837–862.
131. Paris P.C., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws // *Journal of Basic Engineering*. – 1963. – V. 85. – №1. – P. 528–534.
132. Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.E. A rational analytic theory of fatigue // *The Trend in Engineering*. – 1961. – V. 13. – P. 9–14.
133. Patil P., Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic

- data from digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2017. – V. 93. – P. 182–194.
134. Patterson EA. Automated photoelastic analysis // Strain. – 1988. – V. 24(1). – P. 15–20.
135. Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stress// Engineering Fracture Mechanics. – 2017. – V. 179. – P. 348–374.
136. Ramachandra P.M., Sutar S., Kumara G.C.M. Stress analysis of a gear using photoelastic method and Finite element method: Review // Materials today: Proceedings. – 2022. V. 65. – Part 8. – P. 3820–3828.
137. Ramakrishnan V., Ramesh K. Scanning schemes in white light Photoelasticity. Part II: Novel fringe resolution guided scanning scheme // Optics and Lasers in Engineering. – 2017. – V. 92. – P. 141–149.
138. Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited // Engineering Fracture Mechanics. – 1997. V. 56. №1. – P. 25–45.
139. Ramesh K. Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications – Berlin: Springer, 2000. – 410 p.
140. Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. – V. 135. – 106186.
141. Ramesh K. Developments in Photoelasticity. A renaissance. – IOP Publishing, 2021. – 225 p.

142. Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2018. – V. 109. – P. 7–16.
143. Razumovsky I.A. Interference-optical methods of solid mechanics – Berlin: Springer, Foundations of Engineering Mechanics, 2011. – 180 p.
144. Ritchi R.O., Liu D. Introduction to Fracture Mechanics – Elsevier, 2021. – 162 p.
145. Roux-Langlois C., Gravouil A., Baietto M. S.-C., Rethore J., Mathieu F., Hild F., Roux S. DIC identification and X-FEM simulation of fatigue crack growth based on the Williams series // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – V. 53. – P. 38–47.
146. Sadd M.H. Elasticity. Theory, Applications and Numerics – Academic Press, 2021. – 624 p.
147. Sanchez M., Mallor C., Canales M., Calvo S., Nunez J.L. Digital Image Correlation parameters optimized for the characterization of fatigue crack growth life // Measurements. – 2021. V. 174. – 109082.
148. Sanford R.J. A critical re-examination of the westergaard method for solving opening-mode crack problems // Mechanics Research Communications. – 1979. – V. 6(5). – P. 289–294.
149. Sanford R.J. Principles of fracture mechanics. – Prentice Hall, 2003. – 404 p.
150. Saxena A. Basic Fracture Mechanics and its Applications. – CRC Press, 2022. – 376 p.

151. Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP) // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. – V. 127. – 105963.
152. Sciammarella C.A., Zimmerman K.B. The Old and New: A Narrative on history of the Society for Experimental Mechanics // Willistone: Morgan and Claypool. – 2018. – 108 p.
153. Shen D., Fan T. Exact solutions of two semi-infinite cracks in a strip // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – V. 70. №6. – P. 813–822.
154. Sih G.C., Barthelemy B.M. Mixed mode fatigue crack growth predictions// Engineering Fracture Mechanics. – 1980. – V. 13. – P. 439–451.
155. Sironi R.S. Optical methods of measurement. Wholefield Techniques – CRC Press, 2009. – 316 p.
156. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics – Berlin: Springer, 2008. – 1098 p.
157. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams Asymptotic Expansion Near The Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane Medium // Procedia Structural Integrity. – 2016. V. 2. – P. 1789–1796.
158. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete Williams asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane // Solid State Phenomena. – 2017. – V. 258. – P. 209–212.
159. Stepanova L.V., Dolgikh V.S., Turkova V.A. Digital photoelasticity for calculating coefficients of the Williams series expansion in plate with

- two collinear cracks under mixed mode loading // Ceur Workshop Proceedings. – 2017. – V. 1904. – P. 200–208.
160. Stepanova L.V. Influence of higher-order terms of the Williams expansion on the crack-tip stress field for mixed-mode loadings: Asymptotic solutions and interference-optical methods of solid mechanics // ICF 2017 -14th International Conference on Fracture. – 2017. – V. 2. – P. 110–111.
161. Stepanova L. V. Photoelastic study of a double edge notched plate for determination of the Williams series expansion // Vestnik of Samara University. Natural Sciences. – 2020. V. 26. №4. – P. 56–67.
162. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – №4. – P. 188–225.
163. Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method// AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2216. – 020013.
164. Stepanova L.V., Zhabbarov R.M. Asymptotic crack-tip fields in perfect plasticity under mixed mode loading // Procedia structural integrity. – 2020. – P. 1781–1786.
165. Stepanova L.V., Zhabbarov R.M. Experimental evaluation of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using digital photoelasticity // Procedia Structural Integrity. – 2020. – V. 28. – P. 1774–1780.
166. Stepanova, L. V., Dolgykh V.S. The New Algorithm for the Determination

- of the Williams Asymptotic Expansion Coefficients for Notched Semidisks Using the Photoelasticity Method and Finite Element Method // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020) : Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы. В 4-х томах, Самара, 26–29 мая 2020 года / Под редакцией В.А. Соболева. – Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. – 2020. – P. 239-247.
167. Stepanova L. V. An experimental (digital photoelastic experiments) and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: stress intensity factors, T-stresses and coefficients of higher order terms // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020) : Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы. В 4-х томах, Самара, 26–29 мая 2020 года / Под редакцией В.А. Соболева. – Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. – 2020. – P. 248–254.
168. Stepanova L.V., Zhabbarov R.M. An effective scheme for solving a class of nonlinear boundary value problems of stress concentration through quasilinearisation approach // Procedia Structural Integrity. – 2021. – V. 37. – P. 920–925.
169. Stepanova L. V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2022.
170. Stepanova L.V., Roslyakov P. Multi-parameter description of the crack-

- tip stress field: analytical determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. – 2016. – V. 100–101. – P. 11–28.
171. (Stevanovic) Hedrih K.R., Brcic S.V., Paunovic S. Application of Photoelasticity to Some Nonlinear Dynamic Problems and Stress State Analysis in Dams: A Brief Overview Inspired by the Results of Prof. Vlatko Brcic // *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices/* Lacarbonara, W., Balachandran, B., Ma, J., Tenreiro Machado, J., Stepan, G. (eds). Springer, Cham. – 2020. – P. 357–365.
172. Su R.K.L., Feng W.J. Accurate determination of mode I and II leading coefficients of the Williams expansion by finite element analysis // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2005. V. 41. – P. 1175–1186.
173. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // *Key Engineering Materials*. – 2020. – V. 827. – P.330–335.
174. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The stress analysis of cracks handbook* – New York: ASME, 2000. – 696 p.
175. Thomre M., Ramesh K. Evaluation of Fracture Parameters of Cracks in Compressor Blade Root Using Digital Photoelasticity // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – 2020. P. 557–566.
176. Timoshenko S. *Theory of elasticity* – Mc Graw-Hill Education, 2010. – 567 p.
177. Vasco-Olmo J.M., Yang B., James M.N., Diaz F.A. Investigation of effective stress intensity factors during overload fatigue cycles using

- photoelastic and DIC techniques // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2018. – V. 97. – P. 73–86.
178. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of Crack Interaction Effects Under Thermal Loading by Digital Photoelasticity and Finite Elements // Experimental Mechanics. – 2020. – V. 60. – P. 295–316.
179. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – V. 99. – P. 104–117.
180. Watson J.O. Hermitian cubic and singular elements for plane strain // in P.K. Banerjee, J.O. Watson (Eds.), Developments in Boundary Element Methods 4. Barking, UK: Elsevier Applied Science Publishing. – 1986. P. 1–28.
181. Westergaard H.M. Bearing pressures and cracks // Journal of applied mechanics. – 1939. – V. 49. – P. 49–53.
182. Williams M. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extemions // Journal of Applied Mechanics. – 1952. – V. 19(4). – P. 526–528.
183. Williams M. On the stress distribution at the base of a stationary crack // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1957. – V. 24. – P. 109–114.
184. Xiao Q.Z., Karihaloo B.L. Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. – 2003. – V. 26. – P. 719-729.
185. Yanagimoto F., Shibamura K., Nishioka Y., Shirai Y., Suzuki K., Matsumoto T. Local stress evaluation of rapid crack propagation in finite

- element analyses // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – V. 144. – P. 66–77.
186. Yuan Y., Sheng C., Zhang Z. Unified Theoretical Model of Caustic Method for the Interfacial Cracks // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – V. 233. – 107006.
187. Zakeri M., Ayatollahi M.R., Nikoobin A. Photoelastic study of a center-cracked plate – The lateral load effects // Computational Materials Science. – 2007. – V. 41. – P. 168–176.
188. Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Numerical determination of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using FEM// Procedia Structural Integrity. – 2020. – V. 28. – P. 1768-1773.
189. Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Experimental evaluation of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using digital photoelasticity // Procedia Structural Integrity. – 2020. – V. 28. – P. 1774–1780.
190. Zhang B., Xu W., Wu X.-R. Weight function method and stress intensity factor for two unsymmetric through-thickness and quarter-elliptical corner cracks at circular hole // Engineering Fracture Mechanics. – 2022. – V. 264. – 108361.
191. Zhangyu R., Huimin X., Yang J. Determination of the stress and strain fields in porous structures by photoelasticity and digital image correlation techniques // Polymer Testing. – 2021. – V. 102. – 107315.

Приложение А. Акты о внедрении результатов


ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
«САМАРСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И ПРОЕКТНЫЙ ИНСТИТУТ НЕФТЕДОБЫЧИ»
(ООО «СамараНИПИнефть»)

«УТВЕРЖДАЮ»
Заместитель генерального директора по геологии и разработке Общества с ограниченной ответственностью «Самарский научно-исследовательский и проектный институт нефтедобычи»


Демин С.В.
« 05 » 09 2022 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

в производственную деятельность результатов диссертационной работы
Жаббарова Рамиля Муритовича по теме:
«Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект»

Настоящим актом утверждаем, что результаты научных исследований, полученные Жаббаровым Р.М., лаборантом - исследователем кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, при выполнении диссертационной работы на тему: «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект», использованы в ООО «СамараНИПИнефть» при оценке жизнеспособности нефтегазового оборудования. В расчетах использована новая методика оценки скорости усталостного распространения трещины (оценка ресурса труб нефтегазовой отрасли).

В работе сделан заметный шаг к созданию научной основы для эффективной оценки прочностной надежности и долговечности труб и трубопроводных систем; предложена усовершенствованная методика оценки скорости роста трещины, опирающаяся на аккуратный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины дефекта (трещины или выреза) и новую зависимость скорости роста трещины от размаха функции плотности энергии упругой деформации.

Начальник отдела проектирования разработки месторождений Самарской области


Чернышева Н.В.

Подпись Чернышевой Н.В. заверяю.
Ученый секретарь дов.230 от 06.04.2022г.


Кирыанова Е.В.



УТВЕРЖДАЮ:

Директор
ООО «Промоинжиниринг»



С.Н.Головко

30 августа 2022 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект» лаборанта-исследователя кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева Жаббарова Рамиля Муритовича

ООО «Промоинжиниринг» занимается проектированием, разработкой, поставкой и поддержкой работы оборудования нефте- и газодобывающей отраслей.

Настоящий акт составлен о том, что менеджмент ООО «Промоинжиниринг» подтверждает, что в практику работы компании внедрены отдельные результаты кандидатской диссертации Р.М. Жаббарова «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект», представленной на соискание степени кандидата технических наук, посвященной рассмотрению многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса. Была внедрена новая методика оценки скорости усталостного распространения трещины (оценка ресурса трубопроводных систем нефтегазовой отрасли).

Предложенная Р.М. Жаббаровым методика расчета скорости роста трещины при циклическом нагружении дает возможность получить усовершенствованную оценку целостности трубопроводных систем и штанг нефтегазового оборудования, выполняемую ООО «Промоинжиниринг». Предложенный метод нахождения напряженно-

деформированного состояния также использован при определении предварительных исследований несущей способности труб.

Комиссия в составе:

- Зайцев Олег Викторович
- Тронин Павел Петрович
- Баткаев Ринат Шамильевич

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Жаббарова Р.М. «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использованы в деятельности ООО «Промоинжиниринг» в виде:

1. новой методики оценки скорости усталостного распространения трещины (оценка ресурса труб нефтегазовой отрасли)
2. научных рекомендаций для использования в конечно-элементных расчетах, проводимых организацией.

Результаты разработки и научно – практические рекомендации также планируется использовать в будущих проектах по расчету напряженно-деформированного состояния в ответственных элементах конструкций нефтегазовой отрасли.

Председатель комиссии

О.В.Зайцев

Член комиссии

П.П.Тронин

Член комиссии

Р.Ш.Баткаев



ИНЖЕНЕРНЫЙ
ЦЕНТР

“ОЛБО Групп” - Инженерный центр

Россия, г. Самара
ул. Сая Просека, д. 99а, оф. 1
E-mail: olbo163@mail.ru
Офис: +7 (846) 201-18-85
Телефоны: +7 (917) 152-71-82;

Общество с ограниченной ответственностью ООО «ИЦ ОЛБО Групп»

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект» лаборанта-исследователя кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева Жаббарова Рамиля Муритовича

ООО «ИЦ ОЛБО Групп» осуществляет проектирование, разработку, поставку и поддержку работы оборудования конструкций, которые подвергаются различным сложным системам воздействий во время их эксплуатации.

Настоящий акт составлен о том, что в целях повышения эффективности работы ООО «ИЦ ОЛБО Групп» были использованы материалы кандидатской диссертации Р.М. Жаббарова «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект», представленной на соискание степени кандидата технических наук, посвященной рассмотрению многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса. В частности, была внедрена новая методика оценки скорости усталостного распространения трещины (оценка ресурса труб нефтегазовой отрасли).

Разработанная Р.М. Жаббаровым методика расчета скорости роста усталостной трещины позволяет получить уточненную оценку целостности труб и штанг нефтегазового оборудования, выполняемую ООО «ИЦ ОЛБО Групп».

Исследование диссертационной работы Жаббарова Рамиля Муритовича проводила комиссия в составе

Ведущий специалист

Коновалов Д.С.

Инженер

Филатов О.Б.



29.08.2022



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

Самарского университета, к.ф.-м.н.

 А.В. Гаврилов

«30» августа 2022 г.

об использовании результатов диссертационной работы Р.М. Жаббарова «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, в учебном процессе федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева».

Комиссия в составе декана механико-математического факультета, д.ф.-м.н., доцента А.А. Буханько, представителя механико-математического факультета в РИК ЕНИ, к.ф.-м.н., доцента кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Н.В. Воропаевой и заведующего кафедрой математического моделирования в механике д.ф.-м.н., доцента составила настоящий акт о том, что в учебном процессе Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева использованы следующие результаты диссертации Р.М. Жаббарова «Идентификация коэффициентов разложения М. Уильямса: теоретический подход, вычислительное обоснование и экспериментальный аспект», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук:

1. Теоретические и экспериментальные результаты, полученные с помощью метода цифровой фотоупругости, используются в лекционных курсах для обучающихся по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, магистерская программа «Вычислительные технологии в механике сплошных сред» по дисциплинам «Экспериментальные методы механики деформируемого твердого тела», «Механика деформируемого твердого тела», «Интерференционно-оптические методы механики».

2. Алгоритмы и комплекс программ расчета напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений используются обучающимися по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, магистерская программа «Вычислительные технологии в механике сплошных сред» по дисциплинам «Использование МКЭ-пакета SIMULIA Aباqus для решения задач механики деформируемого твердого тела», «Механика деформируемого твердого тела».

Декан механико-математического

факультета



А.А. Буханько

Представитель

механико-математического

факультета в РИК ЕНИ,

к.ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных

уравнений и теории управления

Зав. кафедрой

математического моделирования в механике



Н.В. Воропаева



Л.В. Степанова

Приложение Б. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2022618998

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2022618998 Дата регистрации: 18.05.2022 Номер и дата поступления заявки: 202261807721.04.2022 Дата публикации и номер бюллетеня: 18.05.2022 Бюл. № 5 Контактные реквизиты: нет	Автор(ы): Жаббаров Рамиль Муритович (RU) Правообладатель(и): Жаббаров Рамиль Муритович (RU)
---	--

Название программы для ЭВМ:
WilliamsJS

Реферат:
Программа предназначена для иллюстрации теоретически реконструированного поля изохроматических полос. Программа может использоваться на предприятиях по изготовлению деталей конструкций для анализа поля напряжений у вершины трещин. Функциональные возможности программы: программа иллюстрирует теоретически реконструированное поле изохроматических полос вблизи трещины, принимая в качестве входных параметров угол трещины, число удерживаемых слагаемых в полном асимптотическом разложении Уильямса, размер и количество изображений. ОС: Windows XP и выше, MacOS.

Язык программирования: JavaScript

Объем программы для ЭВМ: 12 КБ